



ACTIVITÉ · A1. LE CALCUL DU 30 MAI 1799

Deux moyennes lancées l'une après l'autre

FEUILLE DE ROUTE

	PHASE	TITRE	DURÉE
1.	EXPLORER	La machine à deux moyennes	
2.	CONJECTURER	Ce dont vous êtes sûrs	
3.	VALIDER	La conjecture qui tient quatre décimales	
4.	FORMALISER	Et au rang mille ?	

Ce travail n'est pas noté : votre première réponse, même fausse, est une donnée d'expérience.

▷ explorer · ◇ conjecturer · ✓ valider · □ formaliser

→ prépare COURS A1, § 5.2 · le théorème de la limite monotone

PHASE 1 · EXPLORER



La machine à deux moyennes

Le 30 mai 1799, à Brunswick, un jeune homme de vingt-deux ans ouvre son journal mathématique et y consigne une coïncidence numérique qu'il vient de vérifier **jusqu'à la onzième décimale**. Il ajoute que si l'on parvient un jour à la démontrer, *un champ entièrement nouveau de l'analyse sera certainement ouvert*. Il s'appelait Carl Friedrich Gauss, et il avait raison.

Vous allez refaire son calcul. Ce qu'il y a trouvé, vous ne le saurez qu'au cours.

Le procédé tient en une ligne. On part de deux nombres strictement positifs a_0 et b_0 , et on les remplace par leurs **deux** moyennes : la moyenne arithmétique d'un côté, la moyenne géométrique de l'autre. Puis on recommence, indéfiniment. Autrement dit, les deux suites (a_n) et (b_n) sont définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

▷ Lancez la machine sur $a_0 = 1$ et $b_0 = \sqrt{2}$, et faites-la tourner. Que se passe-t-il ?

Une calculatrice suffit. Affichez le maximum de décimales. Vous décidez vous-mêmes du nombre de tours nécessaires.

VOTRE RÉPONSE, SEUL(E) ET PAR ÉCRIT, AVANT TOUT ÉCHANGE

Ce que vous observez, et surtout : ces deux suites finissent-elles par se rejoindre ? Si oui, sauriez-vous *nommer* le nombre qu'elles atteignent ?

.....

.....

.....

La classe compte ensuite les réponses. Le tableau des positions est notre première donnée d'expérience : n'y retouchez pas.

PHASE 2 · CONJECTURER



Ce dont vous êtes sûrs

Trouvez un voisin, comparez vos écrans. Vous n'avez pas forcément vu la même chose, ni au même rang.

♦ **Écrivez tout ce dont vous êtes certains à propos de ces deux suites.** Pas ce que vous devinez : ce que vous êtes prêts à défendre.

Une remarque, pour vous aider à viser juste. Une affirmation du type « elles se rejoignent » est vérifiable ou réfutable ; une affirmation du type « elles se rapprochent vite » ne l'est pas tant que *vite* n'a pas été défini. Cherchez des énoncés du premier type.

VOTRE POSITION APRÈS DÉBAT, ET CE QUI L'A FAIT BOUGER, OU NON

.....

.....

Le professeur ne tranchera pas encore.

PHASE 3 · VALIDER



La conjecture qui tient quatre décimales

Marius a suivi le même chemin que vous. Après un tour de machine, il dispose de deux moyennes, et il propose ceci :

« *La limite, c'est la moyenne des deux moyennes que je viens d'obtenir : 1,198 156 948 ...* »

Sa proposition a un mérite considérable : elle est **compatible avec les quatre premières décimales** de tous les termes que la machine produit ensuite.

✓ **Marius a-t-il raison ?**

Si vous le réfutez, dites précisément à partir de quel rang et de quelle décimale sa proposition tombe. Si vous le confirmez, dites ce qui vous en rend certains. Et dans les deux cas, posez-vous la question qui compte vraiment : *combien de décimales concordantes faudrait-il pour que vous soyez convaincus ?*

Deux chantiers ouverts, à mener dans l'ordre que vous voudrez.

✓ Vous avez sans doute observé que, dès le premier tour, la moyenne arithmétique atteint ou dépasse la moyenne géométrique, et ne repasse jamais derrière. Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n \geq b_n.$$

Démontrez-le. ■♦ (Une piste, si vous butez : pour a et b deux réels strictement positifs, intéressez-vous à la quantité $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$.)

✓ **Le procédé résiste-t-il à tout ?** Cherchez des couples de départ qui le mettent en défaut, ou qui le rendent inintéressant. ♦★

PHASE 4 · FORMALISER



Et au rang mille ?

Vous avez calculé quelques termes. Trois, cinq, peut-être huit. Votre calculatrice affiche dix chiffres et s'arrête là.

□ **Qu'est-ce qui vous garantit que ces deux suites, au rang mille, ne se seront pas remises à s'écarter ?** Rédigez l'argument.

Vous n'avez le droit d'utiliser aucune valeur numérique : ni celles de votre écran, ni celles de vos voisins. Uniquement ce que vous savez de la *façon dont les deux suites sont fabriquées*.

Un avertissement, et il est sérieux : **relisez votre tout premier couple avant d'écrire quoi que ce soit**. Il ne se comporte pas comme les autres, et une propriété énoncée sans son rang de départ est une propriété fausse.

VOTRE ARGUMENT, ET LE NOM QUE VOUS DONNERIEZ À LA PROPRIÉTÉ QUI LE FAIT FONCTIONNER

.....

.....

LA RÉVÉLATION AU PROCHAIN COURS

Le nombre que vous venez de traquer existe, et vous avez presque démontré qu'il existe. Voici pourtant ce qu'il faut savoir : **aucune combinaison des deux nombres de départ par sommes, produits, quotients et racines ne peut le produire**. Il a bien une écriture, mais il a fallu sortir de l'algèbre élémentaire pour la trouver, et Gauss y a passé des années. Il sert aujourd'hui à calculer les décimales de π . Son nom, sa valeur, et la coïncidence du 30 mai 1799 : au prochain cours, section 5.