



COULISSES • F1. LIMITES DE FONCTIONS ET CONTINUITÉ

L'envers de la limite

Le cours vous a appris à approcher sans atteindre et à atteindre sans sauter. Mais il a beaucoup tu. L'homme qui a prouvé qu'aucune formule ne résout le degré cinq a payé ses six pages d'impression de sa poche. Celui qui a forgé la définition de la continuité a fini assigné à résidence, interdit de publier. Le théorème qui manque au chapitre porte le nom du pire ennemi du calcul infinitésimal. Le père de l'analyse moderne a enseigné quatorze ans la gymnastique. Et un homme est tombé plus vite que le son, jusqu'à ce que sa propre vitesse limite le rattrape. Chaque pièce se lit seule, aucune n'est exigible, et toutes contiennent de vraies mathématiques.

Plan de la visite

ARCHIVES • La formule interdite (9 min)	2
ARCHIVES • Le crayon interdit (10 min)	3
CONTRE-PIED • Rolle, l'adversaire converti (8 min)	4
AUTRE CHEMIN • Deux façons d'attraper une racine (9 min)	5
AUTRE CHEMIN • L'aimant et le ressort (8 min)	6
FRONTIÈRE • Le zoo des monstres (10 min)	6
ARCHIVES • L'asymptote qui ne tombe jamais (6 min)	8
PASSERELLE • La chute parfaite (7 min)	8
PASSERELLE • Qui gagne la course à l'infini ? (6 min)	9
ARCHIVES • Brèves de coulisses (3 min)	10

La formule interdite

Le cours a ouvert sur une équation sans formule. Voici ce que cette impossibilité a coûté à ceux qui l'ont prouvée, et ce qu'elle affirme au juste.

↔ prolonge COURS F1, OUVERTURE · le théorème d'Abel–Ruffini et l'équation $x^5 - x - 1 = 0$

Au printemps de 1824, un Norvégien de vingt-et-un ans, Niels Henrik Abel, fait imprimer à Christiania un mémoire qui règle une question ouverte depuis trois siècles : l'équation générale de degré cinq n'admet aucune résolution par radicaux. Il paie l'impression de sa poche, et pour que la facture reste payable, il comprime la démonstration en **six pages**, quitte à sauter des détails qui rendront la lecture rude. Un quart de siècle plus tôt, l'Italien Paolo Ruffini avait publié une preuve de près de cinq cents pages : elle contenait une lacune, et ses contemporains l'avaient jugée sans importance. Personne, ou presque, n'avait lu le bon résultat mal démontré ; peu liront d'abord le bon résultat bien démontré.

Pour les curieux du fond. Que dit exactement le théorème ? Résoudre *par radicaux*, c'est exprimer les solutions à partir des coefficients avec les quatre opérations et des racines n -ièmes, comme le fait la formule du second degré : pour $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$ et $\Delta \geq 0$), les solutions sont $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Le théorème d'Abel–Ruffini n'interdit pas à *chaque* équation de degré cinq d'avoir cette chance : $x^5 = 2$ se résout très bien par radicaux, sa solution réelle est $\sqrt[5]{2} \approx 1,14870$. Il affirme qu'aucune formule **universelle** ne couvre le degré cinq. Pour trancher le cas d'une équation *donnée*, comme notre $x^5 - x - 1 = 0$, il faut l'outil suivant : la théorie de Galois, qui associe à chaque équation un objet algébrique (son groupe) dont la structure dit si les radicaux suffisent. Verdict pour la nôtre : ils ne suffisent pas.

L'outil porte le nom d'un contemporain d'Abel au destin plus sombre encore. Évariste Galois soumet son mémoire trois fois à l'Académie des sciences : le premier manuscrit s'égare chez Cauchy, le deuxième disparaît à la mort de Fourier, le troisième revient en 1831 avec le verdict de Poisson : incompréhensible. Le 30 mai 1832, Galois meurt en duel à vingt ans. Abel, lui, était mort de tuberculose en 1829, à vingt-six ans, deux jours avant l'arrivée de la lettre qui lui offrait enfin un poste à Berlin.

N.B. La légende veut que Galois ait inventé sa théorie la nuit précédant le duel, fiévreusement, entre deux adieux. Les manuscrits disent autre chose : cette nuit-là, il relit, annote et récapitule dans une lettre-testament à son ami Auguste Chevalier des mémoires écrits depuis 1829. La théorie était faite ; la nuit n'a produit qu'un sommaire, et l'une des plus belles lettres de l'histoire des sciences. Les biographes romantiques ont fait le reste.

