



COULISSES • F3. FONCTION LOGARITHME

L'envers des tables

Le cours vous a donné la réciproque de l'exponentielle, propre et bien peignée. Voici ce qu'il a tu. Le logarithme du baron écossais était décroissant, et ses tables transformaient les produits en sommes à une constante près, qu'il fallait retrancher à chaque calcul. Un jésuite a démontré qu'une aire savait multiplier, en pressant une hyperbole comme un accordéon. Une formule exacte de 1668 calcule moins bien que les racines carrées de 1624. Les premières pages des vieilles tables sont plus sales que les dernières, et cette saleté détecte aujourd'hui les fraudeurs. Et au dos d'une table de logarithmes, un lycéen de quinze ans a écrit une ligne qu'il a gardée pour lui pendant cinquante-sept ans. Chaque pièce se lit seule, aucune n'est exigible, et toutes contiennent de vraies mathématiques.

Plan de la visite

ARCHIVES • Le laird qui arrêta le temps (10 min)	1
AUTRE CHEMIN • L'hyperbole pressée comme un accordéon (7 min)	3
CONTRE-PIED • La formule exacte qui calculait mal (8 min)	4
FRONTIÈRE • Les pages sales et le chiffre 1 (8 min)	5
PASSERELLE • La note au dos de la table (7 min)	7
ARCHIVES • Brèves de coulisses (4 min)	8

PIÈCE N° 48 • ARCHIVES

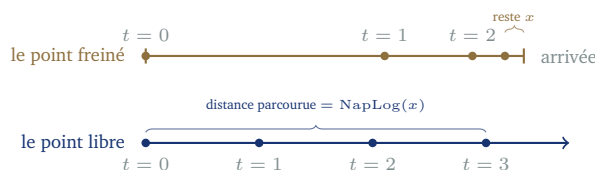
Le laird qui arrêta le temps

Le cours résume l'affaire en une marge : vingt ans de calcul, des tables, la gloire. Voici la machine qui tournait dans le manoir, et elle ne ressemble pas au logarithme que vous connaissez.

↔ prolonge COURS F3, § 2 • la marge Napier • Kepler et la boîte Briggs

LES logarithmes sont nés d'une course entre deux mobiles. Voici la définition, traduite du latin de la *Constructio*, l'ouvrage posthume de 1619 où Napier dévoile sa fabrication (les tables de 1614 livraient les résultats, pas la recette). Sur un segment de longueur dix millions, un premier point part d'une extrémité, freiné en permanence : sa vitesse est proportionnelle à la distance qui lui reste à

parcourir. Sur une droite infinie, un second point part au même instant, à la même vitesse initiale, mais sans jamais ralentir. Le *logarithme* d'une distance restante x est la distance parcourue par le point libre au moment où le point freiné en est à x de l'arrivée. Aucune équation, aucune exponentielle : du mouvement. Napier pense en horloger, et sa définition est, un demi-siècle avant Newton, une équation différentielle qui ne dit pas son nom.



Le premier point s'écrase contre l'arrivée sans jamais l'atteindre ; le second file à vitesse constante. Le logarithme apparie leurs positions au même instant. Les deux axes n'ont pas la même échelle : en vraie grandeur, le point libre est toujours devant.

Pour les curieux du fond. Traduisons la course en notations modernes. Le point freiné vérifie une décroissance dont la vitesse est proportionnelle au reste : sa distance restante au temps t vaut $10^7 e^{-t}$ (en unités bien choisies) ; le point libre, parti à la vitesse 10^7 , a parcouru $10^7 t$. Éliminons le temps : quand la distance restante vaut x , on a $t = \ln \frac{10^7}{x}$, et le point libre a parcouru

$$\forall x \in]0; 10^7], \quad \text{NapLog}(x) = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}.$$

Regardez bien cette formule : la fonction est **décroissante**, nulle en 10^7 , et $\text{NapLog}(1) \approx 161\,180\,957$. Le logarithme historique n'est pas croissant, ne vaut pas 0 en 1, et n'est pas le vôtre : « népérien » est un hommage, pas une paternité.

Le plus instructif est le défaut de la machine. La propriété fondamentale de votre cours, produits en sommes, n'est vraie chez Napier qu'à *une constante près*, et cette constante est énorme.

