



ACTIVITÉ · C1. LE DÉTOUR INTERDIT

Une réponse entière, un chemin impossible

FEUILLE DE ROUTE

	PHASE	TITRE	DURÉE
1.	EXPLORER	Le secret de del Ferro	
2.	CONJECTURER	La même méthode, une autre équation	
3.	VALIDER	La pensée sauvage	
4.	FORMALISER	Quand le détour est-il imposé ?	

Ce travail n'est pas noté : votre première réponse, même fausse, est une donnée d'expérience.

▷ explorer · ◇ conjecturer · ✓ valider · □ formaliser

→ prépare COURS C1, § 2 · ce qui a réellement forcé les mathématiciens à admettre un nouveau nombre

PHASE 1 · EXPLORER



Le secret de del Ferro

Vers 1515, à Bologne, Scipione del Ferro trouve comment résoudre toute une famille d'équations du troisième degré, celles de la forme $x^3 + px = q$ à coefficients positifs. Il n'en dit rien à personne : les mathématiciens italiens s'affrontent alors en défis publics, et une méthode que l'on est seul à connaître vaut une place. Le secret circule, se perd, se retrouve, et déclenche l'une des plus belles querelles de l'histoire des sciences. Vous, vous allez le retrouver en une heure, parce qu'on vous en donne la clé.

LA CLÉ · Pour tous $u \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}$, $(u + v)^3 = 3uv(u + v) + u^3 + v^3$.

L'idée de del Ferro tient en une phrase : *ne pas chercher x , mais chercher deux nombres dont x est la somme*. Posez $x = u + v$ et regardez ce que la clé vous dit de l'équation (E) : $x^3 = 6x + 6$.

▷ **Trouvez une solution de (E).**

VOTRE SOLUTION, ET LE CHEMIN QUI Y MÈNE

Format attendu : les deux conditions que vous imposez à u et v , l'équation du second degré qui en découle, puis la valeur de x .

.....

.....

.....

.....

.....

Auto-contrôle · reportez votre valeur de x dans (E), à la calculatrice, **sans jamais arrondir** : gardez l’affichage complet de la machine d’un bout à l’autre. Si les deux membres ne coïncident pas, c’est le chemin qu’il faut reprendre, pas la calculatrice.

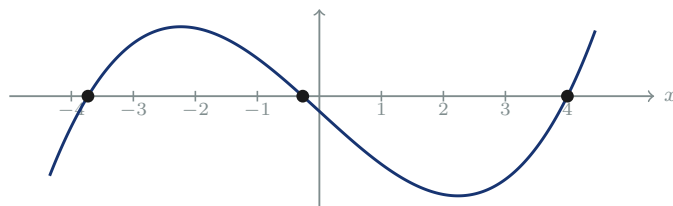
PHASE 2 · CONJECTURER



La même méthode, une autre équation

Vous tenez une méthode. Une méthode ne vaut que si elle résiste à un second essai : voici le second, $(F) : x^3 = 15x + 4$.

Deux faits, avant toute chose. Le premier est à établir : $x = 4$ **est solution de** (F) (vérifiez-le de tête). Le second vous est donné, et il se lit : voici la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 15x - 4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, qui coupe l’axe des abscisses **trois fois**.



Appliquez maintenant à (F) la méthode exacte de la phase 1, sans rien y changer.

◇ **Que produit-elle, et qu’en concluez-vous ?**

L’EXPRESSION OBTENUE, PUIS LES DEUX THÈSES, PUIS LA VÔTRE

Vous serez tour à tour les deux avocats. Rédigez d’abord le meilleur argument en faveur de « la méthode est fausse, la phase 1 était un coup de chance », puis le meilleur argument en faveur de « la méthode est juste, et c’est notre idée du possible qui est trop étroite ». Tranchez seulement après.

.....

.....

.....

.....

.....