Le crayon interdit

La boîte historique du cours a résumé quarante ans de rigueur en quatre dates. Voici la version longue, avec le squelette de la preuve de 1817.

↔ prolonge COURS F1, § 6 · la boîte « Le crayon interdit » et l'épigraphie de la garde

PRAGUE, 1817. Un prêtre catholique, professeur de science de la religion à l'université, fait paraître un opuscule au titre interminable : *Rein analytischer Beweis*. . . , « démonstration purement analytique du théorème selon lequel, entre deux valeurs donnant des résultats de signes opposés, se trouve au moins une racine réelle de l'équation ». L'auteur s'appelle Bernard Bolzano, et son titre est un manifeste : *purement analytique* signifie sans figure, sans mouvement, sans crayon. Dix-huit ans plus tôt, Gauss avait démontré le théorème fondamental de l'algèbre en s'appuyant sur une courbe qui, passant du négatif au positif, devait bien couper l'axe quelque part : l'évidence du dessin. C'est cette évidence que Bolzano récuse, dans la phrase que le chapitre porte en épigraphe : la déduire de la géométrie serait une « faute intolérable ».

Refuser le dessin a un prix : il faut tout reconstruire. Dire sans figure ce qu'est une fonction continue, c'est la définition du paragraphe 5 du cours, forgée dans ce mémoire. Il faut aussi un principe sur les nombres réels eux-mêmes, que Bolzano dégage au passage : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une *borne supérieure*, un plus petit majorant. Et un critère de convergence que l'histoire attribuera à Cauchy, énoncé ici quatre ans avant lui.

Pour les curieux du fond. Voici le squelette de la preuve de 1817, en notation moderne. Soit f continue sur $[a; b]$, avec $f(a) < 0 < f(b)$. Considérons l'ensemble

$$E = \{ x \in [a; b] : f(x) < 0 \}.$$

Il n'est pas vide (il contient a) et il est majoré (par b) : il admet donc une borne supérieure c . Montrons que $f(c) = 0$ en éliminant les deux autres possibilités.

Si $f(c) < 0$: par continuité, f reste strictement négative sur un petit intervalle à droite de c ; ces points appartiennent alors à E et dépassent c , qui n'est donc pas un majorant de E . Contradiction.

Si $f(c) > 0$: par continuité, f reste strictement positive sur un petit intervalle $]c - \delta; c]$; aucun point de E ne s'y trouve, donc $c - \delta$ majore déjà E , et c n'est pas le *plus petit* majorant. Contradiction.

Il ne reste que $f(c) = 0$. Toute la preuve tient sur la borne supérieure : c'est elle, l'axiome fondateur des réels.

La suite est cruelle. En décembre 1819, Bolzano est destitué de sa chaire pour ses sermons jugés subversifs : assigné à résidence, courrier surveillé, interdiction de publier dans tout l'Empire, œuvres mises à l'Index. Son mémoire, imprimé à Prague loin des grands centres, dort un demi-siècle avant d'être exhumé par les mathématiciens allemands. Entre-temps, Cauchy a redémontré le théorème en 1821 par découpages successifs (la dichotomie du cours), et Weierstrass a donné à la limite sa forme définitive en (ε, δ) .

N.B. Pourquoi tant d'efforts pour un théorème « évident » ? Parce qu'il est faux là où la borne supérieure manque. Sur les seuls nombres rationnels, la fonction $x \mapsto x^2 - 2$ est continue, vaut -2 en 0 et 2 en 2, et pourtant ne s'annule jamais : sa racine, $\sqrt{2}$, n'est pas un rationnel. Le TVI n'est pas une évidence du crayon, c'est une propriété profonde de $\mathbb{R}$: il n'y a pas de trou dans la droite réelle.

Rolle, l'adversaire converti

Un théorème du programme porte le nom du plus farouche ennemi du calcul infinitésimal. Le cours F1 l'a volontairement laissé de côté : voici l'homme, et voici pourquoi.

