



ACTIVITÉ • F3. L'EXPOSANT CACHÉ

Multiplier sans multiplier : calculatrice, crayon, silence

FEUILLE DE ROUTE

	PHASE	TITRE
1.	EXPLORER	La table qui multiplie toute seule
2.	CONJECTURER	Inventer l'exposant de 3
3.	VALIDER	La règle survivra-t-elle ?
4.	FORMALISER	La fonction qui n'existait pas

Ce travail n'est pas noté : votre première réponse, même fausse, est une donnée d'expérience.

▷ explorer • ◇ conjecturer • ✓ valider • □ formaliser

→ prépare COURS F3, § 1, 2 ET 6 • l'exposant inventé, sa propriété fondamentale, et ce que cache la base 2

Cette enquête se mène seul, en classe ; la mise en commun a lieu en fin de séance. La règle du jeu ne change pas d'une activité de l'Atelier à l'autre, et reste non négociable : **à chaque phase, écrivez votre réponse avant de lire la phase suivante**. Vos réponses écrites, justes ou fausses, sont la matière première de la mise en commun : c'est leur confrontation qui fera le travail.

PHASE 1 • EXPLORER

La table qui multiplie toute seule

Voici la table complète des puissances de 2, de 2^0 à 2^{12} . En 1614, une table de ce genre, en beaucoup plus gros, a rendu son auteur célèbre dans toute l'Europe savante.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

▷ Cette table permet d'effectuer certaines multiplications sans jamais poser de multiplication. Effectuez ainsi 32×128 , puis 8×256 , et énoncez la règle générale en une phrase. Puis expliquez précisément pourquoi 3×5 , pourtant bien plus simple, résiste à la table.

VOS DEUX PRODUITS, VOTRE RÈGLE, ET LE DIAGNOSTIC DE LA PANNE

.....

.....

.....

PHASE 2 · CONJECTURER

Inventer l'exposant de 3

Le diagnostic tient en un mot : 3 n'est pas dans la colonne des 2^n . Mais votre calculatrice accepte des exposants que la table ignore : la touche puissance calcule $2^{1,5}$ sans protester, et trouve environ 2,83. Trop petit pour valoir 3, mais troublant : entre les barreaux entiers de l'échelle, il y a de la place.

◇ Existe-t-il un nombre t tel que $2^t = 3$? Traquez-le à la calculatrice jusqu'à l'encadrer à 10^{-3} près, et notez votre stratégie de chasse : comment choisissez-vous chaque nouvel essai, et quand décidez-vous qu'une décimale est acquise ? Puis capturez, plus vite si vous le pouvez, l'exposant de 5.

VOS DEUX EXPOSANTS, ET VOTRE STRATÉGIE EN DEUX PHRASES

.....

.....

.....

PHASE 3 · VALIDER

La règle survivra-t-elle ?

Votre table personnelle contient désormais treize exposants entiers et deux exposants inventés. La règle de la phase 1 a été énoncée pour des exposants entiers ; rien ne garantit qu'elle tolère vos inventions.

✓ **Sans aucune nouvelle chasse, prédisez les exposants de 6, de 9, de 10, de 15 et de 3×4096 , puis mettez chaque prédiction à l'épreuve de la calculatrice. Si une prédiction échoue, identifiez ce qui la fait échouer. Si toutes tiennent, rédigez deux phrases : ce que ces vérifications prouvent, et ce qu'elles ne prouvent pas encore.**

VOS CINQ PRÉDICTIONS, LEURS VERDICTS, ET VOS DEUX PHRASES

.....

.....

.....

.....

PHASE 4 · FORMALISER

La fonction qui n'existait pas

Il est temps de dire proprement ce que vous avez fabriqué. Pour tout nombre a qui en possède un, notez $E(a)$ l'« exposant de a », celui que votre chasse de la phase 2 sait capturer.

□ **Rédigez, en notation mathématique, la définition de $E(a)$: pour quels réels a ce nombre existe-t-il, et qu'est-ce qui vous convainc qu'il est unique ? Énoncez ensuite la propriété découverte en phase 3 comme une identité portant sur E . Auto-contrôle, sans corrigé : votre définition doit donner sans calcul les valeurs de $E(1)$, $E(2)$ et $E(1024)$, et interdire d'elle-même $E(0)$ et $E(-4)$.**

VOTRE DÉFINITION, VOTRE IDENTITÉ, ET LE VERDICT DE L'AUTO-CONTRÔLE

.....

.....

.....

.....

★ Défi : votre calculatrice possède une touche $\log$, qui n'est pas la touche $\ln$. Calculez $\log 2$, $\log 3$ et $\log 5$, et comparez à vos exposants $E(2) = 1$, $E(3)$, $E(5)$. Quelle relation exacte lie $\log a$ et $E(a)$? Que calcule donc cette touche, et qu'a-t-elle de commun avec votre fonction E ?

LA MISE EN COMMUN, EN FIN DE SÉANCE

Le nom officiel de votre fonction E et la raison pour laquelle la base 2 n'est qu'un choix parmi d'autres, le théorème du chapitre F1 qui garantit l'existence et l'unicité que votre chasse a constatées, l'identité de la phase 3 promue propriété fondamentale, et l'homme qui a passé sept ans à faire, pour trente mille nombres et à la plume, ce que vous venez de faire pour deux.