



# COULISSES • C1. LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

*Le dictionnaire du mépris*

---

*Le cours vous a raconté une histoire propre : un besoin, un objet, une théorie. Il a dû laisser dans la marge tout le reste. Un duel dans une église de Milan et cinq destins fracassés, un ingénieur qui compte des racines qu'il ne comprend pas, une phrase de Descartes que l'on cite depuis quatre siècles sans l'avoir lue, un arpenteur norvégien oublié pendant quatre-vingt-dix-huit ans, un mur en dimension trois que trois entiers suffisent à démontrer, et la plus célèbre image des mathématiques modernes, engendrée par la seule multiplication apprise au paragraphe 4. Chaque pièce se lit seule, dans l'ordre qui vous plaira ; aucune n'est exigible, toutes sont faites pour être racontées à table.*

## Plan de la visite

|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| ARCHIVES • Milan, 10 août 1548 (9 min)                         | 2  |
| AUTRE CHEMIN • En 1629, un ingénieur compte (8 min)            | 3  |
| ARCHIVES • Prenez <i>La Géométrie</i> (8 min)                  | 5  |
| CONTRE-PIED • Rien, dans le nom de « plan d'Argand » (9 min)   | 6  |
| FRONTIÈRE • Il n'existe aucune identité à trois carrés (9 min) | 8  |
| PASSERELLE • Suivez un point (8 min)                           | 10 |
| ARCHIVES • Brèves de coulisses (4 min)                         | 11 |

---

## Milan, 10 août 1548

*Le cours vous a dit en une ligne que Tartaglia y perdit sa réputation. Voici ce qu'était vraiment un défi public, ce qu'il en coûta aux cinq hommes du secret, et le calcul qu'ils se disputaient.*

↔ prolonge COURS C1, § 2.1 · la boîte historique Bologne, Venise, Milan

MILAN, le 10 août 1548, dans l'église Santa Maria del Giardino. L'assistance est nombreuse et choisie ; le gouverneur de la ville, Ferrante Gonzaga, préside en personne. Au centre, deux hommes que tout oppose. D'un côté Niccolò Tartaglia, quarante-huit ans, autodidacte, professeur à Venise, célèbre dans toute l'Italie. De l'autre Ludovico Ferrari, vingt-six ans, entré chez Cardan comme domestique et devenu son élève le plus brillant. Ce n'est pas un séminaire : c'est un tournoi, avec juge, public et enjeu.

Un défi mathématique de la Renaissance obéit à des règles précises. Chaque adversaire dépose chez un notaire une liste de problèmes, généralement une trentaine, accompagnée d'une somme d'argent. Un délai est fixé. Celui qui résout le plus de problèmes emporte la mise et, ce qui compte bien davantage, la réputation qui décide de l'attribution des chaires. Une méthode que l'on est seul à connaître n'est donc pas un savoir : c'est un capital, et l'on comprend que del Ferro l'ait gardée pour lui jusqu'à son lit de mort, et que le secret ait tenu trente ans avant d'être imprimé.

C'est précisément ce qui avait perdu Fior treize ans plus tôt. Fior avait hérité de del Ferro un seul type d'équation, celles de la forme  $x^3 + px = q$  ; Tartaglia les résolvait toutes. Mais pourquoi *plusieurs types*, là où nous n'écrivons aujourd'hui qu'une seule équation ? Parce que les coefficients négatifs n'existaient pas encore. Faute de pouvoir écrire  $-p$ , il fallait distinguer  $x^3 + px = q$ ,  $x^3 = px + q$ ,  $x^3 + q = px$ , et ainsi de suite. Le mépris pour les nombres négatifs, que le cours vous a montré à l'œuvre chez Descartes et chez De Morgan, avait un coût très concret : il multipliait par treize le nombre de cas à traiter.

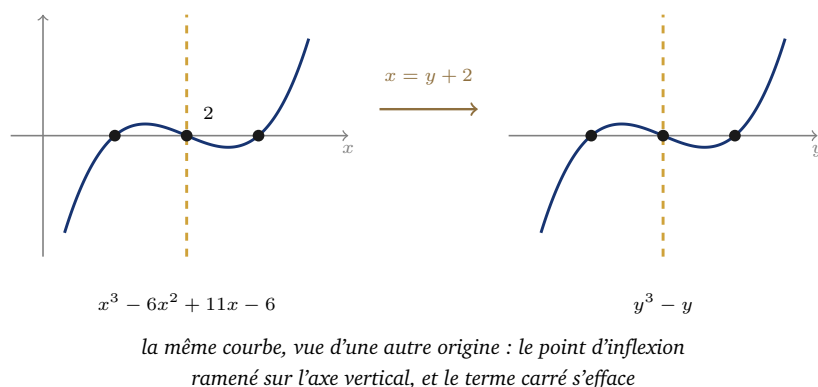
À la fin de la première journée, l'affaire est entendue. Ferrari maîtrise le troisième degré aussi bien que Tartaglia, et le quatrième, que Tartaglia ignore. Tartaglia quitte Milan dans la nuit, laissant le défi sans conclusion. La suite est un lent naufrage : la chaire de Brescia lui est retirée après un an d'enseignement, son traitement n'est jamais honoré, et il meurt pauvre le 13 décembre 1557 dans sa maison vénitienne de la Calle del Sturion, près du Rialto. Ferrari, lui, obtient tout, et meurt à quarante-trois ans en 1565. Quant à Cardan, il verra son fils exécuté le 13 avril 1560 et sera arrêté par l'Inquisition le 6 octobre 1570. Personne, dans cette histoire, ne finit bien.