↔ prolonge COURS F1, PÉRIMÈTRE · le théorème déplacé du cours vers ces pages

PARIS, 1691. Michel Rolle, ancien aide-notaire d'Ambert monté à Paris comme copiste, autodidacte entré à l'Académie royale à force de résoudre des problèmes que d'autres posaient, publie une *Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés*. Sa spécialité : localiser les racines des polynômes. Son outil, exposé dès son *Traité d'algèbre* de 1690, porte un nom superbe : la **méthode des cascades**. On multiplie chaque coefficient du polynôme par son degré, on abaisse tout d'un cran, et l'on obtient un polynôme auxiliaire, la cascade. Le principe de Rolle : *entre deux racines consécutives du polynôme, la cascade s'annule*. En redescendant de cascade en cascade, on encadre toutes les racines.

Pour les curieux du fond. Essayons. Soit P le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^3 - 3x + 1$. Sa cascade s'obtient en multipliant chaque coefficient par son degré puis en divisant par x : elle vaut $3x^2 - 3$, qui s'annule en -1 et 1 . La prédiction de Rolle : les racines de P sont séparées par -1 et 1 . Vérification numérique : P s'annule en

$$x_1 \approx -1,879, \quad x_2 \approx 0,347, \quad x_3 \approx 1,532,$$

et l'on a bien $x_1 < -1 < x_2 < 1 < x_3$. Regardez maintenant la cascade de plus près : multiplier le coefficient de x^k par k et abaisser le degré, c'est très exactement *dérivée*. La cascade de P , c'est P' . Le principe de Rolle est l'énoncé que vous verrez au chapitre de la dérivation : si f est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$. Entre deux racines, la courbe monte puis redescend : quelque part, la tangente est horizontale.

Le contre-pied, le voici. Ce même Rolle fut, à l'Académie, le procureur le plus acharné du calcul infinitésimal naissant de Leibniz et Newton : une « collection d'erreurs ingénieuses », disait-il en substance, exhibant des courbes où, selon lui, les nouvelles méthodes rataient des extremums. La querelle publique avec Saurin et Varignon dure de 1700 à 1706 ; à l'automne 1706, Rolle capitule devant Varignon, Fontenelle et Malebranche, et reconnaît la valeur des méthodes qu'il combattait. L'histoire a poussé l'ironie plus loin : elle a fait de son principe sur les polynômes, généralisé à toutes les fonctions dérivables, un pilier du calcul qu'il refusait, et elle y a attaché son nom.

N.B. Pourquoi ce théorème n'est-il pas dans le cours F1 ? Regardez ses hypothèses : il exige la dérivabilité, notion que le chapitre ne mobilise qu'en passant. Sa vraie maison est le chapitre de la dérivation, où il engendrera le théorème des accroissements finis. Le déplacer ici n'est pas une coupe : c'est un rendez-vous.

Deux façons d'attraper une racine

Le cours a promis que Newton allait plus vite que la dichotomie. Voici la course chronométrée, et le piège que la vitesse dissimule.

↔ prolonge COURS F1, § 6 · la remarque « Vitesse de la dichotomie »

REPRENNONS l'équation du chapitre, $x^5 - x - 1 = 0$, et sa racine $c \approx 1,16730$. La dichotomie l'attrape sûrement, mais à pas comptés : chaque étape divise l'intervalle par deux, chaque décimale coûte environ 3,32 étapes. La méthode concurrente procède autrement : au lieu de couper l'intervalle, elle suit la pente. Partant d'une estimation x_0 , on remplace la courbe par sa tangente et l'on prend pour estimation suivante le point où la tangente traverse l'axe :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Pour les curieux du fond. Chronométrons la course vers $c = 1,167303978\dots$ (valeurs recalculées) :

	dichotomie depuis $[1; 2]$	Newton depuis $x_0 = 1,2$
étape 1	intervalle de longueur 0,5	$x_1 = 1,16922\dots$ (erreur $\approx 2 \times 10^{-3}$)
étape 2	longueur 0,25	$x_2 = 1,167311\dots$ (erreur $\approx 7 \times 10^{-6}$)
étape 3	longueur 0,125	$x_3 = 1,167303978\dots$ (erreur $\approx 4 \times 10^{-10}$)
erreur $< 10^{-6}$	19 étapes	3 itérations
erreur $< 10^{-12}$	39 étapes	4 itérations

La dichotomie gagne ses décimales une à une : convergence **linéaire**. Newton *double* (environ) le nombre de décimales exactes à chaque itération : convergence **quadratique**. Sur douze décimales, il va dix fois plus vite.