La pensée sauvage

Dans les années 1550, l'ingénieur Rafael Bombelli affronte exactement votre situation. Beaucoup, dira-t-il, tiendront pour une pensée sauvage ce qu'il s'apprête à faire, et lui-même en a longtemps jugé ainsi avant de chercher jusqu'à trouver la preuve. Il décide de ne pas reculer, et pose la convention suivante.

LA CONVENTION DE BOMBELLI · On introduit un symbole $\sqrt{-1}$ et l'on calcule sur les écritures $a + b\sqrt{-1}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, avec les *seules* règles de l'addition, de la multiplication et de la division par un réel non nul (commutativité, associativité, distributivité), en remplaçant partout $(\sqrt{-1})^2$ par -1 .

UNE NOTATION, ET RIEN DE PLUS · pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > 0$, on *convient de noter* $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1}$. Ainsi $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$ et $\sqrt{-484} = 22\sqrt{-1}$. C'est une décision d'écriture, pas un théorème.

CE QUI N'EST PAS CONSERVÉ · la règle $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, valable pour les réels positifs, ne fait *pas* partie du marché. L'appliquer ici donnerait $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$, donc $1 = -1$. Elle est interdite de séjour, et la notation ci-dessus ne la rétablit pas : elle nomme un symbole, elle ne multiplie pas deux radicaux.

✓ **Développez $(2 + \sqrt{-1})^3$, puis $(2 - \sqrt{-1})^3$. Vérifiez ensuite que le couple formé par $2 + \sqrt{-1}$ et $2 - \sqrt{-1}$ satisfait, pour l'équation (F), la condition de la méthode qui porte sur le produit. Que vaut alors x ?**

VOS DEUX DÉVELOPPEMENTS, LA VÉRIFICATION DU PRODUIT, PUIS x

Auto-contrôle · la méthode impose *deux* conditions, et la clé n'autorise à conclure que si les deux sont vérifiées : un couple qui satisfait seulement celle sur la somme des cubes ne permet pas de conclure. Relisez ensuite ce que vous avez écrit à la fin de la phase 2 : le maintenez-vous ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Quand le détour est-il imposé ?

Reprenez la méthode dans le cas général, pour l'équation $x^3 = px + q$ où $p \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$. Elle conduit, vous l'avez vu deux fois, à une équation du second degré dont u^3 et v^3 sont les racines.

□ À quelle condition portant sur p et q la méthode exige-t-elle une racine carrée de nombre négatif ?

VOTRE CONDITION

Auto-contrôle · votre condition doit donner le bon verdict sur (E) et sur (F) , dont vous connaissez déjà le sort.

.....

.....

.....

□ Le détour a-t-il un rapport avec la nature des solutions ? Complétez le tableau, puis écrivez en une phrase le lien que vous conjecturez. Les racines réelles vous sont données : c'est la colonne du milieu que vous devez remplir.

ÉQUATION	VOTRE CONDITION	RACINES RÉELLES
$x^3 = 6x + 6$		une seule
$x^3 = 15x + 4$		trois, distinctes
$x^3 = 6x + 4$		trois, distinctes
$x^3 = 3x + 4$		une seule

VOTRE CONJECTURE, EN UNE PHRASE

.....

.....

LA RÉVÉLATION AU PROCHAIN COURS

Le nom de l'objet que Bombelli a osé écrire, le récit complet de la querelle qui a fait naître ces équations, et la question que cette activité laisse délibérément ouverte : ce détour par l'impossible, peut-on l'éviter ? Pour l'équation (F) , oui, et vous l'avez d'ailleurs évité dès la phase 2 en remarquant que 4 était solution. Mais il existe des équations du troisième degré, d'apparence tout aussi anodine, dont aucune formule à base de radicaux réels ne donnera jamais les solutions. Ce n'est pas une conjecture : c'est un théorème, il date de 1843, et il dit précisément lesquelles. Au prochain cours, sections 1 et 2.