Reste le calcul. Le cours part de l'équation  $x^3 = px + q$ , sans terme carré, et ne dit pas pourquoi il a le droit. Voici pourquoi : **ce n'est pas une restriction.**

Soient  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  et  $d \in \mathbb{R}$ . Dans l'équation  $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , posons  $x = y - \frac{b}{3}$ , où  $y$  désigne la nouvelle inconnue. En développant les trois termes et en regroupant, les termes en  $y^2$  se détruisent exactement, et pour tout  $y \in \mathbb{R}$  l'équation devient

$$y^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)y + \left(d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}\right) = 0.$$

Le terme carré a disparu, et il ne pouvait pas en être autrement. Une cubique admet toujours un point d'inflexion, qui est son centre de symétrie ; la substitution amène l'axe vertical sur ce point, et une cubique n'est symétrique par rapport à un point de l'axe vertical que si son terme carré est nul.



Sur l'exemple  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ , dont les racines sont 1, 2 et 3, la substitution  $x = y + 2$  donne simplement  $y^3 - y = 0$ , de racines  $-1, 0$  et  $1$ . Les trois racines ont été translatées de 2, et l'équation est devenue triviale.

**Pour les curieux du fond.** Le même geste ne marche pas au quatrième degré, et c'est tout le problème que Ferrari a résolu. Poser  $x = y - \frac{b}{4}$  dans une équation de degré 4 efface bien le terme cubique, mais il reste un terme carré, un terme linéaire et une constante : trois coefficients à annihiler avec une seule inconnue auxiliaire. Ferrari a trouvé le détourné, qui consiste à introduire un paramètre supplémentaire et à exiger qu'un certain trinôme soit un carré parfait ; la condition obtenue est une équation du troisième degré, appelée **résolvante**, que l'on sait désormais résoudre. Le quatrième degré se ramène au troisième, et c'est la raison pour laquelle Ferrari ne pouvait pas perdre à Milan. Vous referez sa méthode, pas à pas, à l'exercice 27 de l'Atelier.

**N.B.** Cardan a cité loyalement ses deux prédécesseurs dans l'*Ars Magna*, et Tartaglia n'a jamais prétendu le contraire. Le grief n'était pas le plagiat : c'était la rupture du serment. Toute l'affaire tient dans un conflit entre deux conceptions du savoir, celle du secret rentable et celle de la publication.

**Bonus.** Réduisez  $x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0$  par la substitution ci-dessus. L'équation obtenue est si simple qu'elle se résout de tête, et l'unique solution réelle s'écrit alors sans aucun radical emboîté. Réponse sur le compagnon.

PIÈCE N° 2 · AUTRE CHEMIN

## En 1629, un ingénieur compte

*Il ne comprend pas ce que sont les racines impossibles, et il s'en moque. Il a remarqué qu'en les comptant, les comptes tombent juste, et il en fait un théorème, cent soixante-dix ans avant Gauss.*

↔ prolonge COURS C1, § 6.1 · le théorème de d'Alembert-Gauss, admis

EN 1629 paraît aux Pays-Bas une brochure de trente-quatre feuillets, *l'Invention nouvelle en l'algèbre*. Son auteur, Albert Girard, est un protestant francophone réfugié en Hollande, ingénieur militaire et joueur de luth ; il mourra trois ans plus tard, à trente-sept ans, laissant une veuve et des enfants sans ressources. Ce mince opuscule contient l'un des plus beaux coups de force de l'histoire des mathématiques : l'énoncé du théorème fondamental de l'algèbre par un homme qui ne sait pas ce que sont les nombres dont il parle.

