



F1. GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Ce qu'une courbe dit d'une grandeur qui varie, et ce qu'elle n'en dit pas

TABLE DES MATIÈRES

	2.2. Le domaine imposé par la situation.	8
	2.3. Le domaine imposé par l'écriture : les deux obstacles	8
	2.4. Écrire un domaine troué.	9
1. LE PROCÉDÉ	2	
1.1. À chaque nombre, au plus un nombre	2	
1.2. Image et antécédent	3	
1.3. Chercher les antécédents par le calcul	4	
1.4. Les quatre visages d'une fonction	6	
2. L'ENSEMBLE DE DÉFINITION	6	
2.1. Décrire un ensemble par une condition . . .	6	
	3. LA COURBE	10
	3.1. Le couple et le point	10
	3.2. La courbe représentative	11
	3.3. Un point est-il sur la courbe ?	12
	3.4. Lire sur une courbe	13
	3.5. Ce qu'une courbe de fonction ne peut pas faire	14

PARCOURS DU CHAPITRE

■ **Essentiel** · Socle minimal : définitions, propriétés clés, méthode de base.

◆ **Approfondissement** · Démonstrations, exemples travaillés, exercices de synthèse.

★ **Excellence** · Extensions, liens inter-chapitres, DM et questions ouvertes.

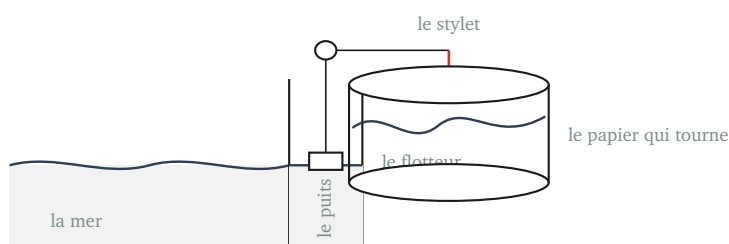
Il a fallu cent soixante ans pour fixer ce qu'est une fonction, et plus longtemps encore pour admettre qu'une machine puisse en écrire une sans qu'aucune formule ne soit prononcée.

Marseille, 1^{er} février 1885. Sur la corniche, dans un petit bâtiment élevé les deux années précédentes, un puits descend jusqu'à la mer. Un flotteur y monte et descend au rythme des marées ; un fil le relie à un stylet ; le stylet appuie sur un cylindre de papier qui tourne lentement. Personne ne calcule rien, personne ne relève rien : la machine écrit. Elle écrira ainsi, jour et nuit, jusqu'au 1^{er} janvier 1897.

Près de douze ans plus tard, on déroulera ce papier, et la France y lira l'altitude zéro de toutes ses cartes. Comment un trait laissé par un stylet peut-il décider de la hauteur du sol sous nos pieds ? La question en cache une autre, plus élémentaire, et que personne ne vous a jamais posée bien que vous regardiez des courbes depuis dix ans : **qu'est-ce que c'est, au juste, qu'une courbe ?**

Le bâtiment a été élevé en 1883-1884 ; les observations, elles, commencent le 1^{er} février 1885. Deux appareils y travaillent : un enregistreur, qui trace, et un totalisateur, machine à engrenages qui calcule le niveau moyen.

1883-1885



1. LE PROCÉDÉ

1.1. À chaque nombre, au plus un nombre

Le stylet du marégraphe ne fait qu'une chose : à chaque instant, il donne une hauteur, et une seule. C'est exactement ce que les mathématiciens appellent une fonction.

DÉFINITION – FONCTION

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. Définir une **fonction** f sur $\mathcal{D}$, c'est associer à tout réel x de $\mathcal{D}$ **un seul** réel, noté $f(x)$ et appelé **image** de x par f .

On écrit $f : x \mapsto f(x)$, et $\mathcal{D}$ s'appelle l'**ensemble de définition** de f , noté $\mathcal{D}_f$.

Attention

f et $f(x)$ ne sont pas la même chose, et les confondre coûtera cher toute l'année. f est le **procédé**, la machine ; $f(x)$ est un **nombre**, celui que la machine produit quand on lui donne x . On ne dit pas « la fonction $f(x)$ » : on dit « la fonction f », ou « l'image de x par f ».

Exemple – Une formule, et un tableau

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ associe à chaque réel un seul réel. Ainsi $f(0) = 1$, et $f(-2) = 3 \times 4 + 10 + 1 = 23$.

OBJECTIFS

PORTAIL ACT

ACT-F1 · Phases 1–4 ★

Le disque du camion : un gendarme sort d'un tachygraphe un disque de papier gravé par un stylet et doit dire si le camion a dépassé la limite. Quatre phases pour rencontrer l'asymétrie de l'image et de l'antécédent, et un enregistrement troué, avant que le cours n'ait rien nommé

Mais une fonction n'est pas obligée d'être une formule. Le tarif d'un envoi postal associe à chaque masse un seul prix, et il est donné par un tableau :

JUSQU'À (G)	20	100	250	500
PRIX (EUROS)	1,39	2,78	4,17	6,25

Aucune formule n'est écrite nulle part, et c'est pourtant bien une fonction : à chaque masse, un seul prix.