Alors pourquoi enseigner la tortue ? Parce que le lièvre se perd. Newton exige une dérivée, un bon point de départ, et une courbe docile. Prenons la fonction racine cubique, $x \mapsto x^{1/3}$, dont l'unique racine est 0 : un calcul de deux lignes montre que l'itération de Newton devient, pour tout $x_n \neq 0$, $x_{n+1} = -2x_n$. Chaque étape *double* la distance à la racine en changeant de côté : la méthode s'enfuit à vitesse géométrique de la solution qu'elle frôlait. La dichotomie, elle, ne demande que la continuité et un changement de signe : elle ne rate jamais.

N.B. Les bibliothèques de calcul modernes ne choisissent pas : la méthode de Brent, standard depuis les années 1970, avance à la Newton quand tout va bien et retombe sur la dichotomie dès que ça se gâte. Robustesse ou vitesse est un faux duel : on les hybride. Quant à savoir si Newton traçait vraiment des tangentes, voyez le « Vrai ou légende ? » en fin de numéro.

L'aimant et le ressort

La note de marge du cours affirmait qu'une pente douce attire la suite et qu'une pente raide la repousse. Voici la mécanique exacte, et pourquoi Héron convergait si vite.

↔ prolonge COURS F1, § 7 · escalier, toile d'araignée et pente au point fixe

O n a vu les marches de l'escalier se resserrer vers $\ell = 2$, et la toile d'araignée s'enrouler vers son centre. Ce qui gouverne tout, c'est la pente de f au point fixe. Près de ℓ , la courbe se confond presque avec sa tangente : l'écart au point fixe obéit à

$$u_{n+1} - \ell = f(u_n) - f(\ell) \approx f'(\ell)(u_n - \ell).$$

À chaque itération, l'erreur est donc multipliée par environ $f'(\ell)$. Si $|f'(\ell)| < 1$, elle fond : le point fixe est un **aimant**. Si $|f'(\ell)| > 1$, elle enfle : un **ressort**, qui éjecte la suite. Et le signe règle la chorégraphie : pente positive, la suite reste du même côté (escalier) ; pente négative, elle saute de part et d'autre (spirale).

Pour les curieux du fond. Passons les exemples du cours au banc d'essai (pentes recalculées).

- f définie par : $\forall x > -2$, $f(x) = \sqrt{2+x}$. Alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$ et $f'(2) = \frac{1}{4}$: au voisinage de 2, chaque itération divise l'erreur par quatre, du même côté. Escalier serré.
- g définie par : $\forall x > -1$, $g(x) = \frac{4}{1+x}$. Alors $g'(\ell) \approx -0,61$ au point fixe $\ell = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$: l'erreur est multipliée par 0,61 en changeant de signe. Spirale.
- h définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$. Deux points fixes : 0, avec $h'(0) = 0$ (aimant parfait), et 1, avec $h'(1) = 2$ (ressort). Partez de 0,99 : la suite fond vers 0 (0,9801 ; 0,9606 ; 0,9227 ...). Partez de 1,01 : elle s'enfuit (1,0201 ; 1,0406 ; 1,0829 ...). Deux destins séparés par un cheveu, décidés par la pente.

Bonus. La marge du cours citait Héron d'Alexandrie et son itération $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$ vers $\sqrt{2}$. Calculez la pente au point fixe : avec $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$ pour $x > 0$, on trouve $f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)$, donc $f'(\sqrt{2}) = 0$. Pente nulle : l'erreur n'est pas multipliée par une constante, elle est élevée au carré. C'est la convergence quadratique de la pièce précédente, et ce n'est pas un hasard : vérifiez que $x - \frac{x^2-2}{2x} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$. L'itération de Héron est la méthode de Newton appliquée à $x^2 - 2$, avec deux mille ans d'avance.

Le zoo des monstres

Le cours a montré l'oscillation infinie et raconté le scandale de 1872. Voici le bestiaire complet, la formule du monstre, et la vraie morale de l'histoire.