Girard les appelle des **solutions enveloppées**. Il ne prétend nullement les avoir comprises. Il constate

simplement que si on les compte, alors toute équation de degré  $n$  possède exactement  $n$  solutions, ni plus ni moins. Et à la question qu'on ne manque pas de lui poser, à savoir à quoi peuvent bien servir des solutions qui n'existent pas, il donne trois raisons, qu'il vaut la peine de lire dans son orthographe : « pour la certitude de la règle générale, & qu'il n'y a point d'autres solutions, & pour son utilité ». Aucune de ces trois raisons n'est « pour résoudre une équation ». La première est la bonne : sans les impossibles, la règle générale devient fausse.

Voici comment il s'en assure. Girard appelle **factions** d'une liste de nombres leur somme, puis la somme de leurs produits deux à deux, puis trois à trois, et ainsi de suite jusqu'au produit de tous. Son théorème dit que les factions des racines d'une équation se lisent directement sur les coefficients, au signe près, en alternant. Prenons l'équation qu'il traite lui-même :

$$x^4 = 4x - 3, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Les quatre factions doivent donc valoir 0, 0, 4 et 3. Or les quatre racines sont 1, 1,  $-1 + i\sqrt{2}$  et  $-1 - i\sqrt{2}$ . Notons  $u = -1 + i\sqrt{2}$  et  $v = -1 - i\sqrt{2}$ , de sorte que  $u + v = -2$  et  $uv = 1 + 2 = 3$ . Les comptes tombent :

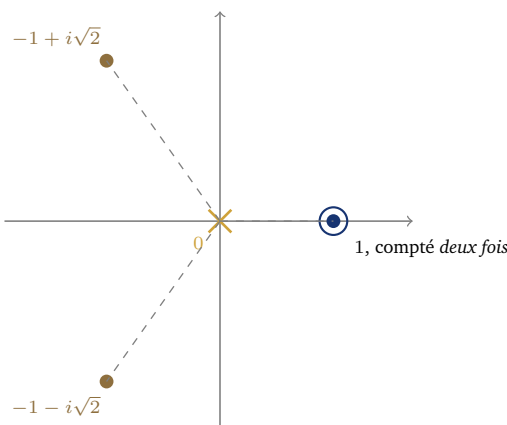
$$\text{première faction : } 1 + 1 + u + v = 2 - 2 = 0,$$

$$\text{deuxième faction : } 1 \times 1 + 2(u + v) + uv = 1 - 4 + 3 = 0,$$

$$\text{troisième faction : } (u + v) + 2uv = -2 + 6 = 4,$$

$$\text{quatrième faction : } 1 \times 1 \times uv = 3.$$

Maintenant, faites l'expérience inverse : rayez les deux racines impossibles, comme on le faisait avant Girard, et ne gardez que les deux racines honnêtes 1 et 1. La première faction vaut alors 2, et non 0. La comptabilité s'effondre. Voilà l'argument, et il est imparable : **les solutions impossibles ne sont pas un supplément décoratif, elles sont ce qui fait tomber les comptes juste.**



*la première faction est nulle : le centre de gravité des quatre racines est l'origine, et il faut les quatre pour que l'équilibre se fasse*

**Pour les curieux du fond.** Ce que Girard appelle factions, on l'appelle aujourd'hui **fonctions symétriques élémentaires** des racines, et la règle exacte est la suivante. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  des nombres complexes ; soit  $r_1, \dots, r_n$  la liste des racines du polynôme unitaire  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ , comptées avec leur multiplicité. Alors, pour tout entier  $k$  vérifiant  $1 \leq k \leq n$ , la somme des produits de  $k$  racines vaut  $(-1)^k a_{n-k}$ . Le cas  $k = 1$  redonne la somme des racines, le cas  $k = n$  leur produit ; en degré 2, on retrouve exactement les relations somme-produit de la première spécialité, qui ont servi à démontrer la formule de del Ferro-Cardan au § 2.2 du cours. La démonstration tient en

une ligne : développer le produit  $(x - r_1) \cdots (x - r_n)$  et identifier les coefficients. Elle exige seulement que la factorisation soit complète, c'est-à-dire exactement ce que Girard postule et que d'Alembert et Gauss démontreront.

*Il a fallu compter les racines bien avant de savoir ce qu'elles étaient.*

la leçon d'Albert Girard

**Bonus.** Vérifiez les trois facteurs de l'équation  $x^3 = 15x + 4$  du cours, dont les racines sont 4,  $-2 + \sqrt{3}$  et  $-2 - \sqrt{3}$ . Cette fois aucune racine n'est impossible : que devient l'argument de Girard ? Réponse sur le compagnon.

PIÈCE N° 3 · ARCHIVES

## Prenez La Géométrie

*On cite depuis quatre siècles le mot que Descartes leur a collé sur le dos. Presque personne ne lit la phrase entière, et elle dit exactement le contraire de ce qu'on lui fait dire.*

↔ prolonge COURS C1, § 1.1 · la note de marge sur le mot imaginaire

**P**RENEZ *La Géométrie*, publiée en 1637 comme troisième essai du *Discours de la méthode*. Allez au Livre troisième. Vous y trouverez, dans le fil du texte et non dans une marge, la phrase qui a baptisé nos nombres pour deux siècles, ici en orthographe modernisée :

*Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires ; c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine.*

Trois choses méritent d'être relevées, et la troisième est stupéfiante.

