



COULISSES • F4. FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

L'envers de l'onde

Le cours vous a montré la scène : un cercle, deux dérivées, des équations qui se dessinent. Ici, on passe derrière le rideau. Un mot né d'une faute de lecture, un calculateur indien en avance de deux siècles, trois géants qui se déchirent à propos d'une corde de guitare, une machine de laiton qui a prédit la mer du Débarquement, et un sursaut que rien ne fait mourir. Chaque pièce se lit seule, dans l'ordre qui vous plaira ; aucune n'est exigible, toutes sont faites pour être racontées à table.

Plan de la visite

ARCHIVES • La toge, la corde et l'erreur de copiste (9 min)	1
AUTRE CHEMIN • Le sinus en pièces détachées (8 min)	3
CONTRE-PIED • La corde qui rompit la notion de fonction (9 min)	4
PASSERELLE • Dix sinusoïdes de laiton (8 min)	5
FRONTIÈRE • Le sursaut qui refuse de mourir (8 min)	6
ARCHIVES • Brèves de coulisses (4 min)	7

PIÈCE N° 54 • ARCHIVES

La toge, la corde et l'erreur de copiste

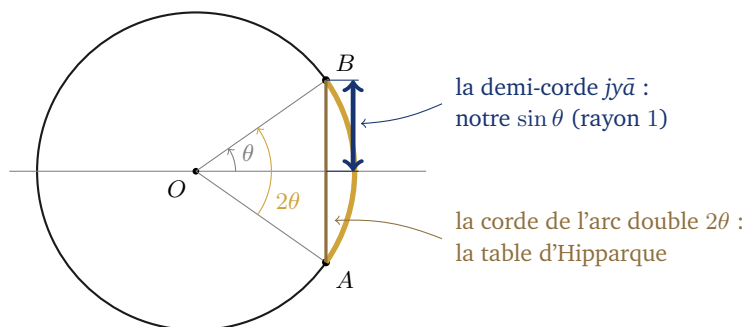
Le mot le plus technique du chapitre est peut-être né d'une lecture fautive, un jour du XII^e siècle, sur la table d'un traducteur de Tolède.

↔ prolonge COURS F4, § 1.2 • la note de marge sur le mot sinus

SUR la table d'un traducteur de Tolède, vers 1145, un manuscrit arabe d'astronomie attend son tour. L'homme qui le déchiffre transpose en latin des pages de calculs venus de Bagdad, et bute sur un mot de trois consonnes : *j-y-b*. L'arabe s'écrit sans voyelles brèves ; le squelette peut se lire *jība*, mot technique qui ne veut rien dire d'autre que lui-même, ou *jayb*, mot courant qui désigne le repli d'un

vêtement, l'échancrure d'une tunique sur la poitrine. Le traducteur choisit le mot qui existe. Et il traduit : *sinus*, le pli de la toge.

Pour comprendre ce qui vient de se perdre, il faut remonter la chaîne. Elle commence au II^e siècle avant notre ère : Hipparque, pour prédire les positions des astres, dresse la première table trigonométrique connue. Ce ne sont pas des sinus, mais des *cordes* : à chaque angle, la longueur du segment qui sous-tend l'arc. Ptolémée perfectionne l'outil dans l'*Almageste*, de demi-degré en demi-degré. Puis les astronomes indiens font le geste décisif : plutôt que la corde de l'arc entier, ils tabulent la *demi-corde* de l'arc double, qui simplifie tous les calculs de triangles. Aryabhata, vers 499, l'appelle *ardha-jyā*, la demi-corde d'arc, vite abrégé en *jyā*, la corde d'arc. Traduit en arabe à Bagdad, le mot devient *jība*, translittération fidèle et dépourvue de sens propre. Il ne restait qu'à mal le relire.



Voilà comment une demi-corde indienne, translittérée à Bagdad puis mal relue à Tolède, s'est retrouvée baptisée d'après un drapé romain. Le plus beau est que la géométrie, elle, n'a rien perdu au voyage : seule l'étiquette a changé de sens.

Pour les curieux du fond. La corde et le sinus se convertissent en une ligne : sur un cercle de rayon R , pour tout angle $\theta \in [0; \pi]$, $\text{corde}(2\theta) = 2R \sin \theta$. La table de Ptolémée se vérifie donc avec votre calculatrice : pour l'arc de 36° et son rayon $R = 60$, il tabule (en base soixante) $37;4,55$, soit $37,0819$; la formule donne $2 \times 60 \times \sin 18^\circ = 37,0820$. Un écart inférieur à 10^{-4} , obtenu au II^e siècle sans calculatrice. Et cette corde de 36° cache un trésor : sur le cercle de rayon 1, c'est le côté du décagone régulier, et $2 \sin 18^\circ = 0,618\,033\dots$ est exactement $\frac{1}{\varphi}$, l'inverse du nombre d'or.