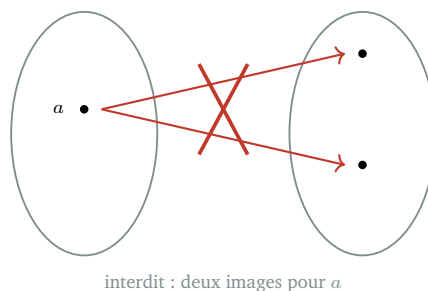
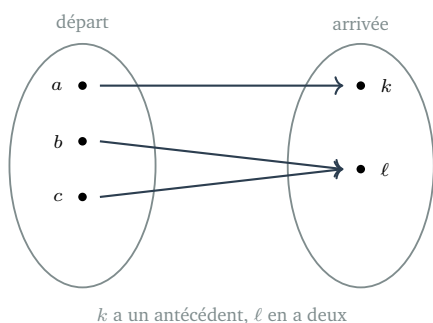
1.2. Image et antécédent

Le mot *image* se lit dans un sens ; il faut maintenant le lire dans l'autre.

DÉFINITION – ANTÉCÉDENT

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$, et soit k un réel. Un **antécédent** de k par f est un réel a de $\mathcal{D}_f$ tel que $f(a) = k$.

Les deux mots ne sont pas symétriques, et c'est le point le plus important de tout le paragraphe. Un nombre du domaine a **une** image, et une seule, jamais deux. Un nombre peut avoir **aucun**, **un** ou **plusieurs** antécédents, et parfois une infinité.



ÉCHO EXO

EXO-F1 · Ex. 1-4 ★★

Ce que le procédé n'est pas : reconnaître une fonction là où il y en a une, distinguer f de $f(x)$, lire l'échelle de Beaufort, et voir un même procédé changer de nature quand on change son ensemble de départ

Remarque – Pourquoi l'image est-elle unique ?

Ce n'est pas un théorème, c'est une décision, et elle est la condition de tout le reste. Si un nombre pouvait avoir deux images, écrire $f(3)$ ne désignerait plus rien : on ne saurait pas de quel nombre on parle, et aucun calcul ne serait possible. Le mot l'image, avec son article défini, contient déjà l'exigence. C'est aussi, exactement, ce qu'aucune machine à écrire les courbes ne peut violer : un stylet est à un seul endroit à la fois.

Exemple – Une image, trois situations d'antécédents

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 4$.

L'image de 3 s'obtient par un calcul direct : $g(3) = 9 - 4 = 5$.

Les antécédents de 0 sont les réels x tels que $x^2 - 4 = 0$, c'est-à-dire $x^2 = 4$: il y en a deux, -2 et 2 .

Les antécédents de -4 vérifient $x^2 - 4 = -4$, soit $x^2 = 0$: il n'y en a qu'un, le nombre 0.

Les antécédents de -5 vérifieraient $x^2 = -1$. Or un carré n'est

jamais négatif : -5 n'a aucun antécédent par g .

MÉTHODE – M1 • CALCULER L'IMAGE D'UN NOMBRE

- ▷ 1. Vérifier que le nombre appartient bien à l'ensemble de définition.
- ▷ 2. Remplacer x par ce nombre, **entre parenthèses**, dans l'expression.
- ▷ 3. Calculer en respectant les priorités opératoires.
- ▷ 4. **Contrôler** : dire quel signe et quel ordre de grandeur on attendait, et pourquoi. Conclure ensuite par une phrase nommant l'image.

*Entraînement : Cahier de calcul
Seconde, fiche 36 (« Images et antécédents »).*

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$. Calculer l'image de -2 .

Le domaine est $\mathbb{R}$ tout entier, donc -2 y appartient.

On remplace, sans oublier les parenthèses, puis on calcule le carré, les produits, la somme :

$$f(-2) = 3 \times (-2)^2 - 5 \times (-2) + 1 = 12 + 10 + 1 = 23.$$

Contrôle : les deux premiers termes sont positifs pour x négatif, un résultat au-delà de 20 n'a rien de surprenant.

L'image de -2 par f est 23.

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Même fonction f . Calculer l'image de 3. Les trois premières étapes sont faites : 3 appartient à $\mathbb{R}$, on écrit $f(3) = 3 \times 3^2 - 5 \times 3 + 1$, et le calcul donne $27 - 15 + 1 = 13$. **À vous le contrôle** : pour $x = 3$, lequel des deux termes $3x^2$ et $5x$ l'emporte, et pourquoi cela rendait-il un résultat positif prévisible ? **Puis la phrase.**

(b) Même fonction f . Calculer l'image de -1 . Les deux premières étapes sont faites : -1 appartient à $\mathbb{R}$, et on écrit

$$f(-1) = 3 \times (-1)^2 - 5 \times (-1) + 1.$$

À vous le calcul, le contrôle et la phrase.

