



ACTIVITÉ • F1. LA MONTAGNE, DEUX FOIS

Une enquête en solitaire : papier, crayon, calculatrice

FEUILLE DE ROUTE

	PHASE	TITRE	DURÉE
1.	EXPLORER	Lundi, mardi	
2.	CONJECTURER	Le graphique qui décide	
3.	VALIDER	L'avocat du diable, c'est vous	
4.	FORMALISER	La chasse au zéro	

Ce travail n'est pas noté : votre première réponse, même fausse, est une donnée d'expérience.

▷ explorer · ◇ conjecturer · ✓ valider · □ formaliser

→ prépare COURS F1, § 5 ET 6 · la continuité et le théorème des valeurs intermédiaires

Cette enquête se mène seul, chez soi, en une petite heure. La règle du jeu est simple et non négociable : **à chaque phase, écrivez votre réponse avant de lire la phase suivante**, car la suite de la feuille travaillera parfois contre vous. Vos réponses écrites, justes ou fausses, sont la matière du prochain cours : rapportez-les.

PHASE 1 • EXPLORER



Lundi, mardi

Un casse-tête classique de la psychologie de la résolution de problème (Duncker, 1945), en version sentier de montagne.

Lundi, un randonneur part du refuge à 8 h et atteint le sommet à 18 h, par l'unique sentier. Il marche comme bon lui semble : pauses, sprints, flâneries, tout est permis. Mardi, il repart du sommet à 8 h et redescend au refuge par le même sentier, où il arrive à 18 h, de nouveau au rythme de son choix, sans aucun rapport avec celui de la veille.

▷ Existe-t-il forcément un point du sentier où le randonneur passe exactement à la même heure le lundi et le mardi ? Avant de trancher, cherchez sérieusement à répondre non : inventez des stratégies de marche (départs en trombe, longues pauses, crochets de rythme) qui éviteraient toute coïncidence.

VOTRE RÉPONSE, SEUL(E) ET PAR ÉCRIT, AVANT TOUT ÉCHANGE

Votre verdict (oui forcément / non évitable), et votre meilleure stratégie d'évitement ou votre meilleur argument d'inévitabilité.

.....

.....

.....

.....

PHASE 2 · CONJECTURER



Le graphique qui décide

Donnez maintenant au problème le seul laboratoire disponible à la maison : un repère. En abscisse, l'heure, de 8 à 18 ; en ordonnée, la position sur le sentier, du refuge (0) au sommet (S). Tracez sur le *même* repère une courbe possible pour lundi et une pour mardi, puis recommencez avec les allures les plus retorses de votre phase 1.

♦ **Que constatez-vous sur vos dessins, quelles que soient les allures choisies ? Traduisez-le en un énoncé général, d'abord sur deux courbes, puis, en considérant la fonction d définie par $d(t) = \text{position de lundi à l'heure } t - \text{position de mardi à l'heure } t$, en un énoncé sur une seule fonction : que valent les signes de $d(8)$ et $d(18)$, et que faut-il en conclure ? Rédigez votre conjecture sous la forme : « Si une fonction vérifie ..., alors elle s'annule. »**

VOTRE CONJECTURE, AVEC TOUTES SES HYPOTHÈSES

.....

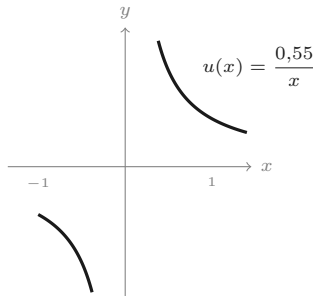
.....

.....

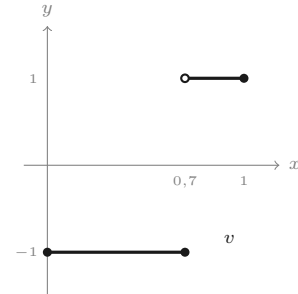


L'avocat du diable, c'est vous

Personne ne viendra contester votre conjecture ce soir : faites-le vous-même. Voici deux fonctions qui passent du négatif au positif et prétendent pourtant ne jamais valoir zéro.



u définie pour $x \neq 0$: $u(-1) < 0$ et $u(1) > 0$.



v définie sur tout $[0; 1]$: $v(x) = -1$ si $x \leq 0,7$, $v(x) = 1$ sinon.

✓ Ces deux traversées échappent au zéro par deux tours de passe-passe différents : nommez chacun. Pour chaque fonction, dites ce qu'elle raconterait du randonneur (quel exploit physique lui faudrait-il ?), et laquelle de vos hypothèses la disqualifie. Si votre conjecture de la phase 2 se fait transpercer, réparez-la.

VOTRE CONJECTURE RÉPARÉE, ET LES DEUX FAILLES NOMMÉES

.....

.....

.....



La chasse au zéro

Supposons votre conjecture réparée vraie, et prenons une fonction qu'elle protège :

$$\forall x \in [1; 2], \quad h(x) = x^3 + x - 3,$$

qui vérifie $h(1) = -1 < 0$ et $h(2) = 7 > 0$. Votre énoncé promet un zéro quelque part dans $[1; 2]$, mais il ne dit pas où.

□ ♦ À la calculatrice, en évaluant h le moins de fois possible, produisez un encadrement de ce zéro d'amplitude 0,25, puis 0,125. Décrivez votre stratégie en une phrase, et comptez : combien d'évaluations pour gagner une décimale de plus ? Auto-contrôle, sans corrigé : votre encadrement est bon si, et seulement si, h prend des signes opposés à ses deux bornes.

VOS ENCADREMENTS, VOTRE STRATÉGIE, VOTRE COMPTE D'ÉVALUATIONS

.....

.....

.....

★ *Défi bonus, à la maison au sens propre : une table carrée qui boite sur un sol irrégulier peut toujours être stabilisée en la faisant simplement pivoter sur place, sans rien caler. Essayez si vous en avez une sous la main. Quel rapport avec votre conjecture ? Apportez votre hypothèse.*

LA RÉVÉLATION AU PROCHAIN COURS

Le verdict du randonneur; le nom officiel de votre conjecture réparée (un théorème vieux de deux siècles, prouvé par un prêtre à qui l'on avait interdit de publier), le nom grec de votre stratégie de chasse, et pourquoi la table bancale se répare en tournant : au prochain cours, sections 5 et 6.