



A3. ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

Ce qu'on a le droit de faire subir au signe égal

TABLE DES MATIÈRES

		1.3. Résoudre au premier degré : le rappel outillé.	4
		1.4. Les inéquations, et le ruban qui change de statut	6
		1.5. Mettre un problème en équation	8
1. REPRENDRE LA MAIN	2		
1.1. Des variables liées.	2	2. LE DÉTOUR PAR ZÉRO	10
1.2. L'ensemble des solutions, et le symbole qui va avec	3	2.1. L'équation produit nul	10
		2.2. L'équation quotient nul, et la valeur interdite	12

PARCOURS DU CHAPITRE

■ **Essentiel** · Socle minimal : définitions, propriétés clés, méthode de base.

◆ **Approfondissement** · Démonstrations, exemples travaillés, exercices de synthèse.

★ **Excellence** · Extensions, liens inter-chapitres, DM et questions ouvertes.

*« Ce que les gens demandent le plus souvent en calcul : ce qui
leur est utile dans leurs héritages, leurs partages, leurs procès
et leurs commerces. »*

*al-Khwarizmi, Abrégé du calcul par la restauration et la
comparaison, Bagdad, vers 820 (traduit, abrégé)*

Londres, 1557. Robert Recorde, médecin gallois, achève un manuel de calcul écrit en anglais, comme toute sa série de manuels, quand la science savante s'écrit en latin. Le livre s'appelle *The Whetstone of Witte*, la pierre à aiguiser l'esprit. Page après page, Recorde y recopie la même formule, *is equalle to*, « est égal à », et cette répétition l'exaspère.

Alors il décide d'abrégé. À la place des mots, il trace deux longs traits couchés, de même longueur, parfaitement parallèles. Et il justifie son choix d'une phrase devenue célèbre : il a choisi deux traits jumeaux « parce que deux choses ne sauraient être plus égales ».

$14x + 15$ *is equalle to* 71

$14x + 15$ $\equiv$ 71

la première équation jamais imprimée avec le signe $\equiv$, ici transcrite en écriture moderne

Le Whetstone est aussi le premier livre anglais à employer les signes $+$ et $-$, importés d'Allemagne. Recorde n'invente pas tout : il choisit, et il explique ses choix, ce qui est plus rare.

Recorde, 1557

La ligne du bas est la première équation de l'histoire à porter ce signe. Elle affirme quelque chose d'étrange : à gauche, une écriture qui contient une lettre dont on ne connaît pas la valeur ; à droite, un nombre. Le signe prétend que les deux désignent la même quantité.

Mais alors, de quel droit ? Une égalité qui contient une inconnue n'est ni vraie ni fausse : elle *dépend*. Le chapitre A2 nous a appris à dire d'un nombre qu'il est « assez proche » ; celui-ci pose la question inverse, celle de l'exactitude. Quels nombres, mis à la place de x , rendent cette phrase vraie ? Et que peut-on faire subir à une telle égalité sans changer la réponse ? Ce chapitre est l'histoire de ce signe, et des gestes qu'il tolère. Vous connaissez déjà la plupart de ces gestes : il s'agit maintenant de savoir *pourquoi* ils sont permis, et comment conclure proprement.

1. REPRENDRE LA MAIN

1.1. Des variables liées

Une formule est une égalité entre plusieurs **variables**. En notant P le périmètre, L la longueur et l la largeur d'un même rectangle, on a $P = 2(L+l)$: trois lettres, une relation, et aucune n'a de valeur imposée. Une telle relation devient une **équation** dès qu'on fige la question : si ce périmètre vaut 26 et cette longueur 8, que vaut la largeur ? Il ne reste qu'une lettre libre, et l'égalité $26 = 2(8 + l)$ n'attend plus qu'une chose : qu'on trouve les valeurs de l qui la rendent vraie.

DÉFINITION – ÉQUATION, INCONNUE, SOLUTION

Une **équation d'inconnue** x est une égalité entre deux expressions, dont l'une au moins contient la lettre x .

Un réel est une **solution** de l'équation lorsque l'égalité est vraie quand on le met à la place de x . **Résoudre** l'équation, c'est trouver toutes ses solutions.

OBJECTIFS

- ▷ Conclure toute résolution par l'ensemble S
- ▷ Manier le symbole d'équivalence
- ▷ Résoudre équations et inéquations du premier degré

Exemple – Tester, c’est déjà mathématique

Le nombre 2 est-il solution de l’équation $5x - 3 = 7$? Et le nombre 3 ?