↔ prolonge COURS F1, § 5 · la boîte « Les fonctions monstres »

C E chapitre vous a présenté un monstre encore présentable : $\sin \frac{1}{x}$, dont la courbe existe même si aucun crayon n'en vient à bout près de zéro. Le zoo compte des pensionnaires bien plus féroces. Le premier est dû à Dirichlet, qui venait de libérer la notion de fonction : n'importe quelle

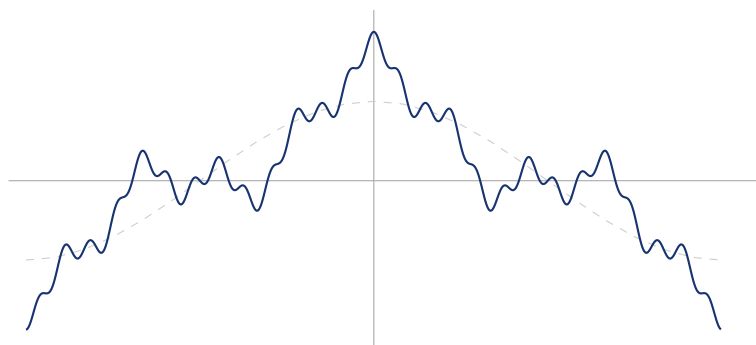
correspondance, même sans formule ni dessin. Sa créature : $D(x) = 1$ si x est rationnel, $D(x) = 0$ sinon.

Pour les curieux du fond. La fonction de Dirichlet est **discontinue en tout point**, et l'argument tient en deux lignes du cours. Tout intervalle ouvert, si petit soit-il, contient à la fois des rationnels et des irrationnels. En n'importe quel réel a , on trouve donc des x aussi proches de a que l'on veut avec $D(x) = 1$, et d'autres avec $D(x) = 0$: aucune limite possible, nulle part, jamais. Quant à « sa courbe », ce serait deux poussières de droites superposées, indessinables : la définition analytique est le seul crayon qui la trace.

Le deuxième pensionnaire est la vedette. Le 18 juillet 1872, Weierstrass présente à l'Académie de Berlin une fonction **continue en tout réel et dérivable en aucun** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad 0 < a < 1,$$

où tout se joue sur le produit ab : Weierstrass prenait b entier impair avec $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$; Hardy montrera en 1916 que $ab \geq 1$ suffit, ce qui couvre la figure ci-dessous. Chaque terme ajoute des rides plus fines sur les rides précédentes : la limite est rugueuse à *toutes* les échelles, sans aucune tangente. La communauté est horrifiée ; Hermite écrira en 1893 à Stieltjes : « je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées ». Bolzano, vers 1830, et Cellérier avaient construit des monstres semblables, restés dans leurs tiroirs ; la première publication, en 1875, est due à du Bois-Reymond.



Les quatre premiers termes de la somme de Weierstrass (ici $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$), superposés au premier terme seul (pointillé). Chaque terme ajoute des rides plus fines ; la vraie W , somme infinie, est ridée à toutes les échelles : continue partout, lisse nulle part.

Le troisième pensionnaire est plus discret : prenez la courbe de $\sin \frac{1}{x}$ sur $]0 ; 1]$ et ajoutez-lui le segment vertical joignant les points $(0 ; -1)$ et $(0 ; 1)$. L'ensemble obtenu, la *courbe sinus du topologue*, est **connexe** (d'un seul tenant : on ne peut pas le séparer en deux morceaux ouverts) mais **non connexe par arcs** : aucun chemin continu ne mène du segment à la courbe. « D'un seul tenant » et « traçable d'un trait » sont deux idées distinctes, que le crayon confond et que l'analyse sépare.

La morale est venue au siècle suivant : en 1931, Banach et Mazurkiewicz démontrent qu'en un sens précis (celui de Baire), la *quasi-totalité* des fonctions continues sont du type de Weierstrass. Les courbes lisses de nos figures sont l'infime exception qui se dessine.

Le monstre est la règle ; la courbe lisse, l'exception.

L'asymptote qui ne tombe jamais

Une note de marge donnait l'étymologie du mot *asymptote*. Derrière elle, une démonstration grecque vieille de vingt-deux siècles, qui dit « limite » sans le mot.

↔ prolonge COURS F1, § 1 · la marge « Asymptote » et Apollonius

HYPERBOLE : le mot désigne une exagération chez le rhéteur et une courbe chez le géomètre, et c'est le même mot. Vers 200 avant notre ère, Apollonius de Perge compose les *Coniques*, huit livres sur les courbes obtenues en tranchant un cône. Au livre II, il démontre deux propositions qui, mises bout à bout, sont un énoncé de limite avant la lettre : l'hyperbole et ses asymptotes *ne se rencontrent jamais*, et pourtant leur distance devient *plus petite que toute distance donnée*.

