



# COULISSES • A1. SUITES : LIMITES

*Ce que le chapitre a fait taire*

*Le cours a tenu sa promesse : il vous a donné un théorème d'existence et vous a laissés devant  $\pi^2/6$ . Mais il a beaucoup tu. Un manuscrit oublié six siècles contenait un second théorème, plus beau que le premier. Le mathématicien de l'épigraphe a publié un résultat faux et a mis trente-deux ans à l'admettre. Une série harmonique à qui l'on retire un chiffre se met à converger. Et la pile de briques du paragraphe 5 pouvait aller bien plus loin que ce qu'on vous a dit. Chaque pièce se lit seule, aucune n'est exigible, et toutes contiennent de vraies mathématiques.*

## Plan de la visite

|                                                          |    |
|----------------------------------------------------------|----|
| ARCHIVES • Oresme, l'autre théorème (7 min)              | 2  |
| ARCHIVES • Qui a inventé le epsilon (8 min)              | 3  |
| CONTRE-PIED • Le scandale des séries divergentes (7 min) | 4  |
| FRONTIÈRE • La constante qui résiste (6 min)             | 5  |
| CONTRE-PIED • La série harmonique dépouillée (6 min)     | 6  |
| CONTRE-PIED • Le porte-à-faux : la vraie réponse (6 min) | 7  |
| FRONTIÈRE • Après Bâle (7 min)                           | 8  |
| AUTRE CHEMIN • Pourquoi les décimales doublent (5 min)   | 9  |
| PASSERELLE • De la population au chaos (7 min)           | 10 |
| ARCHIVES • Brèves de coulisses (3 min)                   | 11 |

## Oresme, l'autre théorème

*Le cours lui a emprunté sa divergence. Il avait aussi, dans le même manuscrit, sommé une série que personne ne savait sommer.*

↔ prolonge COURS A1, § 5.3 · la divergence de la série harmonique

C'est que le cours vous a montré d'Oresme, c'est un tour de force de découpage : des paquets qui doublent, chacun pesant au moins un demi, et la série harmonique qui s'échappe vers l'infini. Ce résultat lui vaut sa place dans l'histoire. Mais dans le même traité, les *Questiones super geometriam Euclidis*, il fait quelque chose de plus difficile encore, et de bien moins connu. Il calcule la somme exacte d'une série qui n'est pas géométrique. Vers 1350, alors que le mot « limite » n'existe pas, que le symbole  $\sum$  n'existe pas, et que l'infini reste un sujet de dispute théologique.

La série est celle-ci :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \cdots = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n}.$$

Vous ne savez pas la sommer avec les outils du chapitre : ce n'est ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique, et la formule  $\frac{1}{1-q}$  ne s'applique pas. Oresme, lui, y arrive, et par un argument que vous pouvez suivre entièrement.

**Pour les curieux du fond.** L'idée : ranger les termes dans un tableau, puis le lire deux fois. Plaçons dans la colonne  $n$  exactement  $n$  cases valant chacune  $\frac{1}{2^n}$ . La colonne  $n$  pèse alors  $\frac{n}{2^n}$ , et le tableau entier pèse la somme cherchée.

|         | $n = 1$       | $n = 2$       | $n = 3$       | $n = 4$        | $\cdots$ | somme de la ligne |
|---------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------|-------------------|
| ligne 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\cdots$ | 1                 |
| ligne 2 |               | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$     |
| ligne 3 |               |               | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{4}$     |
| ligne 4 |               |               |               | $\frac{1}{16}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{8}$     |
| colonne | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{4}{16}$ | $\cdots$ |                   |

Lu par colonnes, le tableau vaut  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n}$  : c'est notre série. Lu par lignes, la ligne  $k$  contient les cases  $n \geq k$ , donc vaut

$$\sum_{n \geq k} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

(une géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ , celle-là même que le cours a sommée). Il ne reste qu'à additionner les lignes :

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

D'où  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} = 2$ . Tout le travail a consisté à **changer l'ordre de lecture** : ramener une série inconnue à des séries géométriques connues.