D'abord, le vocabulaire. « Vraies » désigne les racines positives, « fausses » les négatives : le mépris pour les négatifs est encore là, intact, chez celui qui invente la géométrie analytique. Ensuite, un mot passe presque inaperçu dans cette phrase, et c'est pourtant sa première apparition en ce sens : **réelles**. Le mot « réel », que nous employons cent fois par heure, est né le même jour et dans la même phrase que le mot « imaginaire », comme son contraire. L'un ne se comprend pas sans l'autre.

Enfin, le fond, et il faut lire la phrase jusqu'au bout pour l'attraper. Descartes n'écarte pas ces racines : il affirme qu'on peut toujours en imaginer autant que le degré. C'est le principe de **comptage** que Girard avait posé huit ans plus tôt, et rien de plus : la seconde moitié de la phrase nie expressément qu'une quantité leur corresponde toujours. Descartes s'arrête donc exactement là où la phrase s'arrête. Mais retenez le renversement : le mot le plus méprisant du chapitre est né dans une phrase qui *les compte*. Il faudra encore deux siècles pour qu'on ose écrire qu'elles *existent*, et ce sera le théorème de d'Alembert-Gauss.

Descartes ne se contentait d'ailleurs pas de les compter : il savait déjà, en partie, les détecter. Le Livre troisième contient sa **règle des signes**, qui n'a rien perdu de sa force. Pour un polynôme à coefficients réels, le nombre de racines strictement positives, comptées avec leur multiplicité, est égal au nombre de changements de signe de la liste de ses coefficients **non nuls**, rangés par degré décroissant, ou lui est inférieur d'un nombre pair. Le même comptage appliqué au polynôme en  $-x$  donne les racines négatives. Appliquons-la à l'équation de Girard,  $x^4 - 4x + 3 = 0$ .

$$x^4 - 4x + 3 : \boxed{+} \xrightarrow{\quad} \boxed{-} \xrightarrow{\quad} \boxed{+} \quad 2 \text{ changements}$$

$$x^4 + 4x + 3 : \boxed{+} \quad \boxed{+} \quad \boxed{+} \quad \text{aucun changement}$$

au plus deux racines positives, aucune racine négative, et 0 n'est pas racine :  
ce polynôme de degré 4 a donc au plus deux racines réelles

Soyons précis sur ce que cela prouve, car c'est ici que l'on triche d'ordinaire. La règle des signes est un énoncé de *majoration* : elle ne fabrique aucune racine, elle en interdit. Ce qu'elle établit est que  $x^4 - 4x + 3$  ne peut pas se factoriser en quatre facteurs  $x - r$  à racines réelles. Rien de plus, et c'est déjà considérable. Mais ajoutez-lui le principe de comptage de Girard, celui-là même que Descartes reprend dans sa phrase, et la conclusion tombe : si l'équation a quatre solutions, alors **au moins deux d'entre elles ne sont pas réelles**. L'homme qui a baptisé ces nombres du nom le plus méprisant de leur histoire tenait, dans le même livre, les deux moitiés de l'argument qui rendait leur existence inévitable. Il ne les a pas rapprochées.

**Vrai ou légende ?** Le mot *imaginaire* serait une insulte lâchée par Descartes en 1637 dans une simple note marginale de *La Géométrie*, pour écarter d'un revers de main des solutions qu'il jugeait sans intérêt.

Faites votre pari. La réponse vous attend sur le compagnon numérique.

**N.B.** Le mot de Girard, « enveloppées », était pourtant meilleur : il suggérait une chose réelle mais cachée, qu'il resterait à débiller. C'est « imaginaire » qui l'a emporté, et il a fallu attendre 1831 et la proposition de Gauss pour qu'on essaie d'en changer.