1.3. Chercher les antécédents par le calcul

Calculer une image est un remplacement ; chercher les antécédents est une équation. Tous les gestes du chapitre A3 reviennent ici, et ils ne servaient qu'à cela.

Attention

En A3, toute résolution se concluait par l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$. Ici, le calcul est le même, mais ce que l'on cherche porte un autre nom : on conclut par une **phrase d'antécédents**. Les deux conclusions ne se concurrencent pas, elles répondent à deux questions différentes posées sur la même équation.

Exemple – Deux équations, deux types

Soit u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3x - 5$. Chercher les antécédents de 7, c'est résoudre $3x - 5 = 7$, donc $3x = 12$, donc $x = 4$. Le nombre 7 a un seul antécédent par u , et c'est 4.

Soit v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = (x - 3)(2x + 1)$. Chercher les antécédents de 0, c'est résoudre $(x - 3)(2x + 1) = 0$: un produit est nul lorsque l'un au moins de ses facteurs est nul, donc $x = 3$ ou $x = -\frac{1}{2}$. Le nombre 0 a deux antécédents par v .

MÉTHODE – M2 · DÉTERMINER LES ANTÉCÉDENTS D'UN NOMBRE

- ▷ 1. Écrire l'équation $f(x) = k$, où k est le nombre dont on cherche les antécédents.
- ▷ 2. Reconnaître son type : premier degré, produit nul, quotient nul, carré.
- ▷ 3. Résoudre avec les gestes du chapitre A3.
- ▷ 4. Écarter les solutions qui ne sont pas dans $\mathcal{D}_f$, puis conclure par une phrase d'antécédents.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Soit g définie sur $[-3; 3]$ par $g(x) = x^2 - 4$. Déterminer les antécédents de 5.

On écrit l'équation : $x^2 - 4 = 5$.

C'est une équation du type $x^2 = a$, avec a positif : elle a deux solutions opposées.

On résout : $x^2 = 9$, donc $x = 3$ ou $x = -3$.

Les deux nombres appartiennent à $[-3; 3]$: aucun n'est à écarter.

Les antécédents de 5 par g sont -3 et 3 .

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Même fonction g , définie sur $[-3; 3]$. Déterminer les antécédents de 12. Les trois premières étapes sont faites : l'équation s'écrit $x^2 - 4 = 12$, elle est du type $x^2 = a$, et elle donne $x = 4$ ou $x = -4$. À vous

← PRÉREQUIS

Ch. A3 · Équations

Premier degré, équation produit nul, équation quotient nul, valeur interdite, et $x^2 = a$: tout le matériel de la recherche d'antécédents est déjà entre vos mains.

ÉCHO EXO

EXO-F1 · Ex. 5–10 ★★

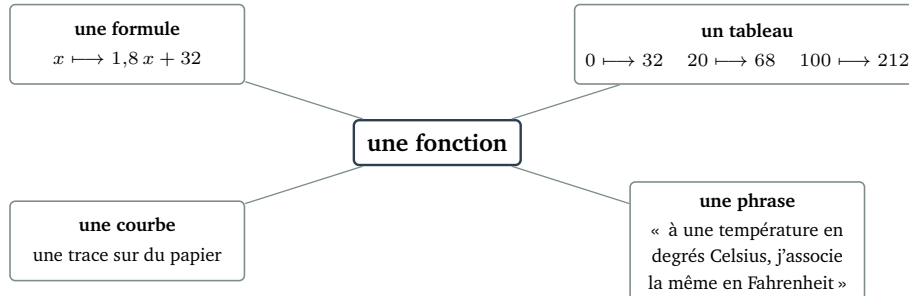
Images et antécédents à l'établi : dix gammes dont une seule fait porter un signe moins sur le carré d'un négatif, les quatre types d'équation, le compte des antécédents (zéro, un, plusieurs), et une copie dont le résultat est juste par le mauvais chemin

l'examen du domaine et la phrase · elle réserve une surprise.

(b) Soit w définie sur $\mathbb{R}$ par $w(x) = (x + 5)(x - 2)$. Déterminer les antécédents de 0. Les deux premières étapes sont faites : l'équation s'écrit $(x + 5)(x - 2) = 0$, et c'est une équation produit nul. À vous la résolution, l'examen du domaine et la phrase.

1.4. Les quatre visages d'une fonction

Une fonction n'est pas une écriture : c'est une correspondance. Elle peut donc se présenter de quatre façons, et il faut savoir passer de l'une à l'autre.



Les quatre présentations ci-dessus décrivent la même conversion des degrés Celsius en degrés Fahrenheit, et s'accordent sur toutes les images qu'elles donnent : 0 donne 32, 20 donne 68, 100 donne 212. Attention toutefois : un tableau n'énonce qu'un nombre fini d'images, il définit donc une fonction sur un ensemble de départ plus petit que la formule. Le visage change, mais l'ensemble de définition aussi.

2. L'ENSEMBLE DE DÉFINITION

2.1. Décrire un ensemble par une condition

Le chapitre A1 vous a appris à écrire un ensemble en **listant** ses éléments entre accolades. Cette écriture ne suffit plus : on ne liste pas les réels supérieurs à 3.