**N.B.** Ce réarrangement n'est pas gratuit : on ne peut permuter impunément les termes d'une somme infinie que si elle converge absolument, ce qui est automatique ici puisque tout est positif. Pour une série semi-convergente, c'est-à-dire convergente sans l'être absolument, changer l'ordre peut changer la somme, et même lui faire prendre n'importe quelle valeur réelle. Riemann l'a démontré vers 1853 ; le texte n'a paru qu'en 1867, après sa mort.

Le même Oresme, dans un autre traité, représente une grandeur qui varie en élevant au-dessus d'un segment une hauteur proportionnelle à son intensité, et affirme que la quantité totale se lit dans l'aire obtenue. Un repère, une courbe, une intégrale. Descartes naîtra dans deux cent quarante ans.

PIÈCE N° 12 · ARCHIVES

## Qui a inventé le epsilon

Le mathématicien de votre page de garde a publié un théorème faux, et il a fallu trente-deux ans pour qu'il le reconnaisse.

↔ prolonge COURS A1, § 2.2 · la définition de la limite et l'épigraphe de Cauchy

ON attribue volontiers le  $\varepsilon$  à Cauchy, et la page de garde de votre cours l'y invite. La réalité est plus disputée. Bolzano publie dès 1817 une définition qui ressemble beaucoup à la nôtre, dans un mémoire que presque personne ne lit. Cauchy fait paraître son *Cours d'analyse* en 1821, en français, sans un seul symbole : la limite y est une phrase. Et c'est Weierstrass, vers 1861, qui donne à Berlin la formulation purement logique que vous avez recopiée. Trois hommes, quarante-quatre ans, et une paternité que les historiens se disputent encore.

Mais l'anecdote intéressante n'est pas celle-là. Elle est que ce même *Cours d'analyse* de 1821 contient un théorème **faux**, énoncé et démontré par Cauchy avec le plus grand sérieux.

**Le théorème de 1821.** Si une série de fonctions continues converge, alors sa somme est une fonction continue.

C'est faux. En 1826, Abel le sait : il connaît des séries de Fourier qui convergent vers des fonctions discontinues. Il exhibe l'exemple suivant.

**Pour les curieux du fond.** Considérons, pour  $x$  réel, la somme

$$S(x) = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots$$

Chaque terme est une fonction continue, et on peut montrer que la série converge pour tout  $x$ .

Regardons ce qui se passe en  $x = \pi$ . Chaque terme vaut  $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi) = 0$ , puisque le sinus s'annule en tout multiple de  $\pi$ . La somme vaut donc  $S(\pi) = 0$ , sans discussion possible.

Or on démontre que, pour tout  $x \in ]-\pi; \pi[$ , cette somme vaut exactement  $\frac{x}{2}$ . Faisons alors tendre  $x$  vers  $\pi$  par la gauche :  $S(x) = \frac{x}{2}$  tend vers  $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$ .

La somme vaut 1,57 juste avant  $\pi$ , et 0 en  $\pi$ . Par imparité, la limite à droite vaut  $-\frac{\pi}{2}$  : la somme passe brutalement de  $\frac{\pi}{2}$  à  $-\frac{\pi}{2}$ , en prenant au passage la valeur médiane 0. Elle **saute**. Une série de fonctions continues, convergente partout, de somme discontinue : le théorème de Cauchy est mort.

Ce que Cauchy avait en tête, telle qu'on le relit aujourd'hui, c'est le théorème pour un mode de convergence plus exigeant, celui où le rang  $N$  de votre définition peut être choisi *une fois pour toutes*, valable pour tous

les  $x$  à la fois. On l'appelle aujourd'hui la convergence uniforme. En 1821, la distinction n'existait pas, et personne ne disposait du vocabulaire pour la formuler.

Cauchy reconnaît son erreur et publie l'énoncé correct en **1853**, trente-deux ans après. Sans employer le mot, qui n'existe toujours pas.

*Le fondateur de la rigueur en analyse a publié un théorème faux, et l'a corrigé lui-même trente-deux ans plus tard.*

**N.B.** Morale à l'usage des copies : le quantificateur  $\forall n \geq N$  de votre définition cache un piège. Selon que  $N$  dépend ou non des autres variables du problème, on obtient deux notions différentes. L'ordre des quantificateurs n'est jamais un détail de mise en page.

