



COULISSES : A2. COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

L'envers du triangle

Le cours vous a donné deux principes, quatre modèles et un triangle découvert six fois. Mais il a beaucoup tu. Le triangle est en réalité plus vieux que Pascal de huit siècles, et il nous parvient parce que des disciples ont recopié des livres perdus. Un texte hébraïque sacré imprime depuis mille ans que six pierres bâtissent six cent vingt maisons, alors qu'elles en bâtissent sept cent vingt. Coloriez les nombres impairs du triangle : une fractale surgit, que les nombres connaissaient plus d'un demi-siècle avant les géomètres. Et le physicien qui a deviné le code de la vie ne l'a pas trouvé dans une éprouvette : il l'a compté. Chaque pièce se lit seule, aucune n'est exigible, et toutes contiennent de vraies mathématiques.

Plan de la visite

ARCHIVES · La nuit sanskrite (8 min)	2
ARCHIVES · Sauvé par citation (8 min)	3
CONTRE-PIED · Six cent vingt maisons (6 min)	4
AUTRE CHEMIN · La fractale cachée (9 min)	5
FRONTIÈRE · Quand compter devient impossible (9 min)	6
PASSERELLE · Le binôme, porte des complexes (10 min)	7
CONTRE-PIED · Rien qu'en comptant (7 min)	8
PASSERELLE · En lisant le ciel (6 min)	9
FRONTIÈRE · Le rêve de Babel (7 min)	9
ARCHIVES · Brèves de coulisses (3 min)	10

La nuit sanskrite

Le cours a fait commencer le triangle en Inde. Il n'a pas dit que la poésie sanskrite le portait déjà, ni que cette paternité fait débat depuis un siècle et demi.

↔ prolonge COURS A2, § 6 · la frise des six noms du triangle

DANS les derniers siècles avant notre ère, un grammairien nommé Pingala rédige un traité de métrique, le *Chandaḥśāstra*. Chaque syllabe d'un vers y est brève (*laghu*) ou longue (*guru*) : un mètre de n syllabes est donc un mot de n symboles à deux valeurs, exactement un mot binaire. Pingala donne un procédé, le *prastāra*, pour les énumérer tous, et une règle pour compter ceux qui ont un nombre donné de syllabes longues. Sans le savoir, il compte des combinaisons.

Pour les curieux du fond. Prenons un mètre de trois syllabes. Chaque syllabe est brève (·) ou longue (—), donc il y a $2^3 = 8$ mètres, que voici, rangés par nombre de syllabes longues :



Comptons chaque paquet : 1 mètre sans longue, 3 avec une, 3 avec deux, 1 avec trois. La ligne obtenue,

1, 3, 3, 1,

est la ligne $n = 3$ du triangle : ce sont les $\binom{3}{k}$. Et le total des paquets vaut $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$, la somme d'une ligne. La prosodie sanskrite manipulait donc, avant l'ère chrétienne, la relation $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$, incarnée dans des vers.

La disposition triangulaire elle-même, le *meru-prastāra* ou « escalier du mont Meru », du nom de la montagne cosmique de l'Inde, apparaît explicitement plus tard : chez Virahāṅka vers le VII^e siècle, puis dans le commentaire de Halāyudha, au X^e.

N.B. Attribuer le triangle à Pingala lui-même est un raccourci que les spécialistes se disputent. La chose repose sur la lecture d'un unique aphorisme obscur, *pare pūrṇam*, par son commentateur Halāyudha, mille ans plus tard. Le sanskritiste Albrecht Weber la rejetait dès 1863, et les érudits en débattent encore. Ce qui est solide, c'est le calcul des $\binom{n}{k}$ chez Pingala. La figure, elle, appartient à ses héritiers.

Sauvé par citation

Trois continents ont connu le triangle avant l'Europe. Deux fois au moins, il ne nous est parvenu que parce qu'un disciple avait recopié un livre aujourd'hui perdu.

