



ACTIVITÉ • A3. LA SOLUTION DISPARUE

Une enquête sur les calculs qui trahissent les équations

FEUILLE DE ROUTE

	PHASE	TITRE	DURÉE
1.	EXPLORER	Le tour qui rate une fois	
2.	CONJECTURER	Trois lignes à défendre, puis à attaquer	
3.	VALIDER	Trois épreuves	
4.	FORMALISER	Écrire la règle du geste sûr	

Ce travail n'est pas noté : votre première réponse, même fausse, est une donnée d'expérience.

▷ explorer · ◇ conjecturer · ✓ valider · □ formaliser

→ prépare COURS A3, § 1 · les calculs qui transforment une équation sans la trahir

Ce travail se fait **seul(e)**. La calculatrice est autorisée, mais tous les calculs de cette activité se font de tête.

PHASE 1 • EXPLORER



Le tour qui rate une fois

Un magicien fait travailler toute une salle en même temps. Chacun pense à un nombre et le garde secret. La consigne est la même pour tous :



Puis il demande : « qui a obtenu **zéro** ? » Des mains se lèvent, et il annonce à chacune de ces personnes, sans rien lui demander d'autre : « votre nombre était 3. » Les autres spectateurs ne l'intéressent pas.

Un soir, pourtant, une spectatrice du premier rang lève la main et répond : « non. » Le tour, qui marchait depuis des années, vient de rater.

Un exemple entièrement traité, sur une tout autre affirmation. Quelqu'un prétend : « quel que soit le nombre choisi, l'ajouter à lui-même ou le multiplier par lui-même, c'est pareil. » On éprouve cette phrase en essayant des nombres. Pour 2 : $2 + 2 = 4$ et $2 \times 2 = 4$, l'affirmation tient. Pour 3 : $3 + 3 = 6$ mais $3 \times 3 = 9$, l'affirmation tombe. *Un seul essai qui marche ne prouve pas une affirmation générale ; un seul essai qui rate suffit à la démolir.*

▷ **Le tour du magicien est-il fiable : une personne qui a obtenu zéro a-t-elle forcément pensé à 3 ?** Éprouvez-le comme dans l'exemple, en essayant au moins trois nombres de départ différents.

VOS ESSAIS ET VOTRE VERDICT, SEUL(E) ET PAR ÉCRIT

Format attendu : une ligne par essai (nombre pensé, résultat obtenu), puis une phrase de verdict qui commence par « Le tour ».

.....

.....

.....

.....

.....

PHASE 2 · CONJECTURER



Trois lignes à défendre, puis à attaquer

Interrogé sur son secret, le magicien sort un carnet et montre sa justification, écrite en trois lignes.

LIGNE 1 J'appelle n le nombre pensé par le spectateur. S'il a obtenu zéro, c'est que son nombre vérifie $n^2 - 3n = 0$, c'est-à-dire $n^2 = 3n$.

LIGNE 2 Je divise les deux membres par n : il reste $n = 3$.

LIGNE 3 Donc toute personne qui annonce zéro a pensé à 3.

♦ **Faites d'abord l'avocat du magicien** : pour chacune des trois lignes, dites quel geste de calcul ou quel pas de raisonnement connu semble la justifier. Puis retournez-vous contre lui : puisque le tour a raté, l'une au moins de ces lignes cache une faute. Désignez-la, et dites ce qu'elle a oublié.

VOTRE DÉFENSE, PUIS VOTRE ATTAQUE

Auto-contrôle : dire « le tour rate » ne suffit pas · si votre attaque ne désigne pas une ligne précise, reprenez vos essais de la phase 1 et regardez lequel met le carnet en difficulté.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Trois épreuves

Une accusation qu’on n’a pas mise à l’épreuve n’est encore qu’un soupçon. Voici trois épreuves, de moins en moins guidées.

✓ **Première épreuve.** Revenons à la spectatrice du premier rang. *Le calcul est fait pour vous* : elle avait pensé au nombre 0, et $0 \times 0 - 3 \times 0 = 0$. Elle a donc bien obtenu zéro, levé la main, et le magicien lui a annoncé « votre nombre était 3 ».