N.B. La même chaîne de traduction a donné son nom au chapitre entier : trigonométrie, forgé en 1595 seulement, du grec trigonon (triangle) et metron (mesure). Le mot est plus jeune que l'objet de dix-sept siècles.

Bonus. Sans calculatrice : que vaut $\text{corde}(60^\circ)$ sur un cercle de rayon R ? Et $\text{corde}(90^\circ)$? Deux valeurs remarquables du cours suffisent. Réponses sur le compagnon.

Vrai ou légende ? Le mot *sinus* serait né d'une erreur de traduction : un traducteur médiéval aurait lu le squelette consonantique arabe *j-y-b* comme « repli de vêtement » au lieu d'y reconnaître la corde d'arc indienne.

Faites votre pari. La réponse vous attend sur le compagnon numérique.

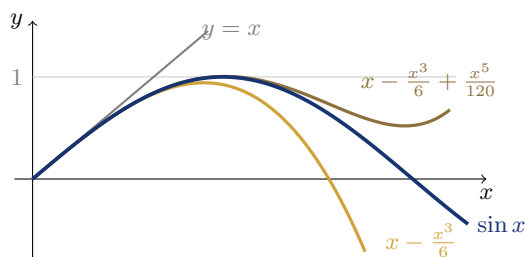
Le sinus en pièces détachées

Au Kerala, vers 1400, une école d'astronomes démonte le sinus en polynômes, deux siècles et demi avant que l'Europe n'invente le calcul infinitésimal.

↔ prolonge COURS F4, § 3.3 · la machine à inégalités du parcours étoilé

IMAGINEZ un astronome du Kerala, à la pointe sud de l'Inde, vers 1400. Il s'appelle Madhava de Sangamagrama, il calcule des éphémérides, et il a besoin de sinus plus précis que toutes les tables existantes. Sa solution ne ressemble à rien de connu : plutôt que de mesurer des cordes, il *démonte* le sinus en pièces polynomiales, qu'il ajoute une à une. Première pièce : x . Deuxième : retirer $\frac{x^3}{6}$. Troisième : rajouter $\frac{x^5}{120}$. À chaque pièce, l'erreur fond.

Le cours vous a fait fabriquer les deux premières : la machine à inégalités du parcours étoilé établit que, pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$. L'école du Kerala tourne la manivelle un cran de plus, et un cran encore : le *Yuktibhāṣā*, traité rédigé vers 1530 par ses héritiers, contient les développements complets de sin et cos avec leurs démonstrations, ce qui en fait pour certains historiens le premier texte d'analyse de l'histoire. L'Europe retrouvera ces sommes infinies avec Newton et Gregory, deux siècles et demi plus tard, et les baptisera d'un nom qui écrase l'antériorité indienne : séries de Taylor.



Pour les curieux du fond. La précision se mesure. Pour $x = 0,5$: $\sin x = 0,479\,426$, la pièce $x - \frac{x^3}{6}$ donne $0,479\,167$ (erreur $2,6 \cdot 10^{-4}$), et $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ donne $0,479\,427$ (erreur $1,5 \cdot 10^{-6}$) : chaque pièce divise l'erreur par près de deux cents. La mécanique de fabrication est exactement celle du cours : poser l'écart, le dériver jusqu'à retrouver une inégalité connue, puis remonter les intégrations une à une ; le signe alterne à chaque étage, si bien que, sur $\mathbb{R}_+$, les polynômes *encadrent* le sinus en le prenant en tenaille, par-dessous puis par-dessus. Quant aux tables de Madhava, tabulées de $3^\circ 45'$ en $3^\circ 45'$, les historiens y mesurent une précision qui atteint la huitième décimale.

N.B. Le même Madhava a démonté $\frac{\pi}{4}$ en pièces détachées : $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$, série redécouverte par Leibniz. Les Coulisses du chapitre F3 (pièce 50) vous ont montré pourquoi ces sommes alternées convergent trop lentement pour calculer ; Madhava le savait aussi, et avait déjà inventé des termes correctifs pour accélérer.

Bonus. À la main, sans calculatrice : estimez $\sin(0,5)$ avec la pièce $x - \frac{x^3}{6}$, en écrivant $0,5^3 = 0,125$. Combien de décimales exactes obtenez-vous ? Réponse sur le compagnon.