Pour les curieux du fond. Trois lignes suffisent, avec la famille algébrique du § 2, la formule de NapLog gardant son sens pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\text{NapLog}(a) + \text{NapLog}(b) = 10^7 \ln \frac{10^7}{a} + 10^7 \ln \frac{10^7}{b} = 10^7 \ln \frac{10^{14}}{ab} = \text{NapLog}(ab) + 10^7 \ln 10^7.$$

Or $10^7 \ln 10^7 = \text{NapLog}(1)$: additionner deux logarithmes de Napier, c'est obtenir celui du produit *augmenté de la constante* $\text{NapLog}(1) \approx 161\,180\,957$, à retrancher à chaque calcul. Les tables de 1614 faisaient gagner des mois, mais chaque multiplication payait ce péage.

C'est ce péage que le voyage de Briggs abolit. À Édimbourg, en 1615 puis 1616, l'homme de Londres et le laird conviennent de refonder le système : imposer $\log 1 = 0$, pour que la constante parasite disparaisse, et $\log 10 = 1$, pour épouser l'écriture décimale. Napier meurt en 1617 sans avoir recalculé ; Briggs portera seul les trente mille logarithmes de l'*Arithmetica Logarithmica*. Quant à Jost Bürgi, l'horloger impérial de Prague et collègue de Kepler, ses propres tables étaient prêtes vers 1600 : il les publia en 1620, six ans après Napier, et l'histoire ne retient qu'un seul nom par invention.

Bonus. À quelle distance restante x le point libre a-t-il parcouru exactement 10^7 , c'est-à-dire quand a-t-on $\text{NapLog}(x) = 10^7$? La réponse, élégante, vit sur le compagnon numérique.

Vrai ou légende ? Lors de leur première rencontre à Édimbourg, Napier et Briggs seraient restés un quart d'heure face à face, muets d'admiration, avant qu'un seul mot ne soit prononcé.

Faites votre pari. La réponse vous attend sur le compagnon numérique.

PIÈCE N° 49 · AUTRE CHEMIN

L'hyperbole pressée comme un accordéon

Le cours a promis qu'une aire vaudrait un logarithme, preuve au chapitre F6. Voici le raisonnement de 1647, modernisé : il tient en une transformation qui ne change aucune aire.

↔ prolonge COURS F3, § 7.4 · la promesse de l'aire, Saint-Vincent et Sarasa

On ne cherchait pas le logarithme, on cherchait le cercle. Le jésuite anversois Grégoire de Saint-Vincent poursuit toute sa vie la quadrature du cercle, et publie en 1647 un monument de plus de mille deux cents pages, l'*Opus geometricum*, qui échoue sur le cercle mais triomphe ailleurs sans le savoir. Au détour de la proposition 109 du livre 6, il démontre ceci : sous l'hyperbole, quand les abscisses avancent en progression *géométrique*, les aires découpées avancent en progression *arithmétique*. Des produits d'un côté, des sommes de l'autre : son élève Alphonse Antonio de Sarasa, deux ans plus tard, ose le mot que le maître n'avait pas écrit : ces aires *sont* des logarithmes.

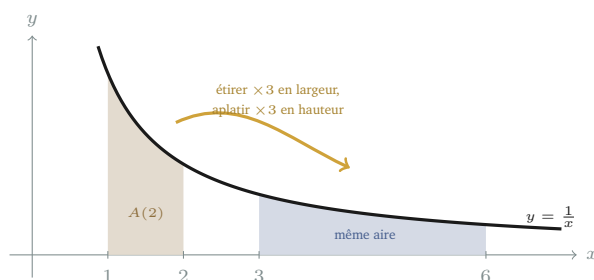
Pour les curieux du fond. Voici l'argument, dans une mise en scène moderne que Saint-Vincent aurait reconnue. Notons $A(a)$ l'aire sous la courbe $y = \frac{1}{x}$ entre les abscisses 1 et a (pour $a \geq 1$), et appliquons au plan la transformation

$$(x; y) \mapsto \left(kx; \frac{y}{k}\right) \quad (k \geq 1) :$$

elle étire les longueurs horizontales d'un facteur k et comprime les verticales du même facteur, donc elle **préserve toutes les aires** ($k \times \frac{1}{k} = 1$: chaque petit rectangle garde sa surface). Or elle laisse l'hyperbole invariante : le point $(x; \frac{1}{x})$ est envoyé sur $(kx; \frac{1}{kx})$, qui est encore dessus. La région sous l'hyperbole entre 1 et a est donc envoyée exactement sur la région entre k et ka , et ces deux régions ont la *même aire* :

$$A(ka) - A(k) = A(a), \quad \text{c'est-à-dire} \quad A(ka) = A(k) + A(a).$$

L'aire transforme les produits en sommes.