DÉFINITION – ÉCRITURE PAR COMPRÉHENSION

Au lieu de lister les éléments d'un ensemble, on peut donner la **condition** qu'ils sont seuls à vérifier. On écrit alors

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid \text{condition sur } x \},$$

et on lit : « l'ensemble des réels x tels que ... » La barre verticale se lit « tels que ».

JALON

Je sais distinguer f de $f(x)$, calculer une image, chercher les antécédents d'un nombre.

OBJECTIFS

- ▷ Décrire un ensemble par une condition
- ▷ Reconnaître les deux obstacles
- ▷ Écrire un domaine troué en réunion

par compréhension : L'écriture qui liste s'appelle une écriture en extension ; celle qui décrit s'appelle une écriture par compréhension. Vous retrouverez les deux, et exactement ces symboles, jusqu'en terminale.

Exemple – Trois descriptions, trois explicitations

« L'ensemble des réels supérieurs ou égaux à 3 » s'écrit

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} = [3; +\infty[.$$

« L'ensemble des réels différents de 5 » s'écrit

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 5\} = \mathbb{R} \setminus \{5\}.$$

« L'ensemble des réels compris entre -2 et 7 , ces deux nombres étant admis » s'écrit

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \text{ et } x \leq 7\} = [-2; 7].$$

MÉTHODE – M3 · D'UNE DESCRIPTION À UNE ÉCRITURE EXPLICITE

- ▷ 1. Repérer l'ensemble de départ (ici $\mathbb{R}$) et la condition portant sur x .
- ▷ 2. Écrire l'ensemble par compréhension, et le relire à voix haute en français.
- ▷ 3. Traiter la condition, avec les gestes du chapitre A3.
- ▷ 4. Écrire le résultat en intervalles, et contrôler sur la droite graduée.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Écrire, puis expliciter, l'ensemble des réels dont le double diminué de 6 est positif ou nul.

L'ensemble de départ est $\mathbb{R}$, et la condition porte sur $2x - 6$.

Par compréhension : $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 6 \geq 0\}$, que l'on lit « l'ensemble des réels x tels que $2x - 6$ soit positif ou nul ».

On traite la condition : $2x - 6 \geq 0$ équivaut à $2x \geq 6$, donc à $x \geq 3$.

Sur la droite graduée, ce sont tous les points situés à droite de 3, ce dernier compris.

$$\boxed{\{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 6 \geq 0\} = [3; +\infty[}$$

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Écrire, puis expliciter, l'ensemble des réels dont le triple augmenté de 12 est strictement négatif. Les trois premières étapes sont faites : l'ensemble s'écrit $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 12 < 0\}$, et la condition se traite en $x < -4$. **À vous l'écriture en intervalle et le contrôle sur la droite.**

(b) Écrire, puis expliciter, l'ensemble des réels dont le quadruple augmenté de 5 est supérieur ou égal à 1. Les deux premières étapes sont faites : l'ensemble s'écrit $\{x \in \mathbb{R} \mid 4x + 5 \geq 1\}$. **À vous le traitement de la condition, l'écriture en intervalle et le contrôle.**

2.2. Le domaine imposé par la situation

Quand une fonction décrit le monde, son domaine est fixé par le monde, et il faut le dire avant de calculer quoi que ce soit.

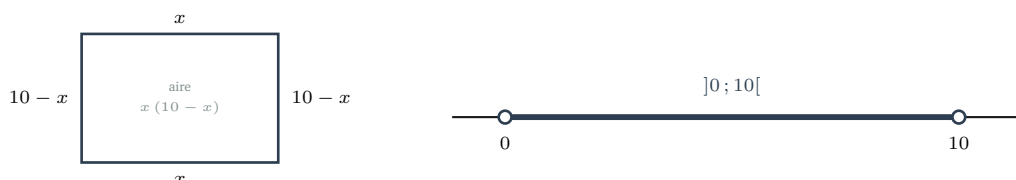
Exemple – Un rectangle de périmètre 20

Un rectangle a pour périmètre 20. Si l'un de ses côtés mesure x , l'autre mesure $10 - x$, et son aire vaut $\mathcal{A}(x) = x(10 - x)$.

Deux conditions s'imposent : les deux côtés doivent être strictement positifs. Le domaine s'écrit donc

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathcal{A}} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ et } 10 - x > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \text{ et } x < 10\} =]0; 10[.\end{aligned}$$

L'intervalle est ouvert aux deux bouts : un côté de longueur nulle ne fait pas un rectangle.



2.3. Le domaine imposé par l'écriture : les deux obstacles

Quand aucune situation n'impose de domaine, c'est l'écriture elle-même qui parle. En seconde, elle ne peut buter que sur deux obstacles.

PROPRIÉTÉ – LES DEUX OBSTACLES

1. **On ne divise jamais par zéro.** Un dénominateur doit être non nul : les valeurs qui l'annulent sont les **valeurs interdites**.
2. **On ne prend jamais la racine carrée d'un nombre négatif.** Ce qui se trouve sous le radical doit être positif ou nul.