PIÈCE N° 4 · CONTRE-PIED

## Rien, dans le nom de « plan d'Argand »

*Idée reçue : le plan complexe est l'invention d'Argand, ou de Gauss. En réalité, Wessel l'a présenté neuf ans avant Argand et fut oublié quatre-vingt-dix-huit ans ; Argand a publié sans mettre son nom ; et un troisième, cent douze ans avant eux, avait déjà essayé.*

↔ prolonge COURS C1, § 3.1 · la question de Wessel

**R** IEN, dans le nom de « plan d'Argand », ne dit la vérité, et il faut reprendre l'affaire dans l'ordre pour mesurer à quel point ce nom est mal attribué. Commençons par **Caspar Wessel**. Il n'est pas mathématicien : c'est un arpenteur norvégien au service du Danemark, chargé de lever des cartes, et il deviendra en 1798 inspecteur royal de l'arpentage. Sa question naît du terrain : comment calculer avec des directions ? En 1797, il présente son mémoire à l'Académie royale danoise des sciences, dont il n'est pas membre ; le conseiller d'État Tetens l'y soutient, et l'Académie fait une chose qu'elle n'avait jamais faite, publier le travail d'un homme qui n'est pas des siens. Le texte est écrit en danois, dans un recueil que personne ne lit hors du Danemark. Il y dort quatre-vingt-dix-huit ans. En 1895, Christian Juel le signale ; la même année, Sophus Lie le republie ; et en 1897, pour le centenaire, une traduction française de Zeuthen le rend enfin lisible en Europe. Entre-temps, tout ce qu'il contenait avait été retrouvé par d'autres, plusieurs fois.

**Jean-Robert Argand**, ensuite. Il tient une librairie à Paris et n'a aucune position académique. En 1806,

il fait imprimer son essai à ses frais et n'y met pas son nom. Le texte circule, arrive entre les mains de Legendre, qui en parle dans une lettre à François Français. Français meurt ; son frère Jacques Frédéric retrouve la lettre dans ses papiers, comprend la valeur de l'idée, la republie en 1813 dans les *Annales* de Gergonne, et lance un appel public pour retrouver l'auteur inconnu. Argand se manifeste. C'est ainsi qu'un homme qui avait refusé de signer a donné son nom au plan complexe.

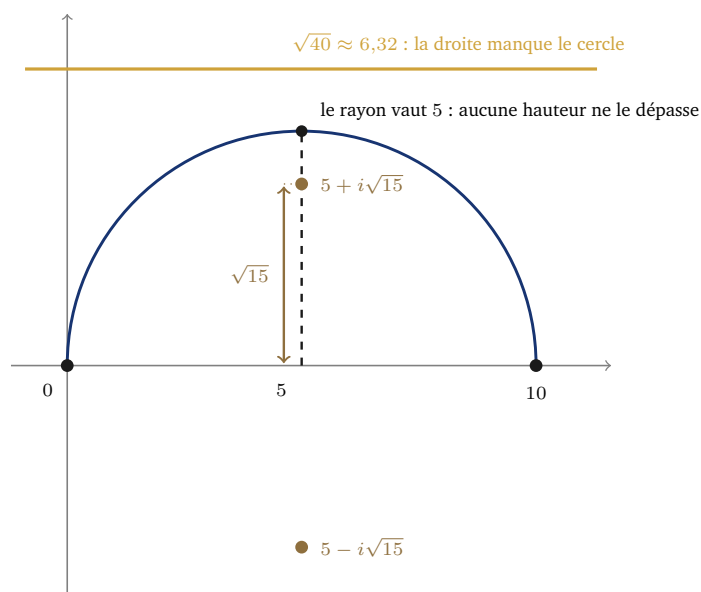
**John Wallis**, enfin, et c'est le plus troublant. Dès 1685, dans son *A Treatise of Algebra*, il cherche déjà à loger les racines impossibles quelque part dans le plan. Son idée est celle des moyennes proportionnelles, et elle se raconte très bien avec le problème même de Cardan.

Cherchons deux nombres de somme 10 et de produit 40. Soient  $s \in \mathbb{R}$  et  $p \in \mathbb{R}$  avec  $s > 0$  et  $p \geq 0$  : les deux nombres de somme  $s$  et de produit  $p$  sont les racines de l'équation  $T^2 - sT + p = 0$ , et ils sont réels si et seulement si

$$\sqrt{p} \leq \frac{s}{2}.$$

Notez bien le sens de lecture : la positivité n'est pas une hypothèse, c'est une *conséquence*. Dès que la condition est remplie, les deux nombres sont non seulement réels mais positifs, et  $\sqrt{p}$  se construit alors comme la hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle inscrit dans le demi-cercle de diamètre  $s$  : une hauteur qui ne peut jamais dépasser le rayon. La condition n'est donc rien d'autre que l'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique.

Ici  $\frac{s}{2} = 5$  et  $\sqrt{p} = \sqrt{40} \approx 6,32$  : la condition est violée. Le produit maximal de deux nombres de somme 10 vaut 25, et Cardan en demandait 40.



tant que la hauteur demandée tient sous le rayon, les deux nombres sont sur l'axe ;  
au-delà, il faut quitter la droite, et l'on quitte exactement de  $\sqrt{40 - 25}$

Regardez la mesure du dépassement :  $40 - 25 = 15$ . Et la solution que le cours obtient au § 5.2 est  $5 \pm i\sqrt{15}$ . La hauteur à laquelle il faut décoller de la droite est la racine carrée de ce qui manquait. Wallis n'est pourtant pas allé jusqu'au bout, et il faut dire précisément où il s'arrête : sa construction loge les racines hors de la droite, mais elle ne dit pas où de façon cohérente d'un cas à l'autre, et surtout elle ne produit aucune loi de multiplication. Il lui manquait les deux exigences de Wessel, celles du § 3 du cours, et cent douze ans.