PIÈCE N° 13 · CONTRE-PIED

## Le scandale des séries divergentes

*Le cours a condamné le calcul de Grandi. Deux siècles plus tard, on lui a donné raison, mais pas pour les raisons qu'il croyait.*

↔ prolonge COURS A1, § 2.1 · la suite de Grandi et l'interdit sur les sommes divergentes

**N**E manipulez jamais une somme dont vous n'avez pas prouvé qu'elle converge : c'est ce que le cours vous a martelé, en prenant Grandi pour contre-exemple. Sa somme  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  oscille entre 1 et 0, elle n'a pas de limite, et le  $\frac{1}{2}$  qu'il en tirait était un abus. L'affaire semblait close. Elle ne l'était pas : au XIX<sup>e</sup> siècle, des mathématiciens sont revenus sur ce  $\frac{1}{2}$  et lui ont donné un sens parfaitement rigoureux.

L'idée est d'une simplicité désarmante. Les sommes partielles refusent de se stabiliser, soit. Mais que font leurs moyennes ?

**Pour les curieux du fond.** Notons  $s_n$  la  $n$ -ième somme partielle :  $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0$ , et ainsi de suite. Formons la moyenne des  $n$  premières :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}.$$

Calculons. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , les  $2k$  premières sommes partielles comptent exactement  $k$  uns et  $k$  zéros, donc  $\sigma_{2k} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$ . Et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , sur  $2k + 1$  termes il y a  $k + 1$  uns, donc  $\sigma_{2k+1} = \frac{k+1}{2k+1}$ . La suite des moyennes commence ainsi :

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{4}{7}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{9}, \quad \dots$$

Les termes de rang pair valent tous  $\frac{1}{2}$ . Ceux de rang impair valent  $\frac{k+1}{2k+1}$ , qui tend vers  $\frac{1}{2}$  (factorisez par  $k$  en haut et en bas). Les deux sous-suites convergent vers la même valeur, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$$

La suite des sommes partielles n'a pas de limite, mais **la suite de leurs moyennes en a une**, et elle

vaut  $\frac{1}{2}$ .

Ce procédé porte le nom de son auteur : la **sommation de Cesàro**, introduite en 1890. Elle prolonge la notion de limite sans la contredire, car on démontre que toute suite convergente a la même limite au sens de Cesàro. Grandi avait la bonne réponse et la mauvaise méthode.

L'histoire ne s'arrête pas là, et elle devient franchement dérangeante. D'autres procédés de régularisation, plus puissants encore, attribuent une valeur à des sommes bien plus violemment divergentes. Le plus célèbre :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \mapsto -\frac{1}{12}.$$

**N.B.** Lisez bien la flèche : ce n'est pas un signe égal. La somme des entiers ne vaut pas  $-\frac{1}{12}$ , elle diverge vers  $+\infty$ , et le cours a raison. Ce que dit cette écriture, c'est qu'une certaine procédure de régularisation, appliquée à cette série, produit le nombre  $-\frac{1}{12}$ .

Le plus troublant est que ce nombre absurde est *utile*. Il apparaît dans le calcul de l'énergie du vide entre deux plaques, dans sa version la plus simple : l'effet Casimir, une force attractive minuscule et bel et bien mesurée, dont le caractère attractif tient précisément à ce signe négatif. En théorie des cordes, la même régularisation impose  $\frac{D-2}{24} = 1$ , d'où  $D = 26$  dimensions. Des physiciens font des prédictions vérifiables avec une somme qui n'existe pas.

PIÈCE N° 14 · FRONTIÈRE

## La constante qui résiste

*Le théorème du chapitre suffit à prouver qu'elle existe. Trois siècles plus tard, on ne sait toujours pas si c'est une fraction.*

↔ prolonge COURS A1, § 5.4 · la lenteur de la divergence harmonique

**V**OUS avez laissé la série harmonique s'échapper vers l'infini, mais si lentement qu'aucune machine ne verra jamais ses sommes dépasser cent. Une note de marge du cours affirmait au passage que  $H_n - \ln n$  converge vers un nombre  $\gamma \approx 0,5772$ . Cette affirmation n'a pas été démontrée, et elle le mérite : sa preuve n'utilise **rien d'autre que le théorème central de votre chapitre**.