L'accordéon en image : la région entre 1 et 2 (aire $\ln 2$), pressée d'un facteur 3, devient la région entre 3 et 6, plus large, plus basse, d'aire

rigoureusement égale.

Arrêtez-vous sur ce que vous venez de lire : c'est l'équation fonctionnelle du § 6.2 de votre cours, celle dont la démonstration du parcours étoilé a montré que toute solution dérivable est un multiple de $\ln$. La géométrie de 1647 et l'analyse de votre chapitre se referment l'une sur l'autre, à deux réserves près, que le chapitre F6 lèvera : étendre l'aire au-dessous de l'abscisse 1 (en la comptant négativement), et établir qu'une aire accumulée est dérivable. L'aire sous l'hyperbole est une machine à produits, donc un logarithme. Reste à identifier *lequel*, c'est-à-dire la constante multiplicative, et c'est exactement ce que le théorème fondamental du chapitre F6 tranchera : la dérivée de l'aire est $\frac{1}{x}$, la constante vaut 1, l'aire est $\ln$ lui-même.

N.B. Mesurez le renversement historique : les tables de Napier datent de 1614, l'aire de Saint-Vincent de 1647, la série de Mercator de 1668, et c'est seulement Euler, en 1748, qui définit $\ln$ comme réciproque d'une exponentielle enfin première. Votre cours suit l'ordre d'Euler ; l'histoire a suivi l'ordre inverse : le logarithme a vécu cent trente ans avant la fonction dont il est officiellement le miroir.

PIÈCE N° 50 · CONTRE-PIED

La formule exacte qui calculait mal

Le laboratoire du cours oppose la dichotomie et les racines carrées de Briggs. Il manquait la troisième concurrente, la plus élégante : une formule exacte pour $\ln 2$. Elle finit dernière.

↔ prolonge COURS F3, § 8.2 · la méthode de Briggs et sa table d'erreurs

GRANDE année pour le logarithme que 1668 : Nicolaus Mercator, mathématicien du Holstein installé à Londres, publie sa *Logarithmotechnia* et y baptise *logarithmus naturalis* le logarithme de l'aire hyperbolique. Surtout, il y publie une identité stupéfiante, trouvée aussi par Hudde et par Newton qui n'avaient rien publié : le logarithme, cette fonction qu'on ne calculait qu'à coups de tables, s'écrit comme une somme infinie de fractions,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1).$$

Pour $x = 1$, le résultat est d'une beauté à encadrer :

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Pour les curieux du fond. D'où sort la somme ? De la série géométrique de première : pour $|t| < 1$, $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$. Or le chapitre F6 montrera que $\ln(1+x)$ est l'aire sous la courbe de $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ entre 0 et x ; en prenant l'aire de chaque terme (l'aire sous t^k entre 0 et x vaut $\frac{x^{k+1}}{k+1}$), la série géométrique devient la série de Mercator, terme à terme. La démonstration honnête demande le chapitre F6 ; l'idée tient dans cette phrase.

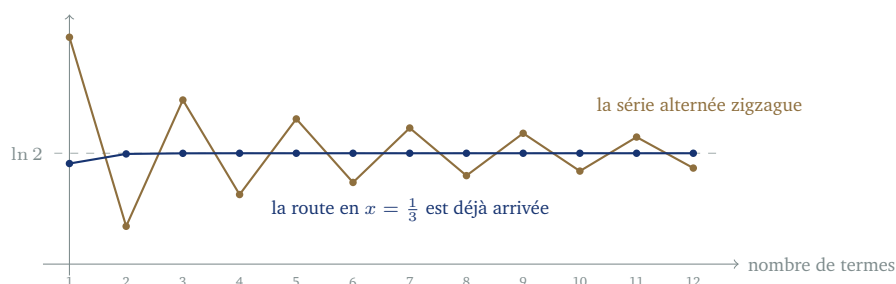
Voici le contre-pied. Cette formule *exacte*, moderne, infiniment plus élégante que des extractions de racines, est un désastre pratique. Les valeurs sont recalculées : après mille termes, l'erreur dépasse encore 10^{-4} ; il faut **un million de termes** pour gagner la sixième décimale. La formule de 1668 calcule moins bien que les racines carrées de 1624 : quarante-quatre ans *avant* elle, Briggs faisait mieux avec une plume.