**N.B.** Wessel, Argand, Gauss, et aussi Buée, Mourey, Warren : entre 1797 et 1831, au moins six personnes ont trouvé la même chose, séparément. Quand une idée est mûre, elle n'appartient plus à personne, et le nom qui lui reste attaché est souvent celui de qui a eu la meilleure chance, pas la meilleure idée.

**Bonus.** Partagez 10 en deux parties dont le produit vaut 26. La réponse est d'une simplicité surprenante, et la figure ci-dessus vous dit à l'avance de quelle hauteur vous allez décoller. Réponse sur le compagnon.

PIÈCE N° 5 · FRONTIÈRE

## Il n'existe aucune identité à trois carrés

*Le cours affirme qu'il n'y a rien entre le plan et la dimension quatre, et renvoie à un théorème de 1877. On peut fermer une porte voisine à mains nues : deux entiers bien choisis suffisent à interdire toute identité à trois carrés.*

↔ prolonge COURS C1, § 6.2 · le mur de la dimension 3 et le théorème de Frobenius

**I**L n'existe aucune identité à trois carrés, et c'est là toute l'affaire. Pour comprendre pourquoi cette seule phrase suffit à fermer la porte de la dimension trois, il faut relire avec les yeux d'Hamilton une formule que le cours vous a donnée au § 3.5 sans en dire tout le potentiel, l'identité de Diophante. Elle affirme que, pour tous  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  et  $d \in \mathbb{R}$ ,

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Traduisez-la : la quantité  $a^2 + b^2$  est le carré de la longueur du point  $(a; b)$ , et la formule dit que **la longueur du produit est le produit des longueurs**. C'est la première des deux exigences de Wessel, écrite en arithmétique. Une dimension ne peut donc accueillir une multiplication respectant les longueurs que si la somme de ses carrés se comporte bien vis-à-vis du produit.

Posons alors la question comme Hamilton se l'est posée pendant treize ans. Existe-t-il une identité analogue à *trois* carrés ? **Supposons qu'il en existe une**, dont les trois termes du membre de droite soient donnés par des formules à coefficients entiers. Un nombre qui est somme de trois carrés, multiplié par un autre qui l'est aussi, serait alors encore une somme de trois carrés. Vérifions sur le plus petit cas venu :

$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2, \quad 5 = 0^2 + 1^2 + 2^2, \quad 3 \times 5 = 15.$$

Or 15 n'est pas une somme de trois carrés, et la vérification est complète en trois phrases. Les seuls carrés qui ne dépassent pas 15 sont 0, 1, 4 et 9. On ne peut pas en prendre deux égaux à 9, puisque  $18 > 15$  ; avec un seul 9, il faudrait écrire 6 comme somme de deux de ces carrés, or les sommes possibles sont 0, 1, 2, 4, 5 et 8, et aucune ne vaut 6. Sans aucun 9, le maximum atteignable est  $4 + 4 + 4 = 12$ . Aucune combinaison ne donne 15.

**La porte est fermée.** Appliquées aux deux triplets  $(1; 1; 1)$  et  $(0; 1; 2)$ , les formules supposées produiraient trois *entiers* dont la somme des carrés vaudrait 15. Il n'y en a pas. Deux entiers, 3 et 5, viennent d'établir à la main un cas particulier de ce que le cours admettait en bloc.

En dimension 4, en revanche, cela remarque, et il faut voir l'identité pour le croire. Euler l'a écrit à Goldbach



dans une lettre du 4 mai 1748, près d'un siècle avant Hamilton. Pour tous  $a_1, \dots, a_4$  et  $b_1, \dots, b_4$  réels,

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = & (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4)^2 \\ & + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)^2 \\ & + (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)^2 \\ & + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)^2. \end{aligned}$$

Comparez-la à celle de Diophante : c'est la même chose, avec deux fois plus de place. Hamilton, en franchissant le Broom Bridge, ne fait que retrouver cette identité sous forme d'une multiplication, au prix que le cours a nommé : la commutativité.



les seules dimensions où une identité de composition existe :  
1, 2, 4 et 8, et rien d'autre jusqu'à l'infini