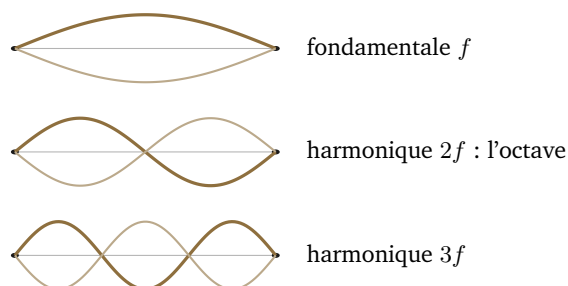
La corde qui rompt la notion de fonction

Idée reçue : une fonction, c'est une formule. Il a fallu une corde de guitare, trois géants furieux et quatre-vingts ans pour comprendre que non.

↔ prolonge COURS F4, § 5.4 · la note de marge sur la querelle des cordes vibrantes

NOUS sommes en 1747. Jean le Rond d'Alembert vient de réussir un coup de maître : mettre en équation le mouvement d'une corde tendue qui vibre, et la résoudre. Sa solution est d'une élégance parfaite : toute vibration est la superposition de deux ondes qui voyagent en sens contraires le long de la corde. Mais d'Alembert y met une condition : les formes initiales admissibles doivent être données par une *formule*, une « équation », comme on dit alors. Euler proteste aussitôt : quand un musicien pince une corde, il lui donne une forme en coin, tracée « à main levée », qui n'obéit à aucune formule ; la physique n'a pas à attendre la permission de l'algèbre.

Daniel Bernoulli, en 1753, jette une troisième idée dans la mêlée, la plus folle : toute vibration de la corde, quelle qu'elle soit, serait une superposition d'ondes sinusoïdales pures, la fondamentale et ses harmoniques, celles-là mêmes que l'oreille d'un musicien sait entendre. D'Alembert et Euler, pour une fois d'accord, jugent la chose impossible : comment une somme de courbes parfaitement lisses fabriquerait-elle un coin ? La dispute s'enlise pendant des décennies, et pour une raison profonde : les trois hommes ne mettent pas la même chose sous le mot *fonction*. Formule pour l'un, courbe pour l'autre, somme infinie pour le troisième.



Vous connaissez la fin : Fourier ose (1807), Dirichlet démontre (1829), et Bernoulli avait raison avant tout le monde. Mais le vrai butin de la querelle n'est pas là. Pour trancher, les mathématiciens ont dû répondre à la question que la corde leur avait mise sous les yeux : *qu'est-ce qu'une fonction* ? La réponse moderne, celle de vos cours (un procédé qui associe à chaque nombre un nombre, formule ou non), a été forgée dans cette dispute. Votre définition de la classe de seconde est une pièce détachée d'une corde de guitare.

Pour les curieux du fond. Chaque harmonique de la corde est un objet du chapitre. Le mode numéro n d'une corde de longueur L garde à chaque instant la forme $x \mapsto \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, dont l'amplitude oscille comme $y : t \mapsto \cos(n\omega t)$, où ω désigne la pulsation du mode fondamental : or cette fonction vérifie $\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) = -(n\omega)^2 y(t)$ (dérivez deux fois avec la formule de composée du cours). Chaque mode est donc un oscillateur harmonique, de fréquence proportionnelle à n : la fondamentale, l'octave à $2f$, la douzième à $3f$... Le dosage de ces oscillateurs fait le timbre : c'est lui qui distingue un la de guitare d'un la de piano.

Bonus. Vérifiez l'affirmation de l'encadré : dérivez deux fois $t \mapsto \cos(n\omega t)$ et concluez. Trente secondes avec les outils du cours ; correction sur le compagnon.

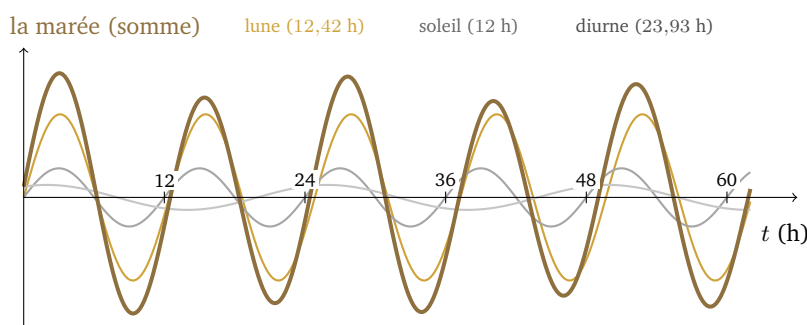
Dix sinusôides de laiton

Comment une somme de cosinus, actionnée à la manivelle, a prédit les marées d'un siècle, et celles d'un débarquement.