**Pour les curieux du fond.** Posons  $\delta_n = H_n - \ln n$  pour  $n \geq 1$ . Admettons l'encadrement suivant, qui se lit sur l'aire sous la courbe de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  : pour tout entier  $k \geq 1$ ,

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

**La suite est décroissante.** Calculons la différence de deux termes consécutifs :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \delta_{n+1} - \delta_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n).$$

L'inégalité de gauche ci-dessus donne exactement  $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n$ , donc cette différence est négative ou nulle :  $(\delta_n)$  est décroissante.

**La suite est minorée.** C'est l'inégalité de droite qui sert ici. Soit  $n \geq 2$ . Sommons-la pour  $k$  allant de 1

à  $n - 1$  : à gauche les logarithmes se télescopent et laissent  $\ln n$ , à droite on reconnaît  $H_{n-1}$ . D'où

$$\ln n \leq H_{n-1} \leq H_n, \quad \text{autrement dit} \quad \delta_n \geq 0.$$

Le cas  $n = 1$  est immédiat :  $\delta_1 = 1 \geq 0$ .

Décroissante et minorée : d'après le **théorème de la limite monotone**, la suite  $(\delta_n)$  converge. Sa limite est la constante d'Euler-Mascheroni, notée  $\gamma$ .

Vous venez de démontrer l'existence de  $\gamma$  sans en connaître une seule décimale. C'est exactement ce que le cours vous avait annoncé d'un théorème d'existence, et c'est ici que la frontière commence.

Car sur  $\gamma$ , on ne sait presque rien. On en connaît des milliards de décimales. On ignore toujours, en 2026, **si c'est un nombre rationnel**. La question est ouverte depuis Euler, qui l'a introduite en 1734.

**Ce que l'on sait quand même.** En 1997, Papanikolaou établit que si  $\gamma$  était une fraction, son dénominateur dépasserait  $10^{244663}$ . En 2009, Aptekarev démontre qu'au moins l'une des deux constantes  $\gamma$  et Euler-Gompertz est irrationnelle, sans pouvoir dire laquelle. En 2012, Rivoal montre qu'au moins l'une des deux est même transcendante. On resserre l'étau sur un couple, sans jamais atteindre l'individu.

**Bonus.**  $\pi$ ,  $e$  et  $\sqrt{2}$  sont irrationnels, et on le sait depuis longtemps.  $\gamma$  est le plus élémentaire des nombres de l'analyse dont le statut résiste encore. Pourquoi celui-là ? Personne n'a de bonne réponse.

PIÈCE N° 15 · CONTRE-PIED

## La série harmonique dépouillée

*Retirez de la série harmonique tous les termes qui contiennent le chiffre neuf. Elle se met à converger.*

↔ prolonge COURS A1, § 5.3 · la divergence de la série harmonique

**E**NLEVEZ de la somme  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  tous les termes dont le dénominateur contient le chiffre 9 quelque part dans son écriture décimale. Disparaissent donc  $\frac{1}{9}, \frac{1}{19}, \frac{1}{29}, \frac{1}{90}, \frac{1}{91}$ , et ainsi de suite. On retire une proportion de termes qui a l'air ridicule : sur les cent premiers entiers, on n'en enlève que dix-neuf. Le reste devrait continuer à diverger paisiblement.

Il converge. Le résultat est de Kempner, en 1914, et il porte un titre à la hauteur : *A Curious Convergent Series*.

**Pour les curieux du fond.** La preuve tient dans un décompte. Regroupons les entiers par nombre de chiffres et comptons ceux qui échappent au couperet.

Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ . Un entier à  $d$  chiffres sans aucun 9 : le premier chiffre est choisi parmi 1, 2, ..., 8, soit 8 possibilités ; chacun des  $d - 1$  suivants parmi 0, 1, ..., 8, soit 9 possibilités. Le paquet des entiers à  $d$  chiffres sans 9 contient donc

$$8 \times 9^{d-1} \text{ éléments.}$$

Or chacun de ces entiers vaut au moins  $10^{d-1}$ , donc son inverse vaut au plus  $\frac{1}{10^{d-1}}$ . Le paquet pèse ainsi au plus

$$\forall d \in \mathbb{N}^*, \quad 8 \times 9^{d-1} \times \frac{1}{10^{d-1}} = 8 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{d-1}.$$

Il ne reste qu'à sommer sur tous les paquets. C'est une géométrie de raison  $\frac{9}{10} < 1$  :

$$\sum_{d \geq 1} 8 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{d-1} = \frac{8}{1 - \frac{9}{10}} = 80.$$

La suite de ses sommes partielles est croissante (tous les termes sont positifs) et majorée par 80 : elle converge. Théorème de la limite monotone, une fois de plus.

Où est le tour de passe-passe ? Nulle part. L'intuition se trompe parce qu'elle regarde les petits nombres. La proportion des survivants à  $d$  chiffres vaut  $\frac{8 \times 9^{d-1}}{9 \times 10^{d-1}} = \frac{8}{9} \left(\frac{9}{10}\right)^{d-1}$  : encore 80 % à deux chiffres, 34 % à dix chiffres, moins de trois cent-millièmes à cent chiffres. Le couperet, doux au début, devient une hécatombe.

**N.B.** Le même argument fonctionne avec n'importe quel chiffre, et même avec n'importe quel bloc de chiffres. Retirez tous les termes dont le dénominateur contient la suite 2026 : la série converge encore. En 1916, Irwin va plus loin : autoriser un nombre fini de 9 laisse encore converger.

Kempner, lui, ne savait pas calculer la somme. Il l'avait seulement majorée par 90, avec un décompte plus grossier que le nôtre. Sa valeur exacte, 22,920 67 ..., n'a été obtenue qu'à la fin des années 1970 : la convergence est si lente qu'une sommation directe est sans espoir, et il a fallu inventer des méthodes détournées. Soixante ans entre la preuve et le nombre.

#### PIÈCE N° 16 · CONTRE-PIED

## Le porte-à-faux : la vraie réponse

*Le cours vous a imposé une brique par étage. En levant cette contrainte, on passe du logarithme à la racine cubique.*

↔ prolonge COURS A1, § 5.5 · le porte-à-faux de briques

**R**ETOURNONS sur la table du paragraphe 5. Le cours y a été honnête, mais restrictif : il a posé, en gras, que les briques étaient empilées *une seule par étage*. Sous cette contrainte, le porte-à-faux maximal vaut exactement  $\frac{1}{2} H_n$ , il n'est borné par rien, et il croît comme  $\frac{1}{2} \ln n$ . Retenez cette croissance logarithmique : c'est elle qui rend l'affaire si décevante en pratique, avec ses deux cent soixante-douze millions de briques pour dix longueurs.

Levons la contrainte. Rien n'interdit de poser deux briques côte à côte à un même étage, l'une servant de contrepoids à l'autre. La question devient : jusqu'où peut-on aller ?

Elle est restée ouverte jusqu'en 2006. Paterson et Zwick ont alors construit des empilements dits **paraboliques**, du nom de leur silhouette, qui atteignent un porte-à-faux d'ordre  $n^{1/3}$  : leur  $r$ -ième construction utilise environ  $\frac{2r^3}{3}$  briques pour un porte-à-faux de  $\frac{r}{2}$  longueurs. L'année suivante, avec Peres, Thorup et Winkler, ils ont démontré qu'on ne peut pas faire mieux *en ordre de grandeur* : le porte-à-faux est majoré par  $C n^{1/3}$ . Les piles paraboliques sont donc optimales à une constante multiplicative près ; la meilleure constante, elle, reste inconnue.