Exemple – Un quotient, une racine, puis deux valeurs interdites

Pour $x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}$, le seul obstacle est le dénominateur :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_f &= \{x \in \mathbb{R} \mid x - 3 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}.\end{aligned}$$

Pour $x \mapsto \sqrt{x-5}$, le seul obstacle est le radical :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_h &= \{x \in \mathbb{R} \mid x - 5 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\} = [5; +\infty[.\end{aligned}$$

Pour $x \mapsto \frac{x}{(x+2)(x-4)}$, le dénominateur est un produit. Il s'annule lorsque $x = -2$ **ou** $x = 4$; il est donc non nul lorsque $x \neq -2$ et $x \neq 4$:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_k &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x+2)(x-4) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \text{ et } x \neq 4\} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}.\end{aligned}$$

Remarque – Pourquoi le « ou » devient-il un « et » ?

Parce qu'on nie une phrase. Le chapitre A3 a établi qu'un produit est nul lorsque l'un **ou** l'autre de ses facteurs est nul. Dire que le produit n'est pas nul, c'est donc dire qu'aucun des deux facteurs ne l'est : ni le premier, **ni** le second. Nier un « ou », c'est exiger les deux refus à la fois. Vous ferez ce retournement chaque fois qu'un dénominateur sera factorisé, et l'oublier fait perdre une valeur interdite sur deux.

MÉTHODE – M4 · DÉTERMINER UN ENSEMBLE DE DÉFINITION

- ▷ 1. Repérer le ou les obstacles dans l'écriture : dénominateurs, radicaux.
- ▷ 2. Poser la condition par compréhension, et la relire en français.
- ▷ 3. Traiter la condition, obstacle par obstacle, sans en perdre aucun.
- ▷ 4. Écrire le résultat en intervalles, en réunion s'il y a des trous.

ÉCHO EXO

EXO-F1 · Ex. 11–16 ★★

L'ensemble de définition, du français à l'intervalle : les deux obstacles, une boîte sans couvercle dont la situation impose le domaine, une condition qui ne dit rien, et le mouvement inverse, fabriquer une expression dont le domaine est imposé d'avance

*Entraînement : Cahier de calcul
Seconde, fiche 40 (« Calcul avec les fonctions »).*

2.4. Écrire un domaine troué

Il reste la dernière égalité du rituel : passer de $\mathbb{R}$ privé de quelques nombres à une écriture en intervalles. C'est ici que la réunion du chapitre A2 prend enfin tout son sens.

PROPRIÉTÉ – UN TROU COUPE LA DROITE EN DEUX

Pour tout réel a ,

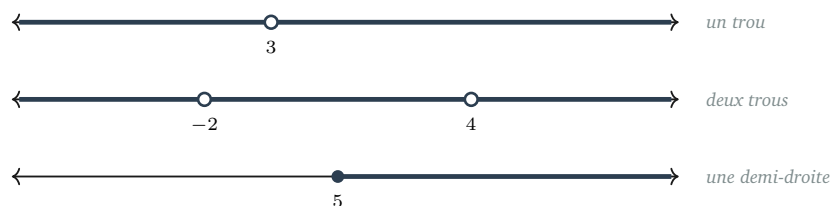
$$\mathbb{R} \setminus \{a\} =]-\infty; a[\cup]a; +\infty[.$$

Chaque valeur interdite supplémentaire ajoute un morceau : deux valeurs interdites donnent trois intervalles.

← PRÉREQUIS

Ch. A2 · Intervalles

Le § 2.2 réunissait deux intervalles sans qu'on sache encore pourquoi on en aurait besoin. Un domaine troué est la réponse : ôter un point à une droite, c'est la couper en deux morceaux.



Exemple – Le rituel, d'un bout à l'autre

Reprenons $x \mapsto \frac{x}{(x+2)(x-4)}$ et poussons l'écriture jusqu'au bout :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_k &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x+2)(x-4) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \text{ et } x \neq 4\} \\ &=]-\infty; -2[\cup]-2; 4[\cup]4; +\infty[.\end{aligned}$$

Trois écritures, un seul ensemble. La première dit à *quelle condition* le calcul a un sens, la deuxième *quels nombres* sont exclus, la troisième où l'on se trouve sur la droite.

Exemple – À vous · deux jumeaux de M4

(a) Déterminer l'ensemble de définition de $x \mapsto \frac{x+7}{(x-1)(x+6)}$. Les trois premières étapes sont faites : l'obstacle est le dénominateur, la condition s'écrit $\{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x+6) \neq 0\}$, et elle se traite en $x \neq 1$ et $x \neq -6$. **À vous l'écriture en réunion d'intervalles.**

(b) Déterminer l'ensemble de définition de $x \mapsto \sqrt{2x-8}$. Les deux premières étapes sont faites : l'obstacle est le radical, et la condition s'écrit $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x-8 \geq 0\}$. **À vous le traitement de la condition et l'écriture en intervalle.**

3. LA COURBE

3.1. Le couple et le point

Avant la courbe, il faut un mot, et c'est un mot neuf.