Pour $x = 2$: le membre de gauche vaut $5 \times 2 - 3 = 7$, le membre de droite vaut 7. L’égalité est vraie : 2 est solution.

Pour $x = 3$: à gauche, $5 \times 3 - 3 = 12$, à droite 7. L’égalité est fausse : 3 n’est pas solution.

Tester un nombre est un geste complet et honorable : il décide, sans aucun doute possible, si ce nombre est solution. Ce qu’il ne dit pas, c’est s’il en existe d’autres : pour l’affirmer, il faudra autre chose que des essais.

équation, identité : Ne pas confondre. Une **identité**, comme celles du chapitre A1, est vraie pour tout réel : elle n’apprend rien sur x . Une **équation** est une question : pour quels x l’égalité devient-elle vraie ?

1.2. L’ensemble des solutions, et le symbole qui va avec

DÉFINITION – L’ENSEMBLE DES SOLUTIONS

L’ensemble de toutes les solutions d’une équation ou d’une inéquation se note S .

Règle de rédaction du chapitre, et de toute la suite : une résolution se conclut *toujours* par l’ensemble S , écrit en entier. Selon les cas, ce sera une liste entre accolades, un intervalle, l’ensemble de tous les réels, ou la phrase « l’équation n’a aucune solution ». Un nombre seul, posé en fin de calcul, ne répond pas à la question « trouver toutes les solutions ».

Résoudre, ce sera *transformer* : remplacer l’équation posée par une plus simple, puis recommencer, jusqu’à ce que S se lise. Encore faut-il que chaque remplacement soit loyal : la nouvelle équation doit avoir exactement les mêmes solutions que l’ancienne.

DÉFINITION – ÉQUATIONS ÉQUIVALENTES

Deux équations (ou deux inéquations, ou plus généralement deux phrases portant sur x , comme celles que construisent « et » et « ou ») sont dites **équivalentes** lorsqu’elles ont le même ensemble de solutions S .

On écrit alors le symbole $\iff$ entre elles. Ainsi $5x - 3 = 7 \iff 5x = 10$: toute solution de l’une est solution de l’autre, et *reciproquement*.

Ce mot, *reciproquement*, mérite l’arrêt : c’est lui qui sépare l’équivalence de sa moitié.

la chose : Avant la lettre x , l’inconnue s’appelait la chose : cosa en italien, coss en allemand. Re-corde nomme l’algèbre the cossike practise, la pratique de la chose. Résoudre, c’est faire parler une chose dont on ne sait rien encore.

PORTAIL ACT

ACT-A3 · Phases 1–4 ★

La solution disparue : un magicien devine votre nombre à coup sûr, puis une équation perd une solution en route. Quatre phases pour instruire le procès du geste coupable, avant que le cours ne donne le moindre outil

Le symbole $\iff$ se lit « équivaut à » ou « si et seulement si ». C’est la version exacte du « revient à dire » que le chapitre A2 employait en toutes lettres. Il se place entre deux phrases portant sur x (égalités, inégalités, et ce qu’en construisent « et » et « ou »), jamais entre deux nombres.

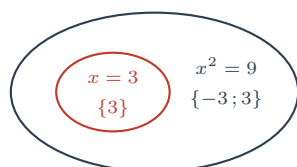
Exemple – Implication, réciproque, contraposée

Soit x un réel. Considérons la phrase : « **si** $x = 3$, **alors** $x^2 = 9$ ». Elle est vraie : c'est une **implication**.

Sa **réciproque** échange les deux moitiés : « si $x^2 = 9$, alors $x = 3$ ». Elle est *fausse*, et un seul contre-exemple suffit : -3 vérifie la première condition, pas la seconde. Une implication vraie peut donc avoir une réciproque fausse ; quand les deux sont vraies, et alors seulement, il y a équivalence.

La **contraposée** de l'implication de départ retourne la phrase en niant les deux moitiés, dans l'autre sens : « si $x^2 \neq 9$, alors $x \neq 3$ ». Celle-ci est vraie, et ce n'est pas un hasard : une implication et sa contraposée sont toujours vraies ou fausses *ensemble*. Nier la conclusion oblige à nier l'hypothèse.