↔ prolonge COURS A2, § 6 · la transmission du triangle avant Pascal

ÉNUMÉREZ les disparus. Vers l'an mille, à Bagdad, al-Karajī construit le triangle et la règle du binôme : son exposé est **perdu**, et nous ne le connaissons que parce qu'un successeur, al-Samaw'al, le recopie au XII^e siècle dans son *al-Bāhir*, en l'attribuant nommément à al-Karajī. En Chine, vers 1050, Jia Xian dresse le même tableau : ses livres sont **perdus**, mais Yang Hui les recopie et les crédite en 1261. Le triangle survit par citation.

Pour les curieux du fond. Ce que tous ont manipulé, c'est la règle de construction, celle que le cours appelle la relation de Pascal : chaque cellule est la somme des deux qui la surplombent. Elle suffit à engendrer tout le triangle sans jamais calculer une factorielle, et donc tous les coefficients du binôme. Vérifions sur $(a + b)^4$ en lisant la ligne $n = 4$:

$$1, \quad 4, \quad 6, \quad 4, \quad 1$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Chaque coefficient est bien un $\binom{4}{k}$, obtenu de proche en proche : $6 = \binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + 3$. C'est cette mécanique additive, et non la formule avec les factorielles, qui a voyagé de Bagdad à Hangzhou puis à Paris.

En 1303, un troisième Chinois, Zhu Shijie, grave le triangle dans son *Précieux miroir* et l'appelle déjà « la méthode ancienne ». En Europe, il s'imprime pour la première fois en 1527, non dans un traité savant mais en couverture d'une arithmétique *commerciale*, destinée aux marchands. Le triangle entre en Occident par la boutique.

N.B. Le nom « triangle de Pascal » est tardif et occidental : ce sont Montmort en 1708, puis de Moivre en 1730, qui le baptisent ainsi. Pascal, lui, n'a jamais revendiqué de priorité. Il a fait autre chose, que la pièce suivante ne dira pas mais que le cours a soulignée : il en a tiré l'une des premières récurrences de l'histoire.

Six cent vingt maisons

Un texte sacré imprime depuis des siècles une factorielle fausse. Le contre-pied : personne ne l'avait vérifiée, alors qu'une division suffit.

↔ prolonge COURS A2, § 4 · la factorielle et le *Sefer Yetsirah*

NUL texte n'échappe à ses copistes. Le cours a cité le *Sefer Yetsirah*, ce livre hébraïque de l'Antiquité tardive qui égrène les permutations des lettres : « deux pierres bâtissent deux maisons, trois pierres six maisons, quatre pierres vingt-quatre maisons, cinq pierres cent vingt maisons . . . » On reconnaît $2!$, $3!$, $4!$, $5!$. Le cours s'est arrêté là, et ce n'est pas un hasard : la ligne suivante recèle un piège.

Pour les curieux du fond. Les nombres du *Sefer Yetsirah* sont notoirement corrompus : d'une édition à l'autre, presque aucune ne concorde. Certaines portent même, pour six pierres, la valeur **620**. Or la factorielle de six vaut

$$6! = 6 \times 120 = 720,$$

et non 620. L'erreur se détecte sans même connaître $6!$: chaque terme de la suite est un multiple entier du précédent, puisque

$$\frac{n!}{(n-1)!} = n.$$

Le passage de $5!$ à $6!$ doit donc multiplier par 6 exactement :

$$\frac{720}{120} = 6 \quad (\text{juste}), \quad \frac{620}{120} = 5,1\bar{6} \quad (\text{impossible}).$$

Un facteur 6 ne peut pas donner 620. La suite des factorielles ne tolère aucun autre nombre que 720 à cette place.

La valeur fautive s'est pourtant transmise pendant des siècles, recopiée avec révérence, jamais recalculée. C'est le revers de la pièce précédente : la transmission par copie sauve les textes, mais elle fige aussi leurs erreurs. Un mot mal lu traverse mille ans intact.