DÉFINITION – COUPLE

Un **couple** de réels, noté $(a; b)$, est la donnée de deux réels **dans un ordre**. Le premier s'appelle l'**abscisse**, le second l'**ordonnée**.

Deux couples sont égaux lorsque leurs abscisses sont égales et leurs ordonnées aussi. Ainsi $(3; 5)$ et $(5; 3)$ sont deux couples différents.

Dans un repère du plan, un point est entièrement décrit par le couple de ses coordonnées, et réciproquement : à chaque couple correspond un point, à chaque point un seul couple.

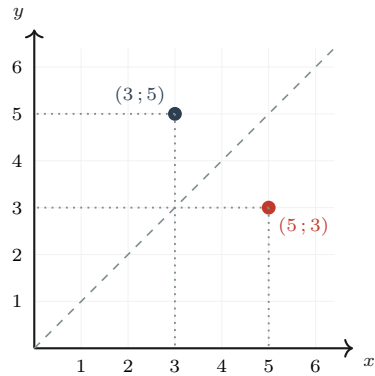
JALON

Je sais poser la condition d'existence d'une expression, la traiter, et l'écrire en intervalles.

OBJECTIFS

- ▷ Comprendre ce qu'est un point d'une courbe
- ▷ Tester l'appartenance par le calcul
- ▷ Lire une image et les antécédents

couple : Une paire $\{3; 5\}$ ne retient que quels nombres on a pris ; un couple $(3; 5)$ retient en plus dans quel ordre. Accolades pour la paire, parenthèses pour le couple : la différence tient à la forme du signe.



3.2. La courbe représentative

DÉFINITION – COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$. Dans un repère du plan, la **courbe représentative** de f , notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points dont les coordonnées sont les couples $(x; f(x))$, où x parcourt $\mathcal{D}_f$.

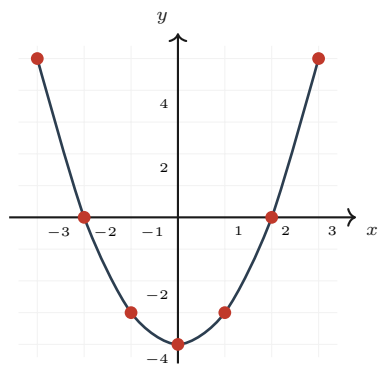
Une courbe n'est donc pas un trait : c'est une collection de points, un par nombre du domaine. Le trait que l'on dessine ne fait que les relier, pour que l'œil suive.

Exemple – Du tableau au tracé

Soit g définie sur $[-3; 3]$ par $g(x) = x^2 - 4$. On calcule quelques images :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

Chaque colonne fournit un couple, donc un point : $(-3; 5)$, $(-2; 0)$, et ainsi de suite. On place ces points, puis on les relie.



À l'intersection de l'équateur et du méridien de Greenwich, en plein golfe de Guinée, il n'y a aucune terre. Les cartographes ont pourtant donné un nom à ce point, Null Island, parce que c'est là que tombe tout enregistrement dont la localisation a échoué : un champ vide se lit $(0; 0)$. Une bouée y a veillé jusqu'en 2021.

Null Island

Vers 1350, à Paris, Nicole Oresme cherche à dessiner ce qui varie. Il pose une ligne horizontale, la longitude, pour ce qui s'étend, et dresse au-dessus de chaque point une hauteur, la latitude, pour l'intensité. Le geste que vous faites en plaçant $(x; f(x))$ a près de sept cents ans.

Oresme, v. 1350

3.3. Un point est-il sur la courbe ?

PROPRIÉTÉ – TEST D'APPARTENANCE

Soit f une fonction et M le point de coordonnées $(a; b)$. Le point M appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si les **deux** conditions suivantes sont remplies :

$$a \in \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad f(a) = b.$$

Remarque – Pourquoi ce test suffit-il ?

Parce qu'il ne fait que relire la définition. La courbe **est** l'ensemble des points $(x; f(x))$ pour x dans le domaine : y appartenir, c'est être de cette forme, donc avoir une abscisse dans le domaine et une ordonnée égale à son image. Il n'y a rien à démontrer, il y a seulement à ne pas oublier la première condition.

Attention

La première condition est celle qu'on saute. Un point peut très bien avoir la « bonne » ordonnée et une abscisse hors du domaine : il n'est alors pas sur la courbe, et le calcul qui semblait marcher ne prouvait rien.

Exemple – Trois points, trois verdicts

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 4$.

Pour $A(2; 0)$: 2 appartient à $\mathbb{R}$, et $g(2) = 0$. Le point A est sur $\mathcal{C}_g$.

Pour $B(1; -2)$: 1 appartient à $\mathbb{R}$, mais $g(1) = -3$, qui n'est pas -2 . Le point B n'est pas sur $\mathcal{C}_g$.

Soit maintenant h définie **sur** $[-1; 5]$ par $h(x) = 2x + 3$, et soit $E(7; 17)$. Le calcul $2 \times 7 + 3 = 17$ semble concluant, mais 7 n'appartient pas à $[-1; 5]$: le point E n'est pas sur $\mathcal{C}_h$.