Sur les ensembles de solutions, tout cela se dessine. Dire que la première condition implique la seconde, c'est dire que les nombres vérifiant la première sont *parmi* ceux qui vérifient la seconde. L'équivalence, c'est l'égalité des deux ensembles.



l'implication est une inclusion : les solutions de $x = 3$ sont parmi celles de $x^2 = 9$; l'équivalence exigerait les mêmes ensembles

ÉCHO EXO

EXO-A3 · Ex. 1–3 ★

Tester avant de résoudre, choisir entre les trois flèches, retourner réciproques et contraposées : la partie I met le vocabulaire logique du chapitre à l'établi

1.3. Résoudre au premier degré : le rappel outillé

Vous résolvez des équations depuis le collège. Ce qui est nouveau n'est pas le geste, c'est son *titre de propriété* : voici enfin pourquoi il est permis.

PROPRIÉTÉ – LES GESTES QUI CONSERVENT LES SOLUTIONS

Soit une équation d'inconnue x , et soit c un réel quelconque.

- **Ajouter** c aux deux membres donne une équation équivalente.
- **Multiplier** les deux membres par c , à condition que c soit non nul, donne une équation équivalente.

Soustraire, c'est ajouter l'opposé ; diviser par un réel non nul, c'est multiplier par son inverse : les deux gestes en couvrent quatre.

Bagdad, vers 820. Le savant al-Khwarizmi nomme deux gestes dans le titre même de son traité : al-jabr, la restauration (rétablir un manque en ajoutant la même quantité aux deux membres), et al-muqabala, la mise en balance. Du premier vient notre mot algèbre. Dans l'Espagne d'autrefois, l'algebrista remettait aussi les os cassés.

al-Khwarizmi, vers 820

Démonstration.

Montrons l'équivalence pour l'addition ; il faut les deux sens.

Toute solution reste solution. Soit un réel x vérifiant l'égalité de départ : ses deux membres sont un même nombre. En ajoutant c à

ce nombre, on obtient encore un même nombre : x vérifie la nouvelle égalité.

Aucune solution n'apparaît. Soit un réel x vérifiant la nouvelle égalité. En ajoutant $-c$ aux deux membres, le même raisonnement ramène à l'égalité de départ : x en était déjà solution. Le geste est donc réversible, et c'est toute l'affaire.

Pour le produit, le raisonnement est identique, à un détail décisif près : le retour se fait en multipliant par l'inverse $\frac{1}{c}$, et cet inverse n'existe que si c est non nul. La condition n'est pas une précaution de forme : c'est elle qui garantit le chemin du retour. ■



l'équilibre ne se conserve que si le même poids se pose sur les deux plateaux à la fois

Attention

Deux gestes d'apparence voisine sont des trahisons, et l'activité du chapitre les a mis en scène. **Multiplier les deux membres par zéro** transforme n'importe quelle équation en une égalité vraie pour tout réel : des solutions peuvent *apparaître*. **Diviser par une expression qui contient x** suppose cette expression non nulle, ce qu'on ignore : des solutions peuvent *disparaître*. Dans les deux cas, le chemin du retour n'existe pas.

Remarque – Rappel d'A2 : ce que l'ordre supporte

Pour les inégalités, les gestes et leurs limites ont été établis au chapitre A2, et on les rappelle d'une ligne chacun : on peut **comparer** deux nombres par le signe de leur différence ; **ajouter** un même nombre aux deux membres ; **additionner** deux inégalités de même sens ; **multiplier** les deux membres par un réel strictement positif, ou les multiplier par un réel strictement négatif en **renversant** le sens. Aucune de ces règles ne sera redémontrée ici : elles travaillent.

← PRÉREQUIS

Ch. A2 – Ordre, intervalles

Sommes, produits et renversement y sont justifiés, le renversement démontré. Ici on ne fait que s'en servir.

MÉTHODE – RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ

- ▷ 1. Regrouper les termes en x dans un membre, les constantes dans l'autre, par des additions aux deux membres.
- ▷ 2. Réduire chaque membre : l'équation prend la forme $ax = b$.
- ▷ 3. Diviser les deux membres par a , après avoir vérifié que a est non nul.
- ▷ 4. Vérifier en remplaçant, et conclure par l'ensemble S .

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Réolvons la toute première équation imprimée, celle de Recorde : $14x + 15 = 71$.

On ajoute -15 aux deux membres, puis on divise par 14 , non nul :

$$14x + 15 = 71 \iff 14x = 56 \iff x = 4.$$

Chaque maillon est un geste légal : les trois équations ont exactement les mêmes solutions, et la dernière livre la sienne.

