



ACTIVITÉ · A2. LES CHEMINS QUI COMPTENT

Un tableau de nombres bâti sans en connaître la règle

FEUILLE DE ROUTE

	PHASE	TITRE	DURÉE
1.	EXPLORER	Combien de trajets ?	⌚
2.	CONJECTURER	Le tableau qui se remplit tout seul	⌚
3.	VALIDER	Pourquoi la règle tient	⌚
4.	FORMALISER	Et jusqu'au coin lointain ?	⌚

Ce travail n'est pas noté : votre première réponse, même fausse, est une donnée d'expérience.

▷ explorer · ◇ conjecturer · ✓ valider · □ formaliser

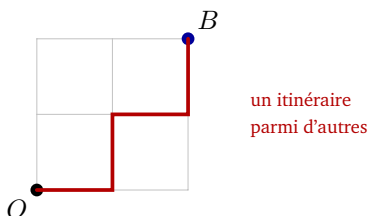
→ prépare COURS A2, § 6 · le triangle du chapitre et la relation qui l'engendre

PHASE 1 · EXPLORER



Combien de trajets ?

Une ville est quadrillée de rues qui se coupent à angle droit. Un coursier part du carrefour O , en bas à gauche, pour livrer au carrefour B . Il n'a pas de temps à perdre : il ne se déplace **que vers l'est (→) ou vers le nord (↑)**, jamais en arrière. Combien d'itinéraires différents peut-il emprunter ?



un itinéraire
parmi d'autres

▷ Combien d'itinéraires mènent de O à B sur ce quadrillage ? Trouvez-les tous.

Dessinez-les, ou codez-les : chaque trajet est une suite de mouvements, par exemple $\rightarrow \uparrow \rightarrow \uparrow$. Le vrai défi n'est pas d'en trouver quelques-uns, c'est d'être **certain de n'en avoir oublié aucun**.

VOTRE NOMBRE D'ITINÉRAIRES, ET L'ARGUMENT QUI VOUS GARANTIT QU'IL N'EN MANQUE PAS

.....

.....

.....

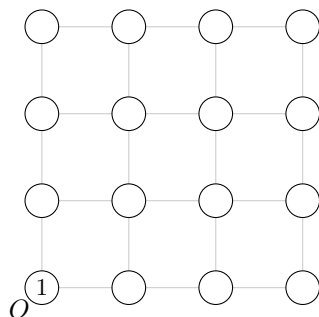
La classe compare ensuite les réponses. Les désaccords sont notre première donnée : n'effacez rien.

PHASE 2 · CONJECTURER



Le tableau qui se remplit tout seul

Recompter à la main pour chaque destination serait vite épuisant. Voici une autre idée, bien plus rapide. Sur *chaque* carrefour, écrivez le nombre d'itinéraires qui mènent de O jusqu'à *lui*. Le carrefour O en porte 1 (le trajet vide). Remplissez de proche en proche.



◇ Remplissez chaque carrefour, puis observez le tableau obtenu. Quelle règle relie le nombre d'un carrefour à ceux de ses voisins ?

Commencez par les carrefours du bord (ceux de la rangée du bas et de la colonne de gauche) : leur compte est facile. Les carrefours intérieurs se déduisent alors sans rien dessiner.

LA RÈGLE QUE VOUS LISEZ DANS LE TABLEAU, ÉNONCÉE AUSSI PRÉCISÉMENT QUE POSSIBLE

.....

.....

.....



Pourquoi la règle tient

Vous avez sans doute remarqué que le nombre d'un carrefour intérieur est la **somme** des nombres de deux carrefours voisins. Une règle qui se vérifie sur un tableau est une conjecture ; ce n'est pas encore un théorème.

✓ **Démontrez cette règle.** Pourquoi le nombre d'itinéraires menant à un carrefour intérieur est-il exactement la somme des nombres de ses deux voisins immédiats, celui de gauche et celui du dessous ?

Une piste, si vous butez : demandez-vous par quel *dernier* mouvement le coursier arrive sur ce carrefour. Il n'y a que deux possibilités, et elles ne se recouvrent jamais. Ce sont exactement les deux principes que le chapitre va nommer.

VOTRE DÉMONSTRATION DE LA RÈGLE

.....

.....

.....

.....

✓ Faites pivoter mentalement votre tableau d'un huitième de tour, de sorte que O soit en haut. Les carrefours s'organisent alors en **lignes** de plus en plus longues. Écrivez ces lignes, les unes sous les autres.

■ ♦ Cette forme vous rappelle-t-elle quelque chose ? Prolongez-la de trois lignes de plus, en n'utilisant que votre règle.

✓ **Combien vaut la somme de chaque ligne ?** Calculez-la pour les premières lignes, conjecturez, et si vous le pouvez, expliquez. ♦ ★



Et jusqu'au coin lointain ?

Votre tableau s'arrête au bord de la feuille. Mais la ville, elle, peut être immense.

□ **Sans dessiner ni prolonger le tableau, combien d'itinéraires mènent au carrefour situé à cinq rues à l'est et trois rues au nord de O ?** Cherchez une méthode qui donnerait la réponse pour *n'importe quel* carrefour, aussi lointain soit-il.

Un indice décisif se cache dans votre codage de la Phase 1. Un itinéraire vers ce carrefour est une suite de mouvements : combien de $\rightarrow$ contient-il ? combien de $\uparrow$? Et une fois ce total connu, de quoi décide-t-on vraiment quand on choisit un itinéraire ?

VOTRE MÉTHODE POUR PRÉDIRE LE COMPTE D'UN CARREFOUR LOINTAIN, ET LE NOM QUE VOUS DONNERIEZ AU TABLEAU TOUT ENTIER

.....

.....

.....

LA RÉVÉLATION AU PROCHAIN COURS

Le tableau que vous venez de bâtir à la main, carrefour par carrefour, porte un nom. Six, en réalité, selon les pays et les siècles, car il a été découvert sur trois continents bien avant qu'un certain Blaise Pascal ne lui consacre un traité en 1654. La règle d'addition que vous avez démontrée est l'une des démonstrations exigibles du chapitre, et le compte d'un carrefour lointain se calcule d'un trait, avec des factorielles, dès que l'on a compris ce que choisir un itinéraire veut dire. Le nom, la formule et l'histoire : au prochain cours, section 6.