Un logarithme d'un côté, une racine cubique de l'autre. La différence est difficile à imaginer tant qu'on ne la chiffre pas :

| Porte-à-faux visé | Une brique par étage | Empilement parabolique |
|-------------------|----------------------|------------------------|
| 3 longueurs       | 227 briques          | 144 briques            |
| 5 longueurs       | 12 367 briques       | 667 briques            |
| 10 longueurs      | 272 400 600 briques  | 5 334 briques          |

À trois longueurs, les deux méthodes se valent presque. À dix, l'une demande une pile de la taille d'une ville, l'autre tient dans un garage.

**N.B.** *Le cours ne vous a pas menti : il a énoncé un résultat vrai, sous une hypothèse écrite noir sur blanc. C'est très exactement ce qu'on vous demande de faire dans une copie. Vérifier les hypothèses avant d'appliquer un théorème, c'est aussi savoir ce qu'il ne dit pas.*

PIÈCE N° 17 · FRONTIÈRE

## Après Bâle

*Euler a réglé toutes les puissances paires. Les impaires ont résisté deux siècles, et résistent encore.*

↔ prolonge COURS A1, § 5.6 ET CLÔTURE · le problème de Bâle et la réponse d'Euler

**G**RÂCE à Euler, vous connaissez la fin de l'histoire : la somme des inverses des carrés vaut  $\frac{\pi^2}{6}$ . Ce que le cours n'a pas dit, c'est qu'Euler ne s'est pas arrêté là. Il a réglé le cas des inverses des puissances *quatrièmes*, puis *sixièmes*, puis toutes les puissances paires, avec à chaque fois une puissance de  $\pi$  et un facteur rationnel :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \dots$$

Et les puissances impaires ? Rien. Pas de formule, pas de  $\pi$ , pas même la certitude que ces nombres ne sont pas des fractions. Deux cent quarante ans de silence.

**Pour les curieux du fond.** Voici l'argument d'Euler pour  $\frac{\pi^2}{6}$ , celui de 1735. Il est faux au sens où il n'est pas justifié, et il donne le bon résultat.

Euler part du développement de  $\sin x$  et écrit, pour  $x \neq 0$  :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots$$

Puis il ose ceci : un polynôme se factorise avec ses racines, donc traitons cette expression comme un polynôme infini. Ses racines sont les  $x$  annulant  $\sin x$  sans annuler  $x$ , c'est-à-dire  $\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$ . D'où la factorisation

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

Développons ce produit et regardons le coefficient de  $x^2$  : il vaut  $-\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots\right)$ . En l'identifiant au  $-\frac{1}{6}$  de la première ligne :

$$\frac{1}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}, \quad \text{donc} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$



Rien n'autorise à factoriser une série entière comme un polynôme, ni à développer un produit infini. Euler le savait, ses contemporains le lui ont reproché, et il lui a fallu dix ans pour donner une preuve défendable. L'audace d'abord, la rigueur ensuite : c'est souvent l'ordre réel des choses.

Le blocage cède le **22 juin 1978**, aux Journées arithmétiques de Marseille-Luminy. Roger Apéry, soixante et un ans, annonce que la somme des inverses des cubes est irrationnelle. Son exposé est un désastre de communication : des affirmations invraisemblables, sans démonstration, dans un ordre déconcertant. L'auditoire se divise entre incrédules et sceptiques. Deux mois plus tard, au Congrès international d'Helsinki, une exposition complète est présentée : tout était juste.

**Bonus.** Et ensuite ? La somme des inverses des puissances cinquièmes est toujours un mystère. On sait seulement, par un résultat de Zudilin, qu'au moins l'un des quatre nombres correspondant aux exposants 5, 7, 9 et 11 est irrationnel. Lequel ? Aucune idée.

PIÈCE N° 18 · AUTRE CHEMIN

## Pourquoi les décimales doublent

*Le cours l'a constaté dans un tableau. La raison tient en une ligne de calcul.*

↔ prolonge COURS A1, § 6.1 · la méthode de Héron

**E**N quatre itérations, la méthode de Héron passe de l'estimation grossière 1 à onze décimales exactes de  $\sqrt{2}$ . Le cours vous a montré le tableau et vous a laissés devant le constat : le nombre de décimales double à peu près à chaque tour. C'est spectaculaire, et cela ressemble à de la magie tant que l'on n'a pas écrit la ligne de calcul qui l'explique. La voici.