Vérification. Pour $x = 4$: $14 \times 4 + 15 = 56 + 15 = 71$. L'égalité de 1557 est vraie, et pour aucun autre nombre, puisque chaque étape était réversible.

$$S = \{4\}$$

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Résoudre $9x - 7 = 5x + 13$. Les regroupements sont faits : $9x - 7 = 5x + 13 \iff 4x = 20$. À vous la division, la vérification et l'ensemble S .

(b) Résoudre $3x + 8 = 8x - 22$. Rien n'est fait. À vous les quatre étapes.

L'étape 3 de la méthode réserve le cas où le coefficient est nul, et il n'est pas décoratif.

Entraînement : Cahier de calcul Seconde, fiches 31 et 32 (« Équations du premier degré »).

Exemple – Quand il ne reste plus de x ♦

L'équation $2x + 5 = 2x + 9$ donne, en ajoutant $-2x$ aux deux membres, l'égalité $5 = 9$: elle est fausse quel que soit x . L'équation n'a aucune solution, et c'est une conclusion complète.

L'équation $3(x + 2) = 3x + 6$ donne, après développement du membre de gauche puis ajout de $-3x$ aux deux membres, $6 = 6$, vraie quel que soit x : tout réel est solution, et $S = \mathbb{R}$. Ce n'était pas une question, c'était une identité déguisée.

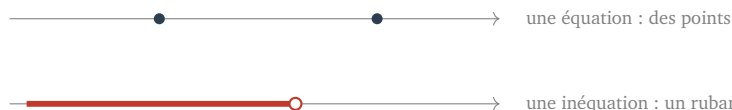
1.4. Les inéquations, et le ruban qui change de statut

Le chapitre A2 s'achevait sur une promesse : ce ruban « va changer de statut : ensemble de solutions quand il s'agira de résoudre ». Nous y sommes. Remplaçons le signe de Recorde par un signe d'ordre : l'équation devient une **inéquation**, la question ne change pas (quels réels rendent l'inégalité vraie?), mais la réponse change de forme. Les solutions ne sont plus quelques nombres isolés : ce sont, le plus souvent, des portions entières de la droite, et elles s'écrivent en **intervalles**.

ÉCHO EXO

EXO-A3 · Ex. 4–8 ★

Des gammes éclair aux développements qui s'effondrent : les x^2 se neutralisent, quatre copies fautives passent au tribunal, et un paramètre m attend les plus rapides en défi



deux questions de même forme, deux ensembles S de natures différentes

Les gestes sont ceux du rappel d'A2, renversement compris, et chaque geste réversible produit une inéquation *équivalente*, au sens du symbole $\iff$: mêmes solutions.

MÉTHODE – RÉSOUDRE UNE INÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ

- ▷ 1. Regrouper les termes en x d'un côté, les constantes de l'autre, par additions aux deux membres.
- ▷ 2. Diviser par le coefficient de x , après avoir vérifié qu'il est non nul, en **renversant** le sens s'il est strictement négatif.
- ▷ 3. Écrire l'ensemble S , sous forme d'intervalle lorsque c'en est un.
- ▷ 4. Contrôler avec deux sentinelles : un nombre qui doit être solution, un qui ne le doit pas.

Entraînement : Cahier de calcul
Seconde, fiche 26 (« Inéquations du premier degré »).

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Réolvons $4 - 3x > 10$.

On ajoute -4 aux deux membres, puis on divise par -3 , strictement négatif : le sens se renverse, comme A2 l'a démontré.

$$4 - 3x > 10 \iff -3x > 6 \iff x < -2.$$

Les solutions sont tous les réels strictement inférieurs à -2 :

$$S =]-\infty; -2[$$

Contrôle par sentinelles. Pour $x = -5$, qui est dans l'intervalle : $4 - 3 \times (-5) = 4 + 15 = 19 > 10$, vrai. Pour $x = 0$, qui n'y est pas : $4 > 10$, faux. Les deux postes confirment.

négation : La **négation** d'une phrase est vraie exactement quand la phrase est fausse. Nier « $x < -2$ » donne « $x \geq -2$ » : les deux ensembles de solutions se partagent la droite entière sans se chevaucher.

Exemple – Une inéquation peut tout accepter ♦

L'inéquation $3x + 1 \leq 3x + 5$ donne, en ajoutant $-3x$ aux deux membres, $1 \leq 5$: vraie quel que soit x . Tout réel est solution : $S = \mathbb{R}$. Et l'inéquation obtenue en échangeant les deux membres, $3x + 5 \leq 3x + 1$, n'en accepte aucun : elle n'a aucune solution.