↔ prolonge COURS F4, § 5.1 ET § 5.4 · le signal sinusoïdal et les sommes de sinusôides

UN pli du courrier d'octobre 1943 atterrit sur le bureau d'Arthur Doodson, directeur de l'institut des marées de Liverpool. L'expéditeur, un officier de la Royal Navy, demande des prédictions horaires de hauteur d'eau sur quatre mois, à partir du 1^{er} avril 1944, pour un lieu désigné seulement par un nom de code : « Position Z ». En guise de coordonnées, onze paires de nombres. Doodson n'a pas besoin qu'on lui dise où se trouve la position Z ; il le devine, et se met au travail.

Ces onze paires de nombres sont l'héritage direct de lord Kelvin. Dans les années 1860–70, William Thomson a montré que la marée d'un port, si capricieuse en apparence, est une somme de composantes sinusoïdales dont les périodes sont dictées par l'astronomie : 12,42 heures pour la composante lunaire principale, 12 heures pour la solaire, environ 23,93 heures pour une composante d'inégalité diurne, et ainsi de suite. Chaque port possède ses amplitudes et ses phases propres ; les mesurer, c'est pouvoir prédire. Et pour faire la somme, Kelvin construit en 1872 une machine : dix poulies, un fil, une plume ; chaque poulie monte et descend comme un cosinus, le fil additionne, la plume trace un an de marées en quelques heures.



Pour les curieux du fond. Pourquoi les grandes marées reviennent-elles tous les quinze jours ? Parce que deux sinusôides de périodes voisines *battent*. Les formules d'addition du cours donnent, en sommant $\sin(p+q)$ et $\sin(p-q)$ (cette seconde formule s'obtient de la première par imparité du sinus) : $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$, une oscillation rapide dont l'amplitude est modulée par une enveloppe lente. Pour la lune (12,42 h) et le soleil (12 h), l'enveloppe a pour période $(\frac{1}{12} - \frac{1}{12,42})^{-1} \approx 355$ heures, soit 14,8 jours : vives-eaux quand les deux composantes sont en phase, mortes-eaux quand elles s'annulent. Et comme les périodes des composantes ne sont dans aucun rapport simple, la somme ne se referme jamais tout à fait : la mer ne rejoue jamais exactement la même partition.

Bonus. Retrouvez les 14,8 jours : combien de temps faut-il pour que la composante solaire prenne un tour complet d'avance sur la lunaire ? Réponse sur le compagnon.

Ces machines de laiton ont servi un siècle entier, jusqu'à l'arrivée des ordinateurs. Leur heure de gloire reste l'hiver 1943–44 : sur la machine de Kelvin elle-même, remise à niveau pour accepter vingt-six composantes, et sur sa grande sœur d'une tonne deux, Doodson calcule les marées de la position Z, autrement dit des plages normandes, où le marnage atteint six mètres. Le jour J sera choisi dans les fenêtres qu'il a tracées. La mer du Débarquement a été prédite par une somme de cosinus.

PIÈCE N° 58 · FRONTIÈRE

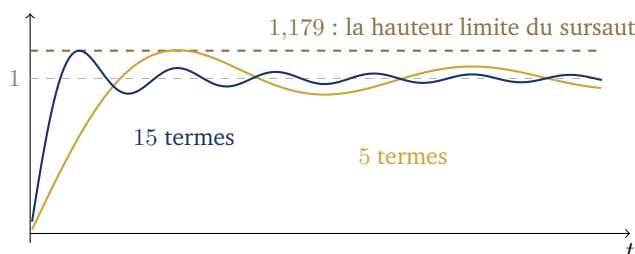
Le sursaut qui refuse de mourir

Sommez cinq sinusoides du signal carré. Puis cinquante. Puis mille. Un petit dépassement s'accroche au bord du saut, et il ne mourra jamais.

↔ prolonge COURS F4, § 5.4 ET § 6.2 · le signal carré et ses sommes partielles

SOMMEZ les sinusoides du signal carré, comme au laboratoire du cours, et regardez le coin du créneau à la loupe. Avec cinq termes, la somme culmine à 1,182 au lieu de 1. Qu'à cela ne tienne : ajoutez des termes. Quinze : 1,179. Cinquante : 1,179. Mille : 1,179 encore. Le pic se rapproche du saut, s'affine, se déplace, mais sa hauteur ne cède pas d'un cheveu. Ce sursaut obstiné porte un nom : le phénomène de Gibbs.