**Pour les curieux du fond.** Soient  $a > 0$  et  $u_0 > 0$ . Une récurrence immédiate donne  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , ce qui légitime les divisions qui suivent. Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\delta_n = u_n - \sqrt{a}$ . Partons de la relation  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right)$  et retranchons  $\sqrt{a}$  :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \delta_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right) - \sqrt{a} \\ &= \frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{2u_n} \\ &= \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}. \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \delta_{n+1} = \frac{\delta_n^2}{2u_n}$$

**L'erreur est élevée au carré à chaque étape.** Si elle vaut  $10^{-3}$ , elle passe à environ  $10^{-6}$ , puis  $10^{-12}$ . Comme le nombre de décimales exactes est l'ordre de grandeur de  $-\log_{10} \delta_n$ , il double effectivement à chaque tour.

Les erreurs réelles pour  $a = 2$  et  $u_0 = 1$  confirment le calcul à la virgule près. Seul  $\delta_0$  est négatif, puisque  $u_0 = 1$  est inférieur à  $\sqrt{2}$  :

| $n$          | 0                    | 1                    | 2                    | 3                    | 4                     |
|--------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| $ \delta_n $ | $4,1 \times 10^{-1}$ | $8,6 \times 10^{-2}$ | $2,5 \times 10^{-3}$ | $2,1 \times 10^{-6}$ | $1,6 \times 10^{-12}$ |

Au passage, la formule au carré explique aussi pourquoi  $\delta_{n+1}$  est toujours positif : à partir du rang 1, la suite de Héron approche  $\sqrt{a}$  par au-dessus, quelle que soit la valeur de départ strictement positive.

**N.B.** Héron n'est qu'un cas particulier. Appliquez la méthode de Newton à la fonction  $f(x) = x^2 - a$  : la formule  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  donne  $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$ , soit exactement  $\frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ . Les Babyloniens faisaient du Newton trente-trois siècles avant Newton.

PIÈCE N° 19 · PASSERELLE

## De la population au chaos

*Une récurrence à peine plus compliquée que celles du chapitre, et la prévision devient impossible.*

↔ prolonge COURS A1, § 4.6 ET § 6 · les modèles d'évolution et les suites récurrentes

**R**IEN ne pousse indéfiniment. En 1798, Malthus modélise une population par une suite géométrique  $u_{n+1} = (1+r)u_n$  et en tire une prophétie sinistre : la population croît géométriquement, les ressources arithmétiquement, la famine est mathématique. Le modèle a un défaut évident, que vous savez maintenant nommer : une géométrie de raison supérieure à 1 diverge, et aucune population réelle ne le fait.

Verhulst corrige en 1838, avec une équation à temps continu. Si la population approche la capacité maximale du milieu, la croissance doit s'étouffer. Sa version discrète, celle qu'on itère d'une génération à la suivante, s'écrit ainsi en notant  $u_n$  la proportion de cette capacité déjà occupée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \mu u_n (1 - u_n), \quad \text{avec } \mu > 0.$$

Le facteur  $u_n$  pousse à croître, le facteur  $(1 - u_n)$  freine à mesure qu'on sature. Rien de plus qu'un trinôme.

**N.B.** Le passage du continu au discret n'est pas anodin : l'équation différentielle de Verhulst, elle, converge sagement quelle que soit la valeur du paramètre. C'est la version itérée, celle que May popularise, qui ouvre la porte au chaos.

**Pour les curieux du fond.** Posons  $f : x \mapsto \mu x(1 - x)$  et cherchons vers quoi cette suite peut se stabiliser. Comme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (fonction polynôme), si  $u_n \rightarrow \ell$  alors le passage à la limite donne  $\ell = f(\ell)$ , c'est-à-dire  $\ell = \mu\ell(1 - \ell)$ , dont les solutions sont  $\ell = 0$  et  $\ell = 1 - \frac{1}{\mu}$ .