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Résoudre $7 - 2x \leq 1$. Le regroupement est fait : $-2x \leq -6$. À vous le renversement, l'intervalle et les sentinelles.

(b) Résoudre $5x + 4 > 9x - 8$. Rien n'est fait. À vous les quatre étapes.

1.5. Mettre un problème en équation

Reste à fermer la boucle ouverte par les relations entre variables : partir d'une situation, et fabriquer soi-même l'équation. C'est le geste le plus payant du chapitre, et celui que les héritages, partages et commerces d'al-Khwarizmi réclamaient déjà.

MÉTHODE – METTRE EN ÉQUATION

- ▷ 1. Choisir l'inconnue et l'écrire en toutes lettres : « notons x le... », avec son unité.
- ▷ 2. Traduire chaque information de l'énoncé en une expression ou une égalité.
- ▷ 3. Résoudre l'équation obtenue, par les gestes légaux, jusqu'à l'ensemble S .
- ▷ 4. Confronter S à la question posée : unités, valeurs plausibles, et réponse en une phrase.



la réponse n'est pas S : c'est ce que S signifie, rapporté à la situation

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Un cinéma vend la place 9,50 euros, ou bien une carte annuelle à 19 euros qui ramène la place à 5,70 euros. Pour combien de séances les deux formules coûtent-elles exactement le même prix ?

Notons n le nombre de séances. Sans carte, l'année coûte $9,5n$ euros ; avec la carte, $19 + 5,7n$ euros. L'énoncé demande l'égalité des deux :

$$9,5n = 19 + 5,7n \iff 3,8n = 19 \iff n = 5.$$

Vérification : $9,5 \times 5 = 47,50$ et $19 + 5,7 \times 5 = 47,50$.

$$S = \{5\}$$

Confrontation. Cinq séances est un nombre de séances plausible, et la réponse s'énonce : les deux formules coûtent le même prix pour exactement cinq séances dans l'année. En deçà, le plein tarif l'emporte ; au-delà, la carte : une séance de plus coûte 9,50 euros

ÉCHO EXO

EXO-A3 · Ex. 9–13 ★★

L'ordre sous contrôle : vrai ou faux, doubles détenteurs, la moyenne visée, et des carrés qui se neutralisent sans qu'aucune étude de signe ne soit jamais nécessaire

ÉCHO EXO

EXO-A3 · Ex. 14–18 ★★

Mettre le monde en équation : des âges, un juste tarif, un carré agrandi, des formules retournées, et deux cyclistes lancés l'un vers l'autre sur une véloroute de 96 km

d'un côté, 5,70 de l'autre.

Exemple – Isoler une variable : le geste retourné ♦

Dans la formule $P = 2(L + l)$ du début du chapitre, isolons la largeur l .

Une formule est une équation dont on n'a encore rien figé : les gestes légaux s'y appliquent tels quels, les autres lettres étant traitées comme des nombres. On divise les deux membres par 2, non nul, puis on retire L :

$$P = 2(L + l) \iff \frac{P}{2} = L + l \iff l = \frac{P}{2} - L.$$

Contrôle sur le rectangle du paragraphe 1.1 : pour $P = 26$ et $L = 8$, la formule isolée redonne $\frac{26}{2} - 8 = 5$, exactement la largeur trouvée là-bas.

$$l = \frac{P}{2} - L$$

C'est l'automatisme « isoler une variable » du programme : mêmes gestes, mêmes conditions, et chaque division exige un diviseur non nul.

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Un rectangle a un périmètre de 34 cm et sa longueur dépasse sa largeur de 5 cm. Trouver sa largeur. *La mise en équation est faite : en notant l la largeur en centimètres, $2((l + 5) + l) = 34$. À vous la résolution, la confrontation et la phrase de réponse.*

(b) Trouver trois entiers consécutifs dont la somme vaut 141. *Rien n'est fait. À vous les quatre étapes.*

(c) La loi d'Ohm s'écrit $U = RI$, où la résistance R est non nulle. Isoler l'intensité I . *Rien n'est fait. À vous les gestes, et la condition qui les autorise.*

JALON

Je sais conclure toute résolution par l'ensemble S , écrire le symbole d'équivalence entre deux équations qui le méritent, résoudre équations et inéquations du premier degré, mettre un problème en équation et isoler une variable dans une formule.