Une formule exacte n'est pas encore un algorithme.

Pour les curieux du fond. Le remède tient dans une variable mieux choisie. En combinant la série de $\ln(1+x)$ et celle de $\ln(1-x)$, les termes pairs s'annulent :

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \right) \quad (-1 < x < 1),$$

et il suffit de remarquer que $\frac{1+x}{1-x} = 2$ pour $x = \frac{1}{3}$. La même cible, $\ln 2$, s'atteint alors par une série dont chaque terme est environ neuf fois plus petit que le précédent : **douze termes donnent douze décimales** (recalculé), là où la série alternée en demandait des millions. Newton employait déjà de telles combinaisons pour bâtir ses tables personnelles. Même cible, même calcul infini : seule la *route* a changé.



Douze étapes de chaque route (valeurs recalculées) : la série alternée encadre $\ln 2$ sans se décider, la série accélérée est indiscernable de la cible dès le quatrième terme.

N.B. La leçon a fondé une discipline : entre une formule vraie et un calcul qui aboutit, il y a un choix de chemin, et ce choix se mesure (vitesse de convergence, coût, précision perdue en route, comme les flottants du laboratoire). Elle s'appelle aujourd'hui l'analyse numérique, et vous l'avez pratiquée sans le savoir à chaque laboratoire depuis le chapitre F1.

Bonus. L'erreur de la série alternée tronquée après N termes est majorée par le premier terme négligé, $\frac{1}{N+1}$. Combien de termes faut-il pour garantir six décimales de $\ln 2$? Réponse chiffrée sur le compagnon numérique.

PIÈCE N° 51 · FRONTIÈRE

Les pages sales et le chiffre 1

Le cours compte les chiffres d'un nombre avec le logarithme décimal. Voici ce que le logarithme dit du premier chiffre, et pourquoi le fisc s'y intéresse.

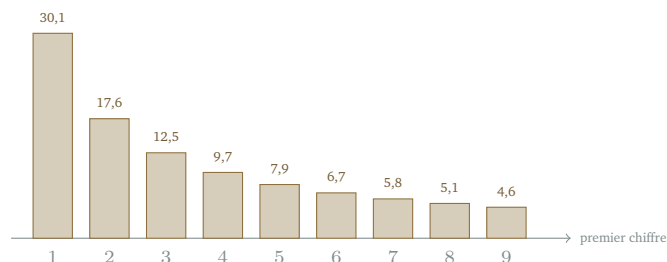
↔ prolonge COURS F3, § 7.1 · compter les chiffres sans écrire le nombre

OUVREZ un recueil de tables de logarithmes ayant beaucoup servi, et regardez la tranche : les premières pages, celles des nombres commençant par 1, sont plus noircies que les dernières. L'astronome Simon Newcomb le remarque en 1881 et en tire un article : les nombres que l'on rencontre en pratique commencent plus souvent par 1 que par 9. Personne ne relève. Il faut attendre 1938 pour que le physicien Frank Benford refasse l'observation sur les mêmes pages sales, la teste sur vingt mille données (superficies de bassins fluviaux, constantes physiques, numéros de rue), et publie la loi qui

porte son nom : pour tout chiffre $d \in \{1, \dots, 9\}$, la proportion des nombres de premier chiffre d vaut

$$P(d) = \log \left(1 + \frac{1}{d} \right),$$

soit environ 30,1 % pour le chiffre 1, 17,6 % pour le 2, et 4,6 % seulement pour le 9.



L'escalier de Benford, en pourcentages : chaque marche vaut $\log(1 + \frac{1}{d})$, et l'escalier entier descend d'un facteur six et demi entre le chiffre 1 et le chiffre 9.