MÉTHODE – M5 • TESTER L'APPARTENANCE D'UN POINT À UNE COURBE

- ▷ 1. Vérifier que l'abscisse du point appartient à $\mathcal{D}_f$; si elle n'y est pas, conclure immédiatement.
- ▷ 2. Calculer l'image de cette abscisse.
- ▷ 3. Comparer le résultat à l'ordonnée du point.
- ▷ 4. Conclure par une phrase, en **nommant laquelle des deux conditions a tranché** et en disant ce qu'aurait changé l'échec de l'autre.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Soit f définie sur $[-4; 4]$ par $f(x) = x^2 - 4$. Le point $P(-3; 5)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$?

L'abscisse -3 appartient à $[-4; 4]$: la première condition est remplie.

On calcule l'image : $f(-3) = 9 - 4 = 5$.

L'ordonnée du point est 5, et l'image vaut 5 : les deux nombres coïncident.

Le point $P(-3; 5)$ appartient à C_f .

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Même fonction f , définie sur $[-4; 4]$. Le point $Q(1; -3)$ appartient-il à C_f ? Les trois premières étapes sont faites : 1 appartient au domaine, $f(1) = -3$, et l'ordonnée du point vaut -3 . **À vous la conclusion :** dites laquelle des deux conditions a tranché, et ce qu'il aurait fallu changer à l'ordonnée du point pour que le verdict s'inverse.

(b) Même fonction f . Le point $R(5; 21)$ appartient-il à C_f ? La première étape seule est amorcée : il faut commencer par regarder si 5 appartient à $[-4; 4]$. **À vous tout le reste.**

Exemple – La coordonnée manquante · les deux gestes se rejoignent

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 4$.

Le point $C(-1; y)$ est sur C_g : trouver y . C'est un calcul d'image : $y = g(-1) = 1 - 4 = -3$.

Le point $D(x; 5)$ est sur C_g : trouver x . C'est une recherche d'antécédents : $x^2 - 4 = 5$ donne $x^2 = 9$, donc $x = -3$ ou $x = 3$. Il y a deux points possibles, et c'est encore l'asymétrie du paragraphe 1.

3.4. Lire sur une courbe

Tout ce qui précède se fait aussi à l'œil, quand la fonction n'est donnée que par son tracé.

MÉTHODE – M6 · LIRE UNE IMAGE ET LES ANTÉCÉDENTS

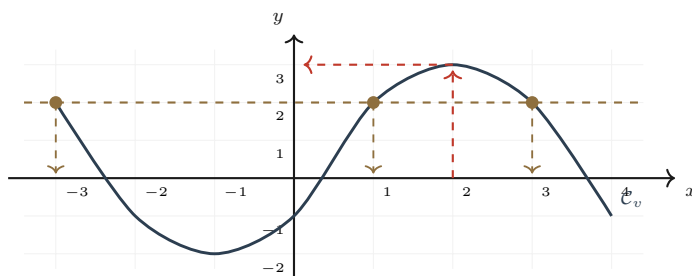
- ▷ 1. Pour lire l'image de a : partir de a sur l'axe des abscisses, monter (ou descendre) jusqu'à la courbe, puis lire l'ordonnée atteinte.
- ▷ 2. Pour lire les antécédents de k : partir de k sur l'axe des ordonnées, tracer l'horizontale, et repérer **tous** ses points de rencontre avec la courbe.
- ▷ 3. Lire l'abscisse de chacun de ces points, sans en oublier.
- ▷ 4. Conclure par une phrase, en donnant le **nombre** d'antécédents trouvés et en disant si chaque lecture est sûre ou seulement approchée.

ÉCHO EXO

EXO-F1 · Ex. 17–21 ★★

Le couple, le point, la courbe : cinq ver-dicts d'appartenance dont deux changent quand on rétrécit l'ensemble de départ, une courbe construite point par point, et un paramètre caché tantôt dans l'abs-cisse, tantôt dans l'ordonnée

*Entraînement : Cahier de calcul
Seconde, fiche 38 (« Points des
courbes »).*



Exemple – La méthode, entièrement déroulée

La courbe ci-dessus est celle d'une fonction v définie sur $[-3; 4]$.

Lire l'image de 2, puis les antécédents de 2.

L'image de 2 : on part de 2 sur l'axe horizontal, on monte jusqu'à la courbe, on lit 3 sur l'axe vertical. Donc $v(2) = 3$.

Les antécédents de 2 : on part de 2 sur l'axe vertical, on trace l'horizontale, et on la suit d'un bout à l'autre du domaine. Elle rencontre la courbe en trois points, d'abscisses -3 , 1 et 3 .

$v(2) = 3$, et le nombre 2 a trois antécédents par v : -3 , 1 et 3 .