2. LE DÉTOUR PAR ZÉRO

2.1. L'équation produit nul

Les gestes du paragraphe 1 résolvent tout le premier degré, mais une équation comme $(3x - 5)(x + 2) = 0$ leur échappe : développer ferait apparaître du x^2 , qu'aucun des deux gestes ne sait éliminer. La sortie est ailleurs, et elle tient à une propriété que le nombre zéro est seul à posséder.

THÉORÈME – ÉQUATION PRODUIT NUL

Un produit de deux facteurs est nul **si, et seulement si**, l'un au moins de ses facteurs est nul. Autrement dit, pour tous réels u et v :

$$uv = 0 \iff u = 0 \text{ ou } v = 0.$$

Démonstration.

Une équivalence se démontre dans les deux sens, et les deux sont instructifs.

Si l'un des facteurs est nul, le produit l'est : multiplier un nombre par zéro donne zéro. C'est le sens facile.

Si le produit est nul, raisonnons par disjonction sur le facteur u : de deux choses l'une. Ou bien $u = 0$, et la conclusion est acquise. Ou bien $u \neq 0$; alors u possède un inverse, et l'on peut multiplier les deux membres de $uv = 0$ par $\frac{1}{u}$, geste légal puisque ce nombre est non nul : il reste $v = 0$. Dans les deux cas, l'un au moins des facteurs est nul. ■

MÉTHODE – RÉSOUDRE PAR LE PRODUIT NUL

- ▷ 1. Tout ramener dans un seul membre, pour obtenir une équation de la forme « $\dots = 0$ ».
- ▷ 2. Factoriser le membre non nul : facteur commun ou identité remarquable.
- ▷ 3. Appliquer le produit nul : le « ou » découpe l'équation en équations plus simples.
- ▷ 4. Résoudre chacune, vérifier, et rassembler toutes les solutions dans S .

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Réolvons $(3x - 5)(x + 2) = 0$.

OBJECTIFS

- ▷ Résoudre une équation produit nul
- ▷ Repérer une valeur interdite, et la gérer
- ▷ Résoudre une équation quotient nul

Le même livre posthume de 1631 qui nous avait donné les signes < et > (chapitre A2) porte aussi ces deux idées : ramener toute équation à « = 0 », et l'engendrer comme un produit de facteurs. Le zéro au second membre n'est pas un ornement : il met la structure de l'équation à nu.

Harriot, 1631

ou : Le « ou » des mathématiques est **inclusif** : il autorise les deux à la fois. Si $u = 0$ et $v = 0$, la phrase « $u = 0$ ou $v = 0$ » est vraie. Le « ou bien... ou bien » exclusif du français courant est une autre conjonction.

ÉCHO EXO

EXO-A3 · Ex. 19–26 ★★

Le détour par zéro à l'établi : produits et quotients nuls, l'automatisme $\frac{a}{x} = b$, les identités qui factorisent, et un panache final où choisir la bonne porte est tout l'exercice

Le membre de gauche est déjà un produit, le membre de droite est déjà zéro : le théorème s'applique directement.

$$(3x - 5)(x + 2) = 0 \iff 3x - 5 = 0 \text{ ou } x + 2 = 0,$$

puis chacune des deux équations se résout par les gestes du paragraphe 1 :

$$x = \frac{5}{3} \text{ ou } x = -2.$$

Vérification. Pour $x = \frac{5}{3}$, le premier facteur est nul : le produit est nul. Pour $x = -2$, c'est le second. Et pour tout autre réel, aucun des deux facteurs n'est nul, donc leur produit ne l'est pas : nous avons bien toutes les solutions.

$$S = \left\{ -2; \frac{5}{3} \right\}$$

Exemple – Une famille entière en un exemple ♦

Réolvons $x^2 = 49$. C'est un produit nul qui s'ignore : on ramène tout à gauche et l'identité de A1 sur la différence de deux carrés factorise l'écart.

$$x^2 = 49 \iff x^2 - 49 = 0 \iff (x - 7)(x + 7) = 0,$$

d'où, par le produit nul, $x = 7$ ou $x = -7$.

$$S = \{-7; 7\}$$

Deux solutions qui se font face, à égale distance de zéro : le carré, comme la valeur absolue d'A2, ne voit pas le signe. Toute équation « un carré égale un nombre strictement positif » se traite ainsi, en la ramenant à un produit : pour un réel a strictement positif, les deux solutions de $x^2 = a$ s'écrivent $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. Et les autres signes se règlent d'une phrase : si le nombre de droite est nul, seule reste la solution 0 ; s'il est strictement négatif, il n'y a aucune solution, car un carré n'est jamais strictement négatif.



les deux solutions de $x^2 = 49$ se font face, à égale distance de zéro

Le tour du magicien, soldé.