Pour les curieux du fond. Pourquoi le logarithme ? Parce que le premier chiffre d'un nombre N ne dépend que de la *partie fractionnaire* de $\log N$ (sa partie entière, à une unité près, compte les chiffres, dit le § 7.1 ; sa partie fractionnaire dit lesquels). Une collection de données qui s'étale sur plusieurs ordres de grandeur, et dont la loi ne doit pas dépendre de l'unité choisie (mètres ou pieds, euros ou dollars : multiplier par une constante ne doit rien changer), répartit ces parties fractionnaires *uniformément* entre 0 et 1. Le premier chiffre vaut d quand la partie fractionnaire tombe entre $\log d$ et $\log(d + 1)$: probabilité $\log(d + 1) - \log d = \log(1 + \frac{1}{d})$. La loi de Benford est la loi uniforme, lue à travers un logarithme.

Le plus beau spécimen est mathématique, et il vous ramène au record du cours. Les puissances de 2 suivent la loi de Benford avec une exactitude déraisonnable : sur les dix mille premières (recalculé), le chiffre 1 ouvre 30,10 % des nombres, contre 30,103 % prédits ; tous les autres chiffres tombent à moins de 10^{-4} de la prédiction. La raison est un théorème d'équirépartition de Weyl : $\log 2$ étant irrationnel, les parties fractionnaires de $n \log 2$ se répartissent uniformément. Et la mantisse fait mieux que compter : la partie fractionnaire de $136\,279\,841 \times \log 2$ vaut 0,9453..., et $10^{0,9453} \approx 8,82$: le nombre premier record du § 7.1, dont personne n'écrira jamais tous les chiffres, **commence par 88169**. Le logarithme lit le premier chiffre d'un nombre qu'on ne peut pas voir, comme il en comptait le total.

N.B. La frontière est administrative autant que mathématique : depuis que l'économiste Hal Varian l'a proposé en 1972, la loi de Benford sert de détecteur de fraudes. Des comptes truqués sont inventés par un cerveau humain, qui répartit les premiers chiffres trop uniformément ; le fisc, lui, compare à la courbe en $\log(1 + \frac{1}{d})$, et convoque les écarts. On a vu des fraudes fiscales, comptables et électorales franchir ce test sans encombre, et d'autres y laisser leur liberté : mentir sur des nombres sans connaître le logarithme est devenu un métier à risque.

Bonus. Deux défis : écrire les premiers chiffres de $2^1, 2^2, \dots, 2^{30}$ et compter les 1 de tête ; puis démontrer, en trois lignes et sans limite, que $\log 2$ est irrationnel (supposer $\log 2 = \frac{p}{q}$ et regarder 2^q). Réponses sur le compagnon numérique.

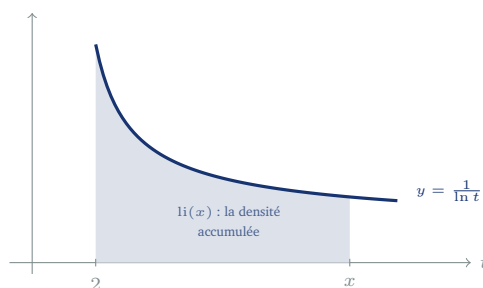
La note au dos de la table

Le cours raconte Gauss, quinze ans, et la densité des nombres premiers. Voici ce que disait vraiment la lettre de 1849, et l'objet qu'elle propose : mieux que la formule du cours.

↔ prolonge COURS F3, § 7.3 · Gauss, quinze ans, et la densité des nombres premiers

SUR la fin de sa vie, en décembre 1849, Gauss répond à une lettre de l'astronome Encke qui lui parlait de la raréfaction des nombres premiers. Sa réponse est un souvenir d'adolescence : en 1792 ou 1793, ayant reçu en cadeau un recueil de tables de logarithmes complété des suppléments de Lambert, qui donnent les facteurs des entiers jusqu'à cent deux mille, il avait compté les premiers par tranches de mille, et noté au dos d'une page que leur densité autour de n tombait comme $\frac{1}{\ln n}$. Puis il n'avait rien publié, ni alors, ni pendant les cinquante-sept ans qui suivirent.

La lettre de 1849 précise l'idée, et la précision change tout. Si la densité vaut $\frac{1}{\ln t}$ en chaque t , alors le bon compte des premiers jusqu'à x n'est pas $\frac{x}{\ln x}$ (la densité du bord, appliquée à tout l'intervalle) : c'est la densité *accumulée*, l'aire sous la courbe de $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ de 2 à x , que l'on note $\text{li}(x)$. Encore une aire, encore le chapitre F6 en embuscade.