**Pour les curieux du fond.** Deux compléments, l'un arithmétique et l'autre algébrique. **Arithmétique** : le fait que 15 échappe aux trois carrés n'a rien d'un accident. Legendre a caractérisé complètement les entiers concernés : *tout entier naturel  $n$  est somme de trois carrés si et seulement si il n'existe aucun couple  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $n = 4^\alpha (8\beta + 7)$* . Or  $15 = 4^0 (8 \times 1 + 7)$  : il tombe exactement dans le trou. **Algébrique** : le contre-exemple ci-dessus ne tue que les identités à coefficients entiers, et le cas des coefficients rationnels demande déjà un argument de plus. Pour interdire les coefficients réels, il faut un théorème, et c'est celui d'**Adolf Hurwitz**, publié en 1898. Il affirme qu'une identité de la forme  $(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) = z_1^2 + \dots + z_n^2$ , valable pour tous  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , où chaque  $z_k$  est une forme bilinéaire à coefficients réels des  $x_j$  et des  $y_j$ , n'existe que pour  $n$  valant 1, 2, 4 ou 8. Ne confondez pas les deux listes : Frobenius, dans le cours, donne 1, 2, 4 ; Hurwitz donne 1, 2, 4 et 8. Ce ne sont pas les deux faces d'un même mur, mais deux murs parallèles, et l'écart entre eux porte un nom : l'associativité.

**N.B.** La dimension 8 existe donc aussi, et elle porte un nom : les **octonions**. John Graves les découvre quelques semaines après les quaternions, et Arthur Cayley les retrouve de son côté, indépendamment, en 1845 : on dit encore « nombres de Cayley », ce qui est une injustice de plus. Le prix à payer y est plus lourd, puisque l'associativité y disparaît à son tour. Au-delà de 8, plus rien.

**Bonus.** En reprenant l'énumération ci-dessus, trouvez le plus petit entier strictement supérieur à 15 qui n'est pas non plus somme de trois carrés. Le critère de Legendre vous dira ensuite si vous l'avez bien trouvé. Réponse sur le compagnon.

## Suivez un point

*Vous savez additionner et multiplier dans  $\mathbb{C}$ , et c'est tout ce que vous savez. C'est aussi tout ce qu'il faut pour engendrer la figure la plus célèbre des mathématiques du XX<sup>e</sup> siècle.*

↔ prolonge COURS C1, § 4.2 · la définition du produit dans  $\mathbb{C}$

**S**UIVEZ un point. Choisissez un nombre complexe  $c$ , partez de  $z_0 = 0$ , et appliquez indéfiniment la même règle : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ . Rien d'autre. Un carré et une addition, les deux seules opérations que le cours vous a données.

Selon la valeur de  $c$ , deux destins seulement, et c'est un théorème et non une évidence : ou bien la suite reste confinée pour toujours, ou bien elle part à l'infini, sans troisième possibilité. Testons trois valeurs.

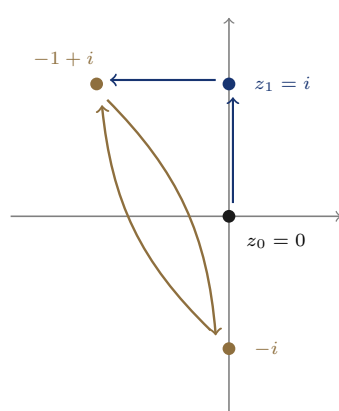
Pour  $c = 1$ , les termes sont 0, 1, 2, 5, 26, 677 : la croissance est franche, et l'on verra plus bas le critère qui permet d'affirmer que la suite ne reviendra jamais.

Pour  $c = -1$ , ils sont 0,  $-1$ , 0,  $-1$  : la suite oscille entre deux valeurs, indéfiniment.

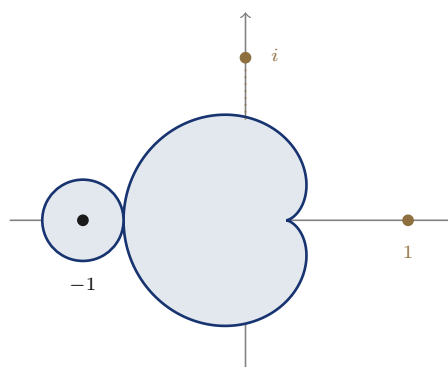
Pour  $c = i$ , il faut calculer, et c'est ici que le produit du cours entre en scène. On a  $z_1 = i$ , puis  $z_2 = i^2 + i = -1 + i$ . Ensuite

$$(-1 + i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i, \quad \text{donc} \quad z_3 = -2i + i = -i.$$

Puis  $z_4 = (-i)^2 + i = -1 + i$ , et l'on est revenu en  $z_2$ . La suite tourne désormais entre  $-1 + i$  et  $-i$ , sans jamais s'échapper.