Son histoire est un petit bijou d'expérimentation. En 1898, le physicien Albert Michelson, futur prix Nobel, construit avec Samuel Stratton un *analyseur harmonique* : une machine à ressorts capable de sommer quatre-vingts sinusoides, cousine directe de la machine à marées de Kelvin. Il lui fait tracer les sommes du signal carré, voit le sursaut, et soupçonne un défaut mécanique de sa machine. Il écrit à la revue *Nature* pour s'en plaindre. C'est le mathématicien Josiah Willard Gibbs qui lui répond : la machine est innocente, le sursaut est un théorème. Sa hauteur limite se calcule exactement, et l'on découvrira plus tard qu'un mathématicien anglais oublié, Henry Wilbraham, avait déjà tout établi en 1848, cinquante ans avant tout le monde.



Pourquoi ranger cette pièce à la frontière ? Parce que le sursaut de Gibbs délimite exactement ce que le théorème de Fourier promet, et ce qu'il ne promet pas. La somme converge en *chaque* point ; mais près du saut, le lieu du crime se déplace à mesure que l'on ajoute des termes, et le dépassement s'y reconstitue, identique. Les mathématiciens disent que la convergence n'est pas *uniforme*, et cette nuance, invisible au premier regard, est l'une des portes d'entrée de l'analyse en prépa. Elle a aussi des conséquences très concrètes : compressez trop une image, et des ondulations fantômes apparaissent le long des contours nets. Ce sont les petits-enfants du sursaut de Michelson.

Pour les curieux du fond. Les valeurs se calculent : le maximum de la somme à N termes vaut 1,18233 pour $N = 5$, 1,17935 pour $N = 15$, 1,17898 pour $N = 200$, et la hauteur limite est $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = 1,178\,980\dots$: un dépassement de 8,95 % du saut, gravé dans le marbre. Regardez bien l'intégrande : c'est $\frac{\sin t}{t}$, la fonction même dont la limite en 0, établie à la section 2 du cours, a débloqué toutes les dérivées du chapitre. Curiosité de frontière : cette intégrale n'a pas de primitive élémentaire ; sa valeur ne s'atteint que par des outils de prépa, ou numériquement. Au point de saut lui-même, la somme converge vers la demi-somme des deux paliers : pour un créneau entre -1 et 1 , elle vaut 0, à égale distance des deux rives.

PIÈCE N° 59 · ARCHIVES

Brèves de coulisses

Trois histoires courtes qui n'ont pas trouvé leur place dans le cours, trop belles pour être coupées.

↔ prolonge COURS F4, § 1.1 ET § 5 · le radian et le monde qui oscille

Une affaire de famille. Le mot *radian* apparaît en 1873 dans un sujet d'examen de James Thomson, professeur à Belfast. Son frère cadet s'appelle William, mieux connu sous le nom de lord Kelvin, l'homme de la machine à marées de la pièce 57. Une même fratrie a donc baptisé l'unité naturelle des angles et mécanisé la somme des sinusoides : l'onde était une affaire de famille.

La sinusoïde de l'espace-temps. Le 14 septembre 2015, les détecteurs LIGO enregistrent une oscillation qui étire et comprime l'espace lui-même d'une part relative d'environ 10^{-21} : l'onde gravitationnelle de deux trous noirs en spirale. Le signal est un « chirp » : une sinusoïde dont la

fréquence grimpe de 35 à 250 hertz en une fraction de seconde. Un siècle après la prédiction d'Einstein, l'humanité a entendu l'espace-temps vibrer, et l'a analysé comme une corde de guitare.

La note qui valait une conférence internationale. Sur quelle sinusoïde s'accordent les orchestres ? La France légifère dès 1859 : un *diapason normal* à 435 vibrations par seconde. Il faudra une conférence internationale à Londres, en 1939, pour imposer le la à 440 hertz, confirmé par une norme ISO. Quatre-vingts ans de diplomatie pour cinq hertz : la fréquence d'une sinusoïde peut être un enjeu d'État.

LA SUITE DANS LES COULISSES NUMÉRIQUES

Cinq tiroirs restent fermés : le verdict du procès en traduction du mot sinus, les cordes de 60 et 90 degrés, $\sin(0,5)$ à la main, la dérivée seconde d'une amplitude qui oscille, et les quinze jours qui séparent deux grandes marées. Le compagnon numérique vous attend.

COULISSES N° 7 · ANNÉE 2026-2027