



« La géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses. »

— Jean Dieudonné (1906–1992)

Comment aborder cette activité ?

En première, vous avez appris à calculer le **produit scalaire** de deux vecteurs du plan. Dans cette activité, vous allez étendre cet outil à **l'espace**, en explorant un objet simple et familier : le **cube**.

Vous découvrirez que l'orthogonalité dans l'espace réserve des surprises : deux droites peuvent être **orthogonales sans se croiser** !

Ce travail **n'est pas noté**. L'objectif est de vous préparer au cours qui suivra.

Les phases de l'exploration

- ▷ **Explorer** – Manipuler, calculer, observer.
- ◇ **Conjecturer** – Formuler une hypothèse à partir de vos observations.
- ✓ **Valider** – Tester votre conjecture par le calcul.
- **Formaliser** – Ébaucher une démonstration (pour aller plus loin).

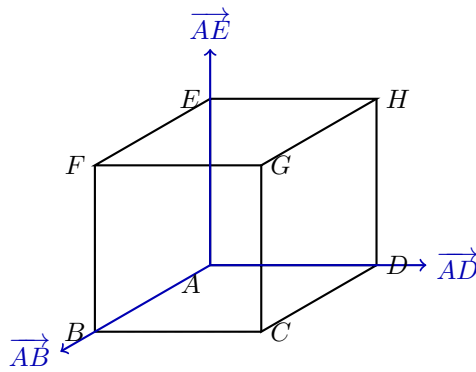
Objectif

À la fin de cette activité, vous saurez :

- Calculer le **produit scalaire** de deux vecteurs de l'espace avec des coordonnées.
- Reconnaître deux vecteurs **orthogonaux** (produit scalaire nul).
- Comprendre la différence entre **orthogonal** et **perpendiculaire** dans l'espace.
- Découvrir la notion de **vecteur normal** à un plan.
- Écrire l'**équation cartésienne** d'un plan à partir d'un vecteur normal.

Situation de départ

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1, placé dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



Rappel de première. Dans le plan, le produit scalaire de $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ vaut $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Extension naturelle à l'espace. On étend cette formule en ajoutant la troisième coordonnée :

$$\text{Si } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{ alors } \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Phase 1 – **Explorer** — Produits scalaires dans le cube

Vous allez calculer les coordonnées de plusieurs vecteurs du cube, puis leurs produits scalaires.

1. **Coordonnées des sommets.**

Compléter le tableau :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Coordonnées	(0;0;0)	(1;0;0)						

2. **Coordonnées de vecteurs.**

Compléter le tableau :

Vecteur	\vec{AB}	\vec{AD}	\vec{AE}	\vec{AC}	\vec{AG}	\vec{BD}	\vec{HF}
Coordonnées	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$						
Type	arête	arête	arête	diag. face	grande diag.	diag. face	?

3. ▷ **Tableau de produits scalaires.**

Calculer chaque produit scalaire et compléter le tableau :

\cdot	\vec{AB}	\vec{AD}	\vec{AE}	\vec{AC}	\vec{AG}	\vec{BD}	\vec{HF}
\vec{AB}	1						
\vec{AD}		1					
\vec{AE}							
\vec{AC}							
\vec{AG}							
\vec{BD}							
\vec{HF}							

4. ▷ **Observation.**

- Colorier en **vert** les cases où le produit scalaire vaut 0.
- Pour chaque paire de produit scalaire nul, vérifier géométriquement dans le cube : ces vecteurs semblent-ils perpendiculaires ?
- Que remarquez-vous pour la paire (\vec{AG}, \vec{BD}) ? Ces vecteurs sont-ils dans le même plan ?

Phase 2 – ◇ **Conjecturer** — De l'observation à la définition

Vous allez transformer vos observations en conjectures mathématiques.

5. ◇ À partir du tableau, compléter :

Conjecture 1 – Orthogonalité

Deux vecteurs de l'espace sont **orthogonaux** si et seulement si leur produit scalaire

6. ◇ **La surprise de l'espace.**

On considère les droites (AG) et (BD) .