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Sur la même courbe, lire l'image de -1 , puis les antécédents de 3. Les trois premières étapes sont faites : la verticale d'abscisse -1 coupe la courbe à la hauteur -2 , et l'horizontale de hauteur 3 ne rencontre la courbe qu'en un seul point, d'abscisse 2. **À vous les deux phrases de conclusion**, en précisant pour chacune si la lecture est sûre ou approchée, et pourquoi.

(b) Sur la même courbe, lire l'image de 0, puis les antécédents de -2 . Les deux premières étapes sont faites : la verticale d'abscisse 0 coupe la courbe une fois, et l'horizontale de hauteur -2 est déjà tracée mentalement d'un bout à l'autre du domaine. **À vous les lectures, leur nombre et les deux phrases.**

3.5. Ce qu'une courbe de fonction ne peut pas faire

Remarque – Pourquoi une verticale ne coupe-t-elle jamais deux fois ?

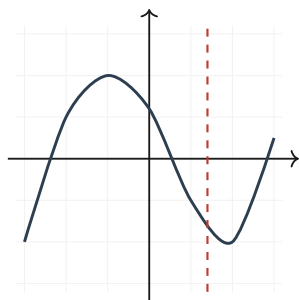
Supposons qu'une verticale rencontre une courbe en deux points. Ces deux points ont la même abscisse a et deux ordonnées différentes : le nombre a aurait donc deux images. C'est exactement ce que la définition interdit. Une courbe de fonction est donc coupée **au plus une fois** par toute droite verticale, et cette règle se vérifie à l'œil, en faisant glisser le bord d'une règle.

ÉCHO EXO

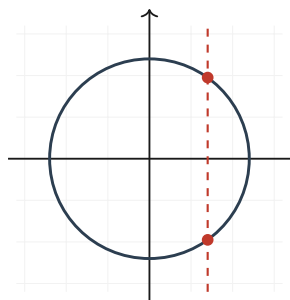
EXO-F1 · Ex. 22–30 ★★

*Lire un tracé, puis remonter le temps :
ce que la courbe ne dit pas, un domaine
troué, un point qui manque, puis la confi-
guration d'Oresme vers 1350, le pouls
sur le papier, le cadran solaire qui retarde,
et mille ans de la même table*

Vous aviez écrit cette règle vous-même, avant qu'on ne vous la nomme, devant le disque du camion.

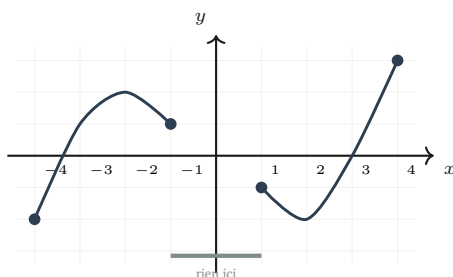


une seule rencontre



deux rencontres

♦ **Et si le domaine est troué ?** Alors la courbe l'est aussi. Au-dessus d'un nombre qui n'appartient pas au domaine, il n'y a rien à dessiner : aucun point, pas même un point vide. La courbe compte donc autant de morceaux que le domaine, et s'interrompt net aux bornes qu'il contient.



★ **Facultatif.** Un cercle n'est donc pas une courbe de fonction. Et si l'on n'en garde que la moitié supérieure ? Que se passe-t-il aux deux extrémités, où la verticale devient tangente ? La réponse tient en une phrase et n'exige rien de plus que la définition d'une fonction.

CE QUE LA CABANE A ÉCRIT

Revenons sur la corniche. Ce que le styler a tracé pendant près de douze ans est la courbe représentative d'une fonction : à chaque instant, une seule hauteur d'eau. Son domaine est troué chaque fois que l'appareil s'est arrêté, et pendant ces trous la trace ne dit rien de la mer, seulement qu'elle n'a rien écrit. En janvier 1897, on a fait mieux que la lire : le totalisateur calculait le niveau moyen au fil des ans, et porté sur un graphique ce niveau se rapprochait d'une hauteur pour s'y stabiliser. On l'a prise pour origine. L'altitude zéro des cartes de France continentale, celle d'où se comptent les quelque 4 800 mètres du mont Blanc, est la valeur dont s'approchait une courbe tracée par une machine.

Le compagnon numérique vous attend avec les réponses des douze morceaux, la naissance du graphique, et les courbes qui refusent d'en être.

CIBLE DA

DM1-F1 · Parties 0–VI ★★★★★

La machine qui écrivait des tables :

Londres, 1821, deux hommes comparent deux tables de nombres et n'y trouvent que des fautes. Une machine qui ne sait qu'additionner les écrit toutes, débusque une erreur sans refaire un seul calcul, puis rencontre ce qu'elle n'écrit jamais

JALON

Je sais ce qu'est un couple, tester

l'appartenance d'un point, et lire sur un tracé.

SUITE →

Ch. F2 · Résolution graphique

Vous savez lire une courbe. Le prochain chapitre apprend à s'en servir pour résoudre : trouver tous les x pour lesquels une courbe passe au-dessus d'une autre, ou d'une hauteur donnée.

Fin du chapitre

[ACT-F1] [EXO-F1] [DM1-F1] [EVAL-F1]