Reste à savoir si cette seconde valeur est *stable*, c'est-à-dire si la suite y revient quand on l'en écarte un peu. Le critère, que nous admettons, porte sur la dérivée de  $f$  au point fixe : il y a stabilité lorsque  $|f'(\ell)| < 1$ .

Calculons.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynôme, et  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mu - 2\mu x$ . Au point fixe :

$$f'\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = \mu - 2\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = \mu - 2\mu + 2 = 2 - \mu.$$

La condition  $|2 - \mu| < 1$  équivaut à  $1 < \mu < 3$ .

Ce 3 n'est pas un chiffre décoratif : c'est un mur. En deçà, et pour toute valeur de départ dans  $]0; 1[$ , la suite converge sagement vers  $1 - \frac{1}{\mu}$ , et vous sauriez le démontrer. Au-delà, le point fixe devient instable : la suite oscille entre deux valeurs, puis quatre, puis huit. Les doublements s'accumulent, et passé  $\mu \approx 3,5699$

la suite cesse en général d'être périodique. Le régime n'est pas uniforme pour autant : le diagramme est troué de **fenêtres** où la périodicité réapparaît brutalement, la plus visible en  $\mu = 1 + \sqrt{8} \approx 3,83$ . Deux départs différant de  $10^{-15}$  finissent par tout ignorer l'un de l'autre : c'est le chaos, au sens technique, et il sort d'un trinôme du second degré.

C'est le biologiste Robert May qui, en 1976, impose ce constat à la communauté scientifique dans un article au titre parfait : *Des modèles mathématiques simples avec des dynamiques très compliquées*.

**Bonus.** Feigenbaum a mesuré le rapport des écarts entre doublements successifs : il tend vers  $4,6692\dots$ , et l'on retrouve ce nombre dans quantité de systèmes sans aucun rapport avec celui-ci. Une constante universelle, découverte sur une calculatrice de poche en 1975.

PIÈCE N° 20 · ARCHIVES

## Brèves de coulisses

*Trois éclats du chapitre qui n'ont pas trouvé leur place, trop beaux pour être coupés.*

↔ prolonge COURS A1, § 5 ET CLÔTURE · la série harmonique et le problème de Bâle

**Le ver et l'élastique.** Un ver avance de 1 cm par seconde sur un élastique long de 1 km qui, à chaque seconde, s'allonge uniformément d'un kilomètre en entraînant le ver avec lui. Atteindra-t-il le bout ? Oui. Après une seconde il a couvert  $\frac{1}{100\,000}$  de l'élastique, après deux  $\frac{1}{100\,000} (1 + \frac{1}{2})$  : la fraction parcourue suit exactement la série harmonique, qui finit par dépasser 1. Il y faut environ  $e^{100\,000}$  secondes, incomparablement plus que l'âge de l'univers, mais le ver y arrive.

**Pourquoi « Bâle » ?** Le problème n'a pas été posé à Bâle : c'est l'Italien Mengoli qui l'énonce en 1644 et le publie en 1650. Il doit son nom à Jakob Bernoulli, bâlois, qui rassemble en 1689 le savoir de son époque sur les séries,

échoue publiquement sur celui-ci et lance un appel à l'aide resté célèbre. Un problème porte donc le nom de la ville de celui qui n'a pas su le résoudre ; c'est un élève de son frère, Euler, qui le réglera.

**Oresme contre Aristote.** Dans son commentaire du *Traité du ciel*, le même Oresme examine la thèse de la rotation de la Terre. Il montre qu'aucun argument avancé contre elle n'est concluant, les apparences étant identiques dans les deux cas. Puis il conclut qu'il croit néanmoins la Terre immobile, par foi. Près de deux siècles avant Copernic, un homme démonte les preuves et choisit de ne pas franchir le pas.

**Vrai ou légende ?** Le nombre  $0,999\dots$ , avec une infinité de 9, est strictement inférieur à 1.

*Faites votre pari. La réponse vous attend sur le compagnon numérique.*

LA SUITE DANS LES COULISSES NUMÉRIQUES

*Deux tiroirs restent ouverts sur le compagnon numérique : la réponse au Vrai ou légende, et le diagramme de bifurcation de la suite logistique.*