L'équation de l'activité se rend sans diviser : de $n^2 = 3n$ on tire $n^2 - 3n = 0$, puis $n(n - 3) = 0$, donc $n = 0$ ou $n = 3$. Le magicien devait annoncer : « votre nombre était 3... ou zéro ». La division par n avait effacé la spectatrice du premier rang.

Entraînement : Cahier de calcul

Seconde, fiche 33 (« Équations du second degré », pour sa seule partie $x^2 = a$).

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Résoudre $(5x + 1)(4 - x) = 0$. Le théorème est appliqué : $5x + 1 = 0$ ou $4 - x = 0$. **À vous les deux résolutions et l'ensemble S .**

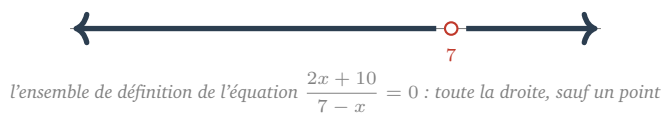
(b) Résoudre $4x^2 - 9x = 0$. Rien n'est fait, et il faudra d'abord faire apparaître un produit. À vous les quatre étapes.

2.2. L'équation quotient nul, et la valeur interdite

Une équation peut aussi cacher une division, et le danger change alors de camp. Dans $\frac{2x+10}{7-x} = 0$, le membre de gauche n'existe même pas pour $x = 7$: on ne divise pas par zéro. Avant de résoudre quoi que ce soit, il faut dire où l'équation a le droit de se tenir.

DÉFINITION – VALEUR INTERDITE

Une **valeur interdite** d'une équation est un réel qui annule un dénominateur : pour cette valeur, l'un des membres n'est pas défini. La résolution se mène sur l'**ensemble de définition** de l'équation, c'est-à-dire les réels qui ne sont pas interdits, et une valeur interdite ne peut jamais entrer dans S .



Le « ou » avait son théorème ; voici celui du « et ».

PROPRIÉTÉ – QUOTIENT NUL

Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions qui dépendent de x . Un réel x est solution de l'équation $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ **si, et seulement si**, il vérifie les deux conditions à la fois :

$$A(x) = 0 \text{ et } B(x) \neq 0.$$

Pourquoi. Sur l'ensemble de définition, le dénominateur est non nul, et un quotient de numérateur non nul ne peut pas être nul, tandis qu'un quotient de numérateur nul l'est. D'où la méthode, dont la première étape est la seule qu'on oublie.

MÉTHODE – RÉSOUDRE UNE ÉQUATION QUOTIENT NUL

- ▷ 1. Chercher les valeurs interdites **avant tout calcul** : les réels qui annulent le dénominateur.
- ▷ 2. Résoudre « numérateur égal zéro », qui est une équation du premier degré.
- ▷ 3. Confronter chaque solution trouvée aux valeurs interdites : celles qui coïncident sont **éliminées**.
- ▷ 4. Vérifier les survivantes, et conclure par S en mentionnant la

Défi facultatif ★ · Résoudre

$$(x+1)(x-4) = (x+1)(2x-9).$$

Le réflexe de diviser par $(x+1)$ est exactement le geste du magicien : trouvez le chemin loyal, et dites quelle solution la division aurait effacée. La réponse est sur le compa-gnon numérique.

L'interdit est plus vieux que le signe égal. En 628, Brahmagupta ose écrire les règles du zéro et prétend que 0 divisé par 0 vaut 0 ; vers 1150, Bhaskara nomme khahara le résultat d'une division par zéro et le déclare infini. Aucune de ces définitions ne tient sans casser le reste du calcul : les mathématiciens ont fini par choisir l'abstention. La valeur interdite est l'héritière de ce renoncement.

Brahmagupta, Bhaskara

et : La conclusion d'une équation quotient enchaîne deux conditions : le numérateur est nul **et** la valeur trouvée n'est pas interdite. Le « et » exige les deux à la fois : c'est le connecteur jumeau du « ou » du produit nul.

valeur interdite.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Réolvons $\frac{2x+10}{7-x} = 0$.