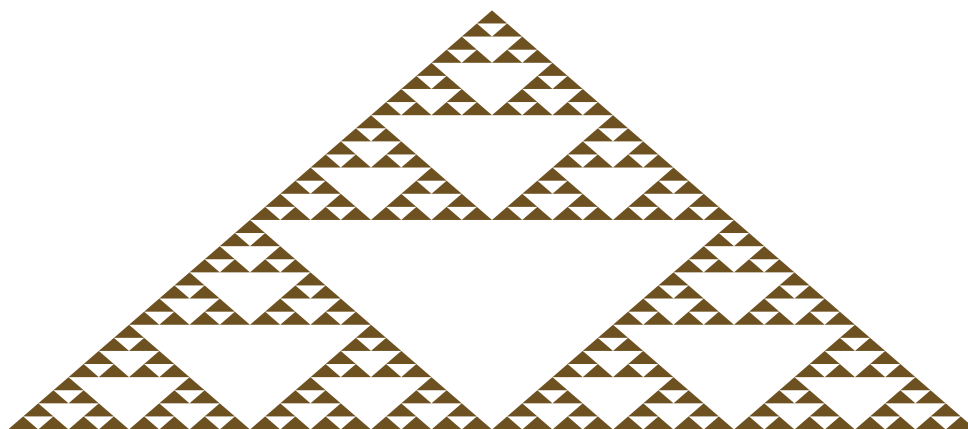
N.B. La suite se poursuit correctement au-delà : sept pierres, $5040 = 7!$, puis le texte renonce et conclut : « à partir d'ici, va et calcule ce que la bouche ne peut dire ni l'oreille entendre. » L'infaisable, pour l'auteur, n'est pas le nombre : c'est de le prononcer. Réciter les 40 320 permutations de huit lettres reviendrait à énoncer plus de trois cent mille signes.

La fractale cachée

Le cours a promis qu'en coloriant les nombres impairs du triangle, une fractale surgit. Voici pourquoi, et pourquoi les nombres la connaissent avant les géomètres.

↔ prolonge COURS A2, § 6 · la coloration de la parité du triangle

On colorie en noir chaque cellule impaire du triangle, en blanc chaque cellule paire. À mesure que les lignes s'accroissent, un motif apparaît : de grands triangles blancs emboîtés dans des triangles noirs, à toutes les échelles. C'est le **triangle de Sierpiński**, l'une des fractales les plus célèbres. Le miracle n'est pas qu'il apparaisse ; c'est que sa présence était *prévisible*, par pure arithmétique, plus d'un demi-siècle avant que Sierpiński ne le dessine en 1915.



Les trente-deux premières lignes du triangle : cellule impaire noircie, cellule paire laissée en blanc. La fractale n'est pas dessinée, elle est calculée.

Pour les curieux du fond. La clé est un critère de parité dû à Édouard Lucas (1878). Écrivons n et k en base 2. Alors

$$\binom{n}{k} \text{ est impair} \iff \text{chaque 1 de } k \text{ (en binaire) fait face à un 1 de } n.$$

Autrement dit, l'écriture binaire de k doit être « incluse » dans celle de n . Vérifions sur la ligne $n = 4$, dont l'écriture binaire est 100. Les k dont le binaire est inclus dans 100 sont $k = 0$ (000) et $k = 4$ (100), et eux seuls. On doit donc trouver des nombres impairs exactement en position 0 et 4 :

$$\binom{4}{k} : 1, 4, 6, 4, 1 \rightarrow \text{parités } 1, 0, 0, 0, 1.$$

Impair aux deux bouts, pair au milieu : exactement la prédiction. Mieux, le nombre de cellules impaires de la ligne n vaut $2^{s(n)}$, où $s(n)$ est le nombre de 1 dans l'écriture binaire de n (Glaisher, 1899). Les puissances de deux qui structurent la fractale sont écrites dans les nombres eux-mêmes.

L'outil de fond est encore plus ancien : dès 1852, Kummer savait que la puissance d'un nombre premier p divisant $\binom{n}{k}$ est le nombre de retenues quand on additionne k et $n - k$ en base p . Pour $p = 2$, aucune retenue signifie coefficient impair. La fractale était donc encodée dans une propriété de la division bien avant d'avoir un nom géométrique.

Les nombres savaient qu'ils formaient une fractale plus d'un demi-siècle avant qu'on ne lui donne un nom.

PIÈCE N° 25 · FRONTIÈRE

Quand compter devient impossible

Le cours a fini sur l'explosion combinatoire. Elle n'est pas qu'une jolie image : c'est l'une des grandes questions ouvertes de l'informatique.

