



ACTIVITÉ · A1. QUELS NOMBRES LA CALCULATRICE SAIT-ELLE ÉCRIRE ?

Une enquête sur ce qui se cache derrière la virgule

FEUILLE DE ROUTE

	PHASE	TITRE	DURÉE
1.	EXPLORER	Six nombres au banc d'essai	
2.	CONJECTURER	Qu'est-ce qui décide ?	
3.	VALIDER	Mettre la règle à l'épreuve	
4.	FORMALISER	Écrire la règle, et rencontrer un intrus	

Ce travail n'est pas noté : votre première réponse, même fausse, est une donnée d'expérience.

▷ explorer · ◇ conjecturer · ✓ valider · □ formaliser

→ prépare COURS A1, § 3 ET § 4 · l'écriture décimale des nombres, et ce qu'elle permet de distinguer

Ce travail se fait **seul**. La calculatrice est autorisée, mais elle est l'objet de l'enquête, pas son arbitre.

PHASE 1 · EXPLORER



Six nombres au banc d'essai

Votre calculatrice affiche dix chiffres, pas un de plus. Quand elle écrit 0,166666667, l'écriture s'arrête-t-elle là, continue-t-elle, a-t-elle été arrondie ? L'écran ne le dit pas. La division posée, elle, le dit.

Un exemple entièrement traité, sur un autre nombre. Posons la division de 1 par 6, et surveillons non pas les chiffres du quotient, mais les **restes** :

ÉTAPE	ON DIVISE	CHIFFRE OBTENU	RESTE
1	10 par 6	1	4
2	40 par 6	6	4
3	40 par 6	6	4

Le reste 4 est revenu. Or un même reste redonne forcément la même suite de calculs : à partir de là, le chiffre 6 se répétera sans fin. Donc $\frac{1}{6} = 0,1666\dots$, et cette écriture **ne s'arrête jamais**. Ce n'est pas une limite de la calculatrice, c'est une propriété du nombre.

▷ Rangez les six nombres ci-dessous en deux familles : ceux dont l'écriture décimale s'arrête, ceux dont elle se répète indéfiniment. Si l'un d'eux refuse d'entrer dans l'une ou l'autre, ne le forcez pas : laissez sa case en attente et notez en une ligne ce qui vous bloque.

VOTRE TABLEAU, SEUL(E) ET PAR ÉCRIT, AVANT TOUT ÉCHANGE

Écrivez au moins **huit décimales** de chaque nombre avant de le classer : quatre décimales ne suffisent pas toujours à décider.

NOMBRE	ÉCRITURE DÉCIMALE (8 DÉCIMALES AU MOINS)	FAMILLE
$\frac{1}{4}$		
$\frac{3}{8}$		
$\frac{1}{3}$		
$\frac{1}{7}$		
$\frac{22}{7}$		
$\sqrt{2}$		

PHASE 2 · CONJECTURER



Qu'est-ce qui décide ?

Voici deux listes de fractions. Celles de gauche ont une écriture décimale qui **s'arrête**. Celles de droite, non.

L'ÉCRITURE S'ARRÊTE	L'ÉCRITURE NE S'ARRÊTE PAS
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{25}$	$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{11}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{13}$ $\frac{1}{14}$ $\frac{1}{15}$

◇ Qu'est-ce qui, dans une fraction, décide de son camp ? Énoncez une règle qui permette de prédire, sans poser aucune division.

VOTRE RÈGLE, EN UNE PHRASE

Auto-contrôle : si votre règle range $\frac{1}{6}$ du même côté que $\frac{1}{2}$, elle est fausse · relisez-la avant de continuer.

.....

.....



Mettre la règle à l'épreuve

Une règle qui n'a jamais été mise en danger ne vaut rien. Voici trois épreuves, de plus en plus exigeantes.

✓ **Première épreuve.** Appliquez votre règle à $\frac{6}{15}$ et à $\frac{7}{28}$: prédisez le camp de chacune, **puis seulement** posez la division et vérifiez.

PRÉDICTION, PUIS VÉRIFICATION

Si votre prédiction tombe à côté, ne rayez pas votre règle : **corrigez-la**, et notez ce qui vous avait échappé.

.....

.....

✓ **Deuxième épreuve.** Montrez que l'écriture décimale de $\frac{1}{3}$ ne peut **pas** s'arrêter.

Pour vous lancer, le premier pas seulement : supposons qu'elle s'arrête après n chiffres ; alors $\frac{1}{3}$ s'écrirait $\frac{a}{10^n}$, où a est un entier. À vous de conduire ce raisonnement jusqu'à l'absurdité.

VOTRE RAISONNEMENT

.....

.....

.....

✓ **Troisième épreuve.** Faites de même pour $\frac{1}{6}$. Cette fois, aucune amorce n'est donnée.

VOTRE RAISONNEMENT

.....

.....



Écrire la règle, et rencontrer un intrus

□ Écrivez votre règle sous une forme définitive, en une phrase française commençant par « Une fraction » et contenant les mots « si et seulement si ». Attention à la portée de votre énoncé : de **quelles** fractions parlez-vous ?

LA RÈGLE, VERSION DÉFINITIVE

.....

.....

□ ♦ **L'intrus.** La calculatrice affiche $\sqrt{2} \approx 1,414213562$. Vos deux familles étaient : l'écriture s'arrête, ou elle se répète. **Chacune des deux, si $\sqrt{2}$ y entrerait, dirait quelque chose de très fort sur ce nombre. Dites quoi, pour l'une et pour l'autre. Puis dites ce qu'il resterait si aucune des deux ne convenait.**

VOTRE RÉPONSE

.....

.....

.....

.....

Coup de pouce

À ne lire qu'après avoir vraiment cherché seul(e) sur la phase concernée.

Phase 1 · Ce n'est pas le quotient qu'il faut surveiller, c'est le **reste**. Dès qu'un reste déjà rencontré revient, tout se répète derrière.

Phase 2 · Pour chaque dénominateur, cherchez un entier par lequel le multiplier pour tomber sur 10, 100, 1000, 10 000... bref sur une puissance de 10, aussi grande qu'il le faut. Comparez gauche et droite.

Phase 3, première épreuve · Avant de prédire quoi que ce soit, regardez si la fraction peut être simplifiée.

Phase 3, deuxième épreuve · Vous êtes parti de $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$. Multipliez les deux membres par 3, puis par 10^n , et demandez-vous si 10^n peut vraiment être un multiple de 3.

Phase 4 · Aucun coup de pouce : c'est à vous.

LA RÉVÉLATION AU PROCHAIN COURS

Un nombre a résisté. Ce refus est-il une maladresse de la calculatrice, ou quelque chose de plus profond ? Nous trancherons au prochain cours, avec un scribe heurté au même mur il y a trente-sept siècles.