Pour les curieux du fond. Traduisons sur l'hyperbole la plus simple, la courbe d'équation $xy = 1$. Pour tout $x > 0$, la distance verticale entre le point $(x, \frac{1}{x})$ de la courbe et l'axe des abscisses vaut $\frac{1}{x}$: elle n'est jamais nulle, la rencontre n'a pas lieu. Donnons-nous maintenant une distance $\varepsilon > 0$, aussi petite que l'on veut : dès que $x > \frac{1}{\varepsilon}$, la distance est plus petite que ε . Pour $\varepsilon = 0,001$, il suffit de dépasser $x = 1000$. « Plus près que toute distance donnée » : c'est mot pour mot la structure du $\forall \varepsilon > 0$ du chapitre, avec son seuil en face. Les Grecs prouvaient cela par double réduction à l'absurde, sans jamais prononcer le mot infini ; l'étymologie garde la trace du théorème : *a-sun-ptôtos*, « qui ne tombent pas ensemble ».

N.B. Les trois coniques doivent leurs noms à une comparaison d'aires dans les constructions grecques : ellipsis le manque, parabolê l'ajustement exact, hyperbolê l'excès. Ce sont les mêmes mots qui donnent l'ellipse du style (on sous-entend), la parabole de l'Évangile (récit ajusté au sens) et l'hyperbole du bavard (excès). Géométrie et rhétorique puisent au même grec : dans les deux cas, on compare quelque chose à une référence.

La chute parfaite

Le fil rouge du cours suivait un parachutiste vers sa vitesse limite. Voici les vrais chiffres, le vrai modèle, et le jour où la vitesse limite s'est effondrée sous un homme.

↔ prolonge COURS F1, § 1 · l'exemple « La vitesse limite d'une chute »

ELLE ressemble à une abstraction de cours, la vitesse limite, et c'est une donnée d'entraînement que tout parachutiste connaît : en chute stabilisée à plat, ventre face au sol, on plafonne autour de 200 km/h ; tête en bas, bras collés, nettement plus vite. Le cours a modélisé le frottement par $-kv$, proportionnel à la vitesse : c'est le bon modèle aux vitesses modestes. Aux vitesses d'un corps humain dans l'air, la physique préfère un frottement proportionnel au *carré* de la vitesse, et l'équilibre entre poids et frottement donne alors

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_x}},$$

où ρ est la masse volumique de l'air, S la surface exposée et C_x un coefficient de forme.

Pour les curieux du fond. Faisons les comptes (valeurs recalculées) pour un parachutiste de $m = 80$ kg dans l'air au sol ($\rho = 1,2$ kg/m³), avec $g = 9,81$ m/s² :

- à plat, grande surface exposée ($S = 0,7$ m², $C_x = 1$) : $v_{\text{lim}} \approx 43$ m/s, soit environ 156 km/h ;
- tête en bas, profil effilé ($S = 0,35$ m², $C_x = 0,8$) : $v_{\text{lim}} \approx 68$ m/s, soit environ 246 km/h.

Diviser la surface par deux ne double pas la vitesse : la racine carrée l'adoucit. Et les deux modèles, linéaire ou quadratique, racontent la même géométrie : une asymptote horizontale, approchée sans être atteinte.

Sauf que l'asymptote peut bouger. Le 14 octobre 2012, Felix Baumgartner saute d'une capsule à 38 969 mètres d'altitude. Là-haut, l'air est raréfié : ρ est minuscule, donc v_{lim} est immense, et presque rien ne freine la chute. Il atteint 1 357,6 km/h, Mach 1,25 : premier homme supersonique en chute libre. Puis il descend, l'air épaissit, ρ grimpe, et sa vitesse limite *s'effondre au-dessous de sa vitesse réelle* : sans ouvrir quoi que ce soit, il se met à ralentir en pleine chute. La vitesse limite n'est pas un plafond fixe que l'on approche par en dessous : c'est une asymptote mobile, et quand elle passe sous vous, elle devient un frein.

N.B. D'où sort la formule $v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$ du cours ? De l'équation différentielle $v' = g - \frac{k}{m}v$, que vous apprendrez à résoudre cette année, côté maths avec l'exponentielle et côté physique avec la chute dans un fluide. Le chapitre F1 vous a donné la fin de l'histoire (la limite) ; les équations différentielles vous donneront le film entier.