↔ prolonge COURS A2, § 7 · l'explosion combinatoire et la machine

MILLE milliards de milliards de trajets. Le cours a évoqué le voyageur de commerce : n villes à visiter, un circuit fermé à optimiser, et $\frac{(n-1)!}{2}$ tournées distinctes à comparer. La factorielle rend le problème monstrueux presque immédiatement.

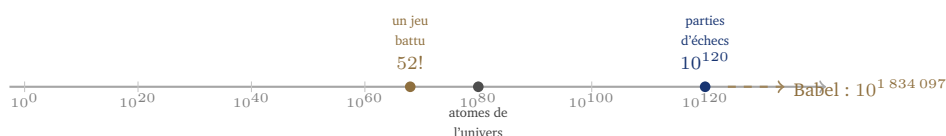
Pour les curieux du fond. Comptons les circuits selon le nombre de villes :

n	$\frac{(n-1)!}{2}$	ordre de grandeur
10	181 440	10^5
20	60 822 550 204 416 000	6×10^{16}
30	$\approx 4,4 \times 10^{30}$	10^{30}

Passer de dix à trente villes multiplie le nombre de trajets par 10^{25} . Un ordinateur examinant un milliard de circuits par seconde mettrait, pour trente villes, bien plus que l'âge de l'univers. L'énumération est morte : aucune machine ne parcourra jamais ces listes une à une.

On pourrait espérer une astuce, une formule qui donnerait le meilleur circuit sans tout essayer. Personne n'en connaît, et surtout, personne ne sait si elle existe. Le voyageur de commerce appartient à la classe des problèmes dits **NP**, ceux dont une solution proposée se *vérifie* vite mais dont on ne sait pas si elle se *trouve* vite. Savoir si ces deux choses reviennent au même, c'est la question « P contre NP », dotée d'un prix d'un million de dollars, et toujours ouverte.

Bonus. Le vertige a une échelle. Le jeu de 52 cartes battu compte $52! \approx 8 \times 10^{67}$ ordres ; l'univers observable, environ 10^{80} atomes ; l'arbre des parties d'échecs, estimé par Shannon en 1950, près de 10^{120} parties possibles. Le dénombrement fabrique sans effort des nombres que l'univers entier ne pourrait pas stocker.



L'échelle de l'exposant : chaque graduation multiplie déjà par cent. La Bibliothèque de Babel est si loin qu'il faudrait prolonger cette ligne sur des kilomètres.

Le binôme, porte des complexes

Le cours a réservé la formule du binôme au parcours Excellence. La voici démontrée, avec ses deux retombées, et un pont direct vers les maths expertes.

↔ prolonge COURS A2, § 6 · le binôme de Newton, balisé parcours X

BINÔME : le mot fait peur, la formule est limpide, et sa démonstration ne mobilise que le cours. Elle affirme, pour tous nombres a et b et tout entier n ,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Pour les curieux du fond. Développons le produit de n facteurs identiques :

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b) \cdots (a + b)}_{n \text{ facteurs}}.$$

En distribuant tout, chaque terme du développement se fabrique en choisissant a ou b dans chacun des n facteurs. Un terme vaut $a^k b^{n-k}$ précisément quand on a choisi a dans exactement k facteurs. Or le nombre de façons de désigner ces k facteurs parmi n est $\binom{n}{k}$. En regroupant les termes identiques, le coefficient de $a^k b^{n-k}$ est donc $\binom{n}{k}$. La formule n'est rien d'autre qu'un dénombrement de choix.

Deux cas particuliers valent le détour. En posant $a = b = 1$, on retrouve la somme d'une ligne du cours :

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

En posant $a = -1$ et $b = 1$, la somme *alternée* des coefficients s'annule :

$$0 = (-1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \quad (n \geq 1).$$

Pour les curieux du fond. Le binôme est aussi la porte des nombres complexes, que vous croiserez en maths expertes. Calculons $(1 + i)^4$ en développant, avec $i^2 = -1$:

$$(1 + i)^4 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1}i + \binom{4}{2}i^2 + \binom{4}{3}i^3 + \binom{4}{4}i^4.$$

En remplaçant les coefficients par la ligne 1, 4, 6, 4, 1 et les puissances de i par 1, i , -1 , $-i$, 1 :

$$(1 + i)^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = \boxed{-4}.$$

Le triangle de Pascal calcule dans le plan complexe aussi naturellement que sur la droite réelle.