- (a) D'après le tableau, \overrightarrow{AG} et \overrightarrow{BD} sont-ils orthogonaux ?
- (b) Les droites (AG) et (BD) sont-elles sécantes ? (La grande diagonale et la diagonale de face se croisent-elles ?)
- (c) Conclure :

Conjecture 2 – Orthogonal \neq perpendiculaire

Dans l'espace, deux droites **orthogonales** (vecteurs directeurs de produit scalaire nul) ne sont pas forcément

On dit **perpendiculaires** = orthogonales et

7. \diamond **Un vecteur spécial.**

On considère la face $ABCD$ (le « sol » du cube, c'est un plan).

- (a) Le vecteur $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il orthogonal à \overrightarrow{AB} ? à \overrightarrow{AD} ? à \overrightarrow{AC} ? à \overrightarrow{BD} ?

(b) Ces quatre vecteurs vivent tous dans le plan $ABCD$. Que constatez-vous ?

(c) Formuler :

Conjecture 3 – Vecteur normal

Le vecteur \overrightarrow{AE} semble être orthogonal à **tout** vecteur du plan $ABCD$.

On dira que \overrightarrow{AE} est un **vecteur normal** au plan $ABCD$.

Phase 3 – \checkmark **Valider** — Du vecteur normal à l'équation du plan

Vous allez découvrir comment un vecteur normal permet d'écrire l'équation d'un plan.

8. \checkmark **Équation du « sol ».**

Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de l'espace. On a $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE}$.

(b) Pour que M appartienne au plan $ABCD$, il faut que \overrightarrow{AM} soit orthogonal à \overrightarrow{AE} , donc que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$. Écrire cette condition :

(c) Vérifier : les sommets A, B, C, D satisfont-ils cette équation ? Et E, F, G, H ?

9. ✓ **Un plan plus compliqué.**

On considère maintenant le plan \mathcal{P} passant par $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$ et $E(0; 0; 1)$.

(a) Calculer $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$.

(b) On cherche un vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ normal à \mathcal{P} , c'est-à-dire tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.

Écrire le système de deux équations :

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \end{cases} \iff \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

(c) En fixant $a = 1$, déterminer b et c :

(d) Écrire l'équation du plan \mathcal{P} : $\overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0$, avec $M(x, y, z)$.

Développer : $\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = \dots\dots\dots$

L'équation du plan \mathcal{P} est : $\dots\dots\dots$

(e) Vérifier que B, D et E satisfont cette équation, mais pas A .

Phase 4 – **Formaliser** — Synthèse

Rassemblez vos découvertes.

10. Compléter les encadrés :

Résultat 1
 Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace sont **orthogonaux** si et seulement si :

Résultat 2

Un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ est **normal** à un plan \mathcal{P} si :

Résultat 3

Le plan passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a pour équation :

Bilan

Ce que j'ai découvert :

Résumez, avec vos propres mots, les trois idées principales de cette activité.

Ce qui me pose encore question :

Y a-t-il des points que vous n'avez pas compris ? Des questions que vous vous posez ?

Lien avec le cours

Cette activité prépare le chapitre G1 : Orthogonalité dans l'espace

En cours, nous démontrerons que :

- Le produit scalaire dans l'espace a les mêmes propriétés que dans le plan (bilinearité, symétrie).
- Pour montrer qu'un vecteur est normal à un plan, il suffit de vérifier l'orthogonalité avec **deux vecteurs non colinéaires** du plan (pas tous !).
- Tout plan de l'espace admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
- On peut calculer la **distance d'un point à un plan** grâce au vecteur normal.

Les conjectures que vous avez formulées seront **démontrées rigoureusement** en cours.

Pour aller plus loin — Le tétraèdre régulier

Défi (pour les plus curieux)

Dans le cube $ABCDEFGH$, on considère les quatre sommets A , C , F et H .

1. Vérifier que les six distances AC , AF , AH , CF , CH et FH sont toutes égales. Quelle est leur valeur ?
2. Le solide $ACFH$ est donc un **tétraèdre régulier** (toutes les faces sont des triangles équilatéraux). Calculer $\vec{AC} \cdot \vec{AF}$. En déduire l'angle \widehat{CAF} .
3. Cet angle est-il de 60° ? de 90° ? Qu'en pensez-vous ?
4. Déterminer l'équation du plan (ACF) .

Fin de l'activité

La suite au prochain cours !