PIÈCE N° 39 · PASSERELLE

Qui gagne la course à l'infini ?

Le cours a arbitré le duel entre l'exponentielle et les puissances. L'échelle complète compte quatre barreaux, du logarithme à la factorielle.

↔ prolonge COURS F1, § 4 · les croissances comparées et leur marge « Suite »

RANGEONS tout le monde sur la ligne de départ, et laissons courir vers $+\infty$. Le classement final est une échelle à quatre barreaux, chacun écrasant le précédent :

$$\ln x \lll x^a \lll e^x \lll x! \quad (a > 0).$$

Le cours a démontré le barreau central : l'exponentielle bat toute puissance. Le barreau du bas dit que le logarithme, que le chapitre F3 définira, est battu par *toute* puissance, même $x^{0,01}$. Celui du haut dit que la factorielle, croisée au chapitre A2, bat même l'exponentielle.

Pour les curieux du fond. Photo-finish en $x = 100$ (valeurs recalculées) :

$\ln 100$	$\sqrt{100}$	100^2	100^{10}	e^{100}	$100!$
4,6	10	10^4	10^{20}	$\approx 2,7 \times 10^{43}$	$\approx 9,3 \times 10^{157}$

Chaque colonne ridiculise la précédente. Mais l'échelle ne dit rien du *calendrier* : $x^{0,01}$ finit par battre $\ln x$, c'est promis par le barreau du bas, et pourtant le dépassement n'a lieu qu'au-delà de

$x \approx 10^{281}$, un nombre sans nom. Quant à la factorielle, elle double l'exponentielle dès $n = 6$ (car $6! = 720 > 403 \approx e^6$) et ne regarde plus jamais derrière : c'est elle qui condamnait la table des 22! mélodies de Mersenne, au chapitre A2.

N.B. Pourquoi attendre F3 pour le barreau du bas ? Parce que le logarithme n'existe pas encore dans votre cours. Quand il existera, la preuve sera un cadeau : en posant $x = \ln t$, la limite $\frac{\ln t}{t^a} \rightarrow 0$ se déduit de $\frac{x}{e^{ax}} \rightarrow 0$, déjà démontrée en F1. Un seul théorème de croissances comparées, et toute l'échelle en découle par changements de variable.

PIÈCE N° 40 · ARCHIVES

Brèves de coulisses

Trois éclats du chapitre qui n'ont pas trouvé leur place, trop beaux pour être coupés.

Les carabiniers. Le théorème des gendarmes n'a pas de nom officiel : les textes disent sobrement « théorème d'encadrement ». Mais chaque pays l'arrête à sa façon. En Italie, c'est le *teorema dei due carabinieri* : deux carabiniers encadrent un prisonnier, et où qu'ils aillent ensemble, le prisonnier y va aussi. En anglais, c'est le *squeeze theorem*, ou le *sandwich theorem* : la fonction est la garniture, coincée entre deux tranches qui se rejoignent.

Le professeur de gymnastique. Avant d'être surnommé le père de l'analyse moderne, Karl Weierstrass a passé quatorze ans comme professeur de collège en Prusse, à Deutsch-Krone puis à Braunsberg, où il enseignait les mathématiques, la physique, la botanique, la calligraphie et la gymnastique, en cherchant seul la nuit. Un article sur

les fonctions abéliennes, publié en 1854 dans une revue que personne n'attendait de lui, éblouit les universités : doctorat honoris causa, puis chaire à Berlin. L'homme du ε a longtemps corrigé des flexions.

La limite en français. En 1821, Cauchy définit la limite sans un seul symbole : « lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra ». Quarante ans plus tard, Weierstrass transforme la phrase en formule : le $\forall \varepsilon$ du chapitre. Comparez les deux : tout y est déjà, la tolérance (« aussi peu que l'on voudra ») et le seuil (« finir par »). Il ne manquait que l'alphabet.

Vrai ou légende ? Pour approcher les racines d'une équation, Newton faisait glisser un point le long des tangentes à la courbe.

Faites votre pari. La réponse vous attend sur le compagnon numérique.

LA SUITE DANS LES COULISSES NUMÉRIQUES

Trois tiroirs restent ouverts sur le compagnon numérique : la réponse au Vrai ou légende, le zoom sans fond dans la fonction de Weierstrass, et la course en direct entre la dichotomie et la méthode de Newton.