Valeur interdite d'abord : le dénominateur $7-x$ s'annule pour $x = 7$. On résout donc pour $x \neq 7$. Sur cet ensemble, le quotient est nul exactement quand son numérateur l'est :

$$2x + 10 = 0 \iff x = -5.$$

Confrontation : -5 n'est pas la valeur interdite 7 ; la solution survit.

Vérification : pour $x = -5$, le numérateur vaut 0 et le dénominateur 12, et $\frac{0}{12} = 0$.

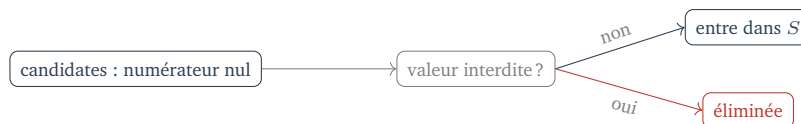
$$S = \{-5\}, \text{ avec } 7 \text{ pour valeur interdite}$$

Exemple – Quand la valeur interdite élimine tout

Réolvons $\frac{2x-8}{x-4} = 0$.

Valeur interdite : 4. Le numérateur s'annule pour $2x - 8 = 0$, c'est-à-dire $x = 4$... qui est précisément la valeur interdite. La seule candidate est éliminée à la confrontation.

L'équation n'a aucune solution, et ce n'est pas une bizarrerie : pour tout x autorisé, le numérateur $2x - 8 = 2(x - 4)$ n'est jamais nul, et le quotient vaut d'ailleurs 2 partout où il existe. La première étape de la méthode n'est pas une politesse : sans elle, on aurait annoncé $S = \{4\}$, qui est exactement la mauvaise réponse.



la confrontation est un poste de contrôle : toute candidate y passe, même seule

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Résoudre $\frac{3x+12}{x-5} = 0$. La valeur interdite est trouvée, 5, et l'équation du numérateur est posée : $3x + 12 = 0$. **À vous la fin : résolution, confrontation, vérification, ensemble S .**

(b) Résoudre $\frac{10-2x}{x+3} = 0$. Rien n'est fait. **À vous les quatre étapes.**

DEUX TRAITS PARALLÈLES

JALON

Je sais résoudre une équation produit après avoir tout ramené à zéro et factorisé, chercher les valeurs interdites d'un quotient avant tout calcul, et conclure par un ensemble S qui a survécu à la confrontation.

Revenons au signe de Recorde. Au collège, il servait surtout d'annonce : à gauche un calcul, à droite « ce que ça fait », et la calculatrice l'emploie encore ainsi. Ce chapitre lui a rendu son sens de 1557 : une affirmation symétrique, qui ne penche d'aucun côté, qui supporte les gestes réversibles et refuse les autres, et dont la réponse s'appelle un ensemble.

Rien de tout cela n'allait de soi. Quatre-vingts ans après le *Whetstone*, Descartes écrivait encore l'égalité d'un tout autre symbole, une boucle inachevée, et le signe de Recorde a passé plus d'un siècle en concurrence avant que Newton et Leibniz, en l'employant tous deux, ne le rendent universel. Les gestes, eux, sont plus vieux que toutes ces écritures : Bagdad les nommait plus de sept siècles avant que Londres ne sache les noter. L'histoire complète du signe, ses rivaux, et ce qu'il est advenu de son inventeur l'année suivante, vous attendent sur le compagnon numérique. Quant aux équations, le chapitre laisse un chantier ouvert en le sachant. Nous savons résoudre ce qui se ramène au premier degré, au produit nul et au quotient nul ; nous savons délimiter les solutions d'une inéquation simple. Mais le *signe* d'un produit ou d'un quotient, et les inéquations qui les font intervenir, demandent un outil que nous n'avons pas encore : un tableau qui suit chaque facteur à la trace. Ce sera l'affaire du chapitre A4, et les fonctions s'en mêleront.

CIBLE DA

DM1-A3 · Parties 0–VI ★★★★★

Deviner faux : Thèbes, vers 1550 avant notre ère. Trois mille cinq cents ans de bonnes réponses obtenues par des essais faux, d'Ahmès à la machine, jusqu'à chiffrer $\sqrt{7}$. Entièrement facultatif, et sans corrigé

Fin du chapitre

[ACT-A3] [EXO-A3] [DM1-A3] [EVAL-A3]