La densité des premiers décroît le long du trajet : Gauss l'additionne pas à pas (l'aire), au lieu d'appliquer partout celle du point d'arrivée ($\frac{x}{\ln x}$). Toute la différence du tableau ci-dessous vient de là.

Pour les curieux du fond. La différence n'est pas cosmétique (valeurs recalculées, $\pi(x)$ exact) :

x	$\pi(x)$	$x/\ln x$	$\text{li}(x)$
10^6	78 498	72 382	78 627
10^9	50 847 534	48 254 942	50 849 234

En 10^9 , la formule du cours se trompe de 2,6 millions ; l'aire de Gauss se trompe de 1 700, sur cinquante millions de premiers : une précision de 0,003 %, conjecturée par un lycéen sur des tables imprimées. Et la densité se lit aussi en écart : autour de 10^9 , deux premiers consécutifs sont séparés en moyenne de $\ln 10^9 \approx 20,7$.

La passerelle part d'ici et ne s'arrête plus. La conjecture du dos de table est devenue le *théorème des nombres premiers*, démontré en 1896 par Hadamard et La Vallée Poussin ; la route qui y mène passe par un mémoire de Riemann de 1859, une dizaine de pages qui relient les premiers aux zéros d'une fonction de variable complexe, et dont une hypothèse, toujours ouverte, mise à prix un million de dollars, dit précisément à quel point $\text{li}(x)$ approche bien $\pi(x)$. En classe préparatoire puis au-delà, vous recroiserez cette route : elle commence à la page d'une table de logarithmes, du côté sale, celui des chiffres 1.

N.B. Refermez la boucle du numéro : le logarithme est né en 1614 pour accélérer des multiplications, et deux siècles plus tard, la même fonction gouverne la répartition des nombres premiers, les briques mêmes de la multiplication. L'outil de calcul est devenu loi de la nature arithmétique. Peu d'objets mathématiques ont connu pareille promotion.

PIÈCE N° 53 · ARCHIVES

Brèves de coulisses

Trois éclats du chapitre qui n'ont pas trouvé leur place, trop beaux pour être coupés.

La lettre qui n'était pas un hommage. Le symbole e apparaît sous la plume d'Euler vers 1727, dans un manuscrit non publié sur la balistique, puis dans une lettre à Goldbach en 1731, avant l'imprimé (*Mechanica*, 1736) et la consécration de *l'Introductio* de 1748. Pourquoi cette lettre ? On l'ignore. La seule hypothèse que les historiens écartent est le e d'Euler : l'homme était d'une modestie maladroite. Restent les conjectures, dont la plus désarmante : a , b , c et d étant déjà pris par les constantes usuelles, e était la première lettre libre. La plus célèbre des constantes d'analyse porte peut-être un nom de place de parking.

Trois cent cinquante ans de règne. Le cours a montré la règle qui transforme les mises bout à bout en multiplications. L'idée naît vers 1620 avec la ligne de Gunter, prend sa forme coulissante chez Oughtred vers 1622, et gouverne ensuite trois siècles et demi d'ingénierie : ponts, moteurs, avions et les trajectoires d'Apollo ont été calculés

à la règle. Le règne s'achève brutalement en 1972, quand la première calculatrice scientifique de poche, la HP-35, rend l'objet obsolète en quelques mois. Hewlett-Packard la vendait d'ailleurs comme « une règle à calcul électronique, rapide et d'une extrême précision » : l'assassin portait le nom de sa victime.

La constante entre la somme et l'aire. Additionnez les inverses, $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, puis retranchez $\ln n$: la différence ne tend ni vers 0 ni vers l'infini, mais vers une constante, $\gamma \approx 0,5772$, mise en évidence par Euler en 1734 et publiée en 1740 (recalculé : à $n = 10^6$, la différence vaut 0,57722). Elle mesure l'écart définitif entre la somme discrète et l'aire continue qui lui ressemble. Près de trois siècles plus tard, on ignore toujours si γ est rationnel : la question, d'apparence inoffensive, est l'un des problèmes ouverts les plus célèbres des mathématiques.

LA SUITE DANS LES COULISSES NUMÉRIQUES

Quatre tiroirs restent ouverts sur le compagnon numérique : la réponse au Vrai ou légende, le script qui teste la loi de Benford sur les puissances de 2, la table complète du duel entre l'aire de Gauss et la formule du cours, et les réponses aux défis du numéro.

COULISSES N° 6 · ANNÉE 2026-2027