$c = i$  : l'orbite tombe dans un cycle et n'en sort plus



les deux plus grosses pièces de l'ensemble ;  
 $i$  est dessus, au bout d'un filament trop fin pour être dessiné

L'ensemble des valeurs de  $c$  pour lesquelles la suite reste confinée s'appelle l'**ensemble de Mandelbrot**. Nos trois calculs viennent d'en décider trois cas : 1 n'y est pas,  $-1$  y est,  $i$  y est aussi. Et sa forme n'a rien d'aléatoire : la grosse pièce en forme de cœur est une cardioïde d'équation exacte, le disque accroché à gauche a pour centre  $-1$  et pour rayon  $\frac{1}{4}$ , ce qui explique que notre cycle de longueur 2 soit apparu précisément là.

Un mot manque encore à ce récit, et c'est volontaire. Dire qu'une suite « reste confinée » demande de mesurer la taille d'un nombre complexe : ce sera le **module**, au chapitre C2. Vous y démontrerez au passage le critère qui rend tout cela calculable par une machine, et qui tranche le cas de  $c = 1$  : dès qu'un terme dépasse 2 en module, l'orbite est perdue. C'est ce test, et rien de plus savant, que Benoît Mandelbrot a fait tourner chez IBM en 1980 pour produire l'image qui a fait connaître l'ensemble au monde entier.

**N.B.** Le point  $i$  est sur le bord de l'ensemble, et notre calcul en donnait le signe : son orbite ne revient pas sur son point de départ, elle tombe dans un cycle après coup. Ces valeurs de  $c$  portent un nom, points de Misiurewicz, et un théorème dit qu'elles sont toutes sur le bord, dont elles sont d'ailleurs truffées.

**Bonus.** Calculez l'orbite de  $c = -2$ . Elle se stabilise en trois termes, et vous aurez démontré que  $-2$  appartient à l'ensemble. Il ne figure pourtant sur aucune des deux pièces dessinées : sauriez-vous dire de quel côté il faudrait prolonger l'axe pour l'atteindre ? Réponse sur le compagnon.

PIÈCE N° 7 · ARCHIVES

## Brèves de coulisses

*Trois histoires courtes qui n'ont trouvé leur place nulle part ailleurs, et qu'il aurait été dommage de couper.*

↔ prolonge COURS C1, § 2 ET § 6 · les hommes de l'Ars Magna et ceux du Broom Bridge

### Le premier livre de probabilités est l'œuvre d'un joueur.

Cardan était médecin, astrologue, et joueur compulsif. De cette dernière passion, ruineuse, il a tiré le *Liber de ludo aleae*, le livre sur les jeux de hasard, où il calcule des chances aux dés et énonce les premières règles du calcul des probabilités. Il l'écrit vers 1560 ; il ne sera publié qu'en 1663, soit près d'un siècle après sa mort et neuf ans après la correspondance de Pascal et Fermat, à qui l'histoire attribue la fondation de la discipline. Le même homme a par ailleurs décrit, dans son *De subtilitate* de 1550, la suspension à anneaux articulés qui porte encore son nom, et dont le cours vous rappelle que le *blocage* a fini par imposer les quaternions aux moteurs de jeu vidéo.

**L'amphibie de Leibniz.** En 1702, Leibniz cherche ses mots pour dire ce qu'est  $\sqrt{-1}$ , et ce qu'il trouve est resté célèbre : cette merveille de l'analyse, ce prodige du monde idéal, presque un *amphibie entre l'être et le non-être*. La

formule latine, *pene inter Ens et non-Ens Amphibio*, dit exactement l'inconfort du moment : l'objet marche trop bien pour être rejeté, et se laisse trop mal définir pour être accepté. Il faudra encore cent trente-cinq ans, et les couples d'Hamilton, pour que l'amphibie choisisse son élément.

**Le 16 octobre, on marche.** De la gravure d'Hamilton sur le Broom Bridge, il ne reste rien : la pierre a été rejointoyée, le canif n'a pas fait le poids contre deux siècles de pluie irlandaise. Mais depuis 1990, chaque 16 octobre, mathématiciens et curieux refont à pied le trajet de l'observatoire de Dunsink au pont, sur les berges du Royal Canal, pour l'anniversaire de la découverte des quaternions. La marche a été lancée par Tony O'Farrell, de l'université de Maynooth. C'est probablement la seule promenade au monde organisée en l'honneur d'une ligne de calcul gravée au couteau.

LA SUITE DANS LES COULISSES NUMÉRIQUES

*Six tiroirs restent fermés : la réduction de  $x^3 - 3x^2 + 3x - 3$ , les trois factions de l'équation du cours, le verdict du procès en note marginale intenté à Descartes, les deux parties de 10 dont le produit vaut 26, le successeur de 15 chez les entiers qui échappent aux trois carrés, et l'orbite de  $c = -2$ . Le compagnon numérique vous attend.*