N.B. Ces mêmes coefficients vous reviendront dès cette année, mais habillés autrement. Dans le chapitre sur la loi binomiale, $\binom{n}{k}$ comptera les façons d'obtenir k succès en n épreuves. Ici, dépouillé de toute probabilité, il ne compte que des choix. C'est le même nombre, vu deux

fois.

PIÈCE N° 27 · CONTRE-PIED

Rien qu'en comptant

On imagine que le code génétique fut arraché à la nature par l'expérience. Un physicien l'avait deviné avant, par un simple argument de dénombrement.

↔ prolonge COURS A2, § 1 · le code génétique et le principe multiplicatif

R IEN qu'en comptant, on peut parfois contraindre le vivant. En 1954, le physicien George Gamow s'attaque à une énigme : comment quatre bases d'ADN, notées *A*, *T*, *G*, *C*, peuvent-elles coder les vingt acides aminés qui composent les protéines ? Sa réponse ne doit rien à la biologie, tout à l'arithmétique.

Pour les curieux du fond. La question est : combien de bases faut-il par « mot » pour disposer d'au moins vingt combinaisons ?

Mots de 2 bases : $4^2 = 16 < 20$ (insuffisant),

Mots de 3 bases : $4^3 = 64 \geq 20$ (suffisant).

Un code à doublets ne peut pas nommer vingt acides aminés : seize étiquettes pour vingt objets, c'est mathématiquement impossible. Il faut donc au moins des triplets, et trois bases en offrent largement assez. Le vivant *doit* lire son code par groupes de trois. Gamow le savait avant toute expérience.

L'histoire a une morale double. Le modèle précis que Gamow proposait ensuite, un code astucieux où les triplets se chevauchaient, était **faux** : un argument de comptage de Brenner, en 1957, l'a réfuté. Mais le cœur de son raisonnement, le dénombrement $16 < 20 \leq 64$, était juste et imparable. Quand Nirenberg et Matthaei déchiffrent le premier codon en 1961, ils confirment ce que le comptage avait imposé sept ans plus tôt : la nature lit bien par triplets, avec ses 64 codons pour 20 acides aminés et trois signaux d'arrêt.

N.B. Les 64 codons pour 20 acides aminés ne forment pas une correspondance une à une : plusieurs codons désignent le même acide, et trois servent de ponctuation. Le dénombrement ne dit pas comment la nature répartit ses étiquettes, seulement qu'elle en a assez. Compter fixe le cadre, sans remplir le tableau.

En lisant le ciel

Le cours a compté les parties d'un ensemble. Un savant du XII^e siècle le faisait déjà, en dénombrant les conjonctions des astres.

↔ prolonge COURS A2, § 3 · le nombre de parties d'un ensemble

EN lisant le ciel, on peut faire de la combinatoire. Au XII^e siècle, le savant Abraham Ibn Ezra, dans son *Livre du Monde*, se pose une question d'astrologie : de combien de façons les sept « planètes » connues des Anciens peuvent-elles se rencontrer dans le ciel ? Une conjonction met en jeu deux astres au moins ; il faut donc compter les parties d'au moins deux éléments d'un ensemble de sept.

Pour les curieux du fond. Le cours donne l'outil. Le nombre total de parties d'un ensemble de sept astres est $2^7 = 128$. Il suffit d'en retirer celles qui n'intéressent pas l'astrologue : la partie vide (aucun astre) et les sept singletons (un seul astre, pas de rencontre). Par le principe additif,

$$\sum_{k=2}^7 \binom{7}{k} = 2^7 - \binom{7}{0} - \binom{7}{1} = 128 - 1 - 7 = \boxed{120}.$$

On peut vérifier en additionnant les termes un à un :

$$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 120.$$

Cent vingt conjonctions possibles, obtenues d'un trait par la somme d'une ligne du triangle.