À vous de dire ce que cette seule spectatrice **prouve**, et ce qu’elle ne prouve pas : sur la ligne 3 du carnet d’abord, puis sur la ligne que vous avez accusée en phase 2, si ce n’est pas la même.

VOTRE RÉPONSE

.....

.....

.....

.....

✓ **Deuxième épreuve.** Le même magicien possède un second tour : « multipliez votre nombre par lui-même, retirez **cinq** fois le nombre pensé », et il annonce 5 à qui obtient zéro. Remplissez le tableau ci-dessous *en essayant des nombres de départ*, sans reprendre le carnet : essayez-en au moins cinq, dont zéro, dont un nombre qui ne soit pas entier.

NOMBRES DE DÉPART QUI DONNENT ZÉRO	CE QUE LE MAGICIEN ANNONCERAIT

Puis dites, en une phrase, si ce second tour est plus fiable que le premier, et pour quels spectateurs il se trompe.

VOTRE PHRASE

.....

.....

.....

✓ **Troisième épreuve.** Sarah, qui a suivi toute l'affaire, affirme : « le geste *ajouter 7 aux deux membres*, lui, ne fait jamais ni disparaître ni apparaître de solution, sur aucune équation. » Essayez de la mettre en défaut : choisissez vous-même des équations, appliquez-lui le geste, comparez les solutions avant et après. Aucune amorce n'est donnée.

VOS ESSAIS, VOTRE VERDICT, ET CE QUI VOUS MANQUE POUR EN ÊTRE SÛR(E)

.....

.....

.....

.....

.....

PHASE 4 · FORMALISER



Écrire la règle du geste sûr

□ Écrivez la règle qui distingue les gestes sûrs des gestes traîtres, en une phrase française commençant par « Un calcul fait sur les deux membres d'une équation est sans danger lorsque ». Attention à la portée de votre énoncé : parle-t-il d'ajouter ? de multiplier ? de diviser ? et par quoi ?

LA RÈGLE, VERSION DÉFINITIVE

.....

.....

.....

.....

□ ♦ **Le geste retourné.** Le tour du magicien perdait une solution en route. Le geste « multiplier les deux membres par un même nombre » peut-il, lui, en faire *apparaître* ? Cherchez un multiplicateur qui transforme l'équation $x = 3$, qui n'a qu'une seule solution, en une équation dont **tout** nombre est solution.

VOTRE MULTIPLICATEUR ET VOTRE EXPLICATION

.....

.....

.....

.....

Coup de pouce

À ne lire qu'après avoir vraiment cherché seul(e) sur la phase concernée.

Phase 1 · Vos trois essais sont libres, mais l'exemple traité dit ce qui distingue un essai qui confirme d'un essai qui démolit. Lequel de ces deux types cherchez-vous ici ?

Phase 2 · Reprenez les trois lignes une par une. Oubliez le tour : chacune, lue seule, est un geste sur des nombres. Chacun de ces gestes est-il permis pour toutes les valeurs que n pourrait prendre ?

Phase 3, première épreuve · Une seule personne peut-elle suffire à démolir la ligne 3, qui prétend valoir pour toute personne ayant obtenu zéro ?

Phase 3, deuxième épreuve · Si vous n'avez trouvé qu'un seul nombre de départ pour la colonne de gauche, c'est qu'il en manque un : relisez ce qui est arrivé au premier tour.

Phase 3, troisième épreuve · Prenez une équation dont vous connaissez déjà les solutions par cœur, appliquez le geste, et cherchez les solutions de la nouvelle équation. Puis recommencez avec une équation qui en a deux.

Phase 4 · Confrontez votre règle aux trois gestes rencontrés : celui du carnet, celui de Sarah, et celui du geste retourné si vous l'avez traité. Votre phrase les classe-t-elle tous les trois du bon côté ?

LA RÉVÉLATION AU PROCHAIN COURS

Vous venez de trier les gestes sûrs et les gestes traîtres à partir d'un tour raté. Reste à savoir pourquoi les gestes sûrs le sont, comment appeler deux équations qui ont exactement les mêmes solutions, et comment réparer le tour du magicien sans jamais diviser. Le prochain cours donne le mot, un symbole tout neuf, et la réparation.