Le nombre 120 prend chez Ibn Ezra une résonance mystique, mais le geste est purement mathématique : c'est un dénombrement de sous-ensembles, lu dans les étoiles. Huit siècles avant que le cours ne l'écrive, la formule 2^n servait déjà à sonder le ciel.

Le rêve de Babel

Un écrivain a imaginé la bibliothèque de tous les livres possibles. Son dénombrement dépasse tout ce que l'univers pourrait contenir, et pourtant il est exact.

↔ prolonge COURS A2, § 7 · le dénombrement des k -uplets

RÉVONS un instant à la Bibliothèque de Babel, imaginée par Jorge Luis Borges en 1941. Elle contient tous les livres possibles : chaque volume compte quatre cent dix pages, chaque page quarante lignes, chaque ligne quatre-vingts caractères, tirés d'un alphabet de vingt-cinq symboles. Combien de livres différents ? La question est un pur dénombrement de k -uplets.

Pour les curieux du fond. Chaque livre est une suite de

$$410 \times 40 \times 80 = 1\,312\,000$$

signes, chacun choisi parmi 25. Par le principe multiplicatif, le nombre de livres est

$$25^{1\,312\,000}.$$

Sa taille se lit par son logarithme décimal :

$$\log_{10}(25^{1\,312\,000}) = 1\,312\,000 \times \log_{10} 25 \approx 1\,834\,097.$$

La bibliothèque contient donc environ $10^{1\,834\,097}$ livres. À comparer aux 10^{80} atomes de l'univers : le nombre de livres possibles écrase de plus d'un million huit cent mille ordres de grandeur tout ce que le cosmos pourrait contenir.

Cette bibliothèque, écrit Borges, contient tout : la démonstration exacte de chaque théorème, mais aussi sa réfutation fautive, votre biographie et toutes ses variantes erronées, et l'index fidèle de tous les livres avec l'index de tous les index faux. Le dénombrement d'un simple k -uplet ouvre un abîme littéraire, où la vérité existe, noyée dans un océan de mensonges plausibles.

PIÈCE N° 30 · ARCHIVES

Brèves de coulisses

Trois éclats du chapitre qui n'ont pas trouvé leur place, trop beaux pour être coupés.

Le mélange jamais vu. Battez soigneusement un jeu de cinquante-deux cartes. L'ordre obtenu n'a, selon toute vraisemblance, jamais existé et n'existera jamais plus. Le nombre d'ordres est $52! \approx 8 \times 10^{67}$. Or, même si chacun des cent milliards d'humains ayant vécu avait battu un jeu une fois par seconde depuis le Big Bang, cela ne ferait qu'environ 10^{29} battages, soit environ 10^{39} fois moins. Le calcul ne dit aucune probabilité : il compare seulement deux grandeurs, et l'une écrase l'autre.

Le braille et l'armée. La cellule de six points de Louis Braille, avec ses $2^6 = 64$ configurations, dérive d'une écriture à douze points due à Charles Barbier. On répète partout que Barbier l'avait conçue pour que les soldats

de Napoléon communiquent la nuit sans lumière. L'anecdote est belle, mais des historiens récents la contestent : à prendre au conditionnel. Ce qui est sûr, c'est que Braille, à quinze ans, a coupé la cellule en deux.

Combinatoire, le mot. Le nom de la discipline vient du titre d'un ouvrage de jeunesse de Leibniz, la *Dissertatio de arte combinatoria*, publiée en 1666 alors qu'il avait une vingtaine d'années. Leibniz n'a pas inventé l'idée, héritée du *Ars Magna* de Ramon Llull vers 1300 ; il l'a mathématisée et lui a donné son nom moderne, en rêvant déjà d'un « alphabet des pensées » qui ramènerait le raisonnement au calcul.

Vrai ou légende ? Le triangle arithmétique a été inventé par Blaise Pascal.

Faites votre pari. La réponse vous attend sur le compagnon numérique.

LA SUITE DANS LES COULISSES NUMÉRIQUES

Trois tiroirs restent ouverts sur le compagnon numérique : la réponse au Vrai ou légende, la frise interactive des six noms du triangle, et le coloriage animé de sa parité vers la fractale de Sierpiński.

COULISSES N° 3 · ANNÉE 2026-2027