



G1. ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

Du produit scalaire aux équations de plans

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	2	2.2. Droites orthogonales	6
1. PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE	3	2.3. Vecteur normal à un plan	7
1.1. Définition et expression analytique	3	2.4. Droite orthogonale à un plan.	8
1.2. Norme et distance.	4	3. ÉQUATIONS CARTÉSIENNES DE PLANS	8
1.3. Propriétés du produit scalaire	5	3.1. Théorème fondamental	9
2. ORTHOGONALITÉ	6	3.2. Déterminer une équation de plan	9
2.1. Vecteurs orthogonaux	6	3.3. Plans parallèles et perpendiculaires.	10
		4. PROJETÉ ORTHOGONAL ET DISTANCES	10
		4.1. Projeté orthogonal sur un plan.	10
		4.2. Distance d'un point à un plan	11

PARCOURS DU CHAPITRE

- **Essentiel** — Socle minimal : définitions, propriétés clés, méthode de base.
- ◆ **Approfondissement** — Démonstrations, exemples travaillés, exercices de synthèse.
- ★ **Excellence** — Extensions, liens inter-chapitres, DM et questions ouvertes.

Documents associés : [ACT-G1] Activité • [EXO-G1] Exercices • [EVAL-G1] Évaluation



Compagnon numérique du chapitre

Quiz • Vidéos • Flashcards

« La géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses. »

Rachid Guejda

<https://rguejda.com>

— Jean Dieudonné, 1960

INTRODUCTION – COMMENT LES MATHÉMATICIENS ONT APPRIVOISÉ LA TROISIÈME DIMENSION

La géométrie plane, celle du Livre I des *Éléments* d'Euclide, suffisait aux géomètres grecs pour arpenter la Terre. Mais dès qu'il s'agit de bâtir un temple ou de calculer le volume d'une pyramide, il faut quitter le plan. **Euclide** consacre à ce défi les Livres XI à XIII de ses *Éléments*, où il pose les premières définitions rigoureuses de la perpendicularité dans l'espace. Sa Proposition XI.4 affirme qu'une droite élevée perpendiculairement sur deux droites sécantes est perpendiculaire au plan qu'elles déterminent : c'est, mot pour mot, le théorème central de notre chapitre.

Pendant près de deux millénaires, la géométrie de l'espace reste *synthétique* : on raisonne sur des figures, sans coordonnées. Le tournant a lieu au XVII^e siècle. En 1637, **René Descartes** publie *La Géométrie*, où il montre que chaque point du plan peut être repéré par deux nombres. L'idée de Descartes—associer à la géométrie le calcul algébrique—sera étendue à l'espace par ses successeurs. On passe alors d'une géométrie de *construction* (règle et compas) à une géométrie de *calcul* (coordonnées et équations).

Un siècle et demi plus tard, **Gaspard Monge** (1746–1818) franchit une étape décisive. Professeur à l'École du génie de Mézières, il invente la *géométrie descriptive* : une méthode systématique pour représenter les objets de l'espace par des **projections orthogonales** sur deux plans. Son outil fondamental est précisément la notion de **droite perpendiculaire à un plan**. Les plans techniques que dessinent aujourd'hui les architectes et les ingénieurs descendent directement de ses travaux.

Enfin, l'unification entre géométrie et algèbre s'achève au XIX^e siècle avec la formalisation du **produit scalaire**. Cet outil, que nous avons découvert en première dans le plan, permet de *calculer* l'orthogonalité au lieu de la *constater* sur une figure. Son extension à l'espace tridimensionnel est l'objet de ce chapitre.

Le parcours que nous allons suivre reflète cette histoire :

1. Le **produit scalaire dans l'espace** : on étend l'outil de la première au cas de trois coordonnées.
2. L'**orthogonalité** : vecteurs orthogonaux, droites orthogonales, droite perpendiculaire à un plan, vecteur normal — la notion centrale du chapitre.
3. Les **équations cartésiennes de plans** : la traduction algébrique de l'orthogonalité, héritière directe de Descartes.
4. Le **projeté orthogonal et les distances** : les applications pratiques, dans la lignée de Monge.

Le fil directeur est simple : le produit scalaire est l'**outil**, l'orthogonalité est le **concept**, et l'équation de plan est le **langage** qui en découle.

Euclide, Éléments, Livre XI (vers 300 av. J.-C.). Sur les 13 livres, les trois derniers (XI, XII, XIII) sont consacrés à la géométrie de l'espace.

— Euclide, ~300 av. J.-C.

Descartes, La Géométrie (1637), appendice du Discours de la méthode. Il y introduit les coordonnées, mais uniquement dans le plan.

— Descartes, 1637

Monge, Géométrie descriptive (1795). Né fils d'un rémouleur, Monge entre à l'École royale du génie de Mézières où il révolutionne la représentation des fortifications.

— Monge, 1795

Aujourd'hui, les moteurs de rendu 3D (jeux vidéo, cinéma) calculent des millions de vecteurs normaux par seconde pour déterminer comment la lumière se reflète sur chaque surface.

1. PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

1.1. Définition et expression analytique

Remarque – Pourquoi le produit scalaire s'étend naturellement à l'espace ■

Deux vecteurs non nuls de l'espace déterminent toujours un plan (le plan qui les contient). L'angle entre ces vecteurs est donc un angle *plan*, et le produit scalaire se définit exactement comme en première. On ne crée pas un nouvel outil : on étend le domaine d'application de celui qu'on connaît déjà.

DÉFINITION – PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE ■

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace. Le **produit scalaire** de \vec{u} et \vec{v} est le nombre réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

avec la convention $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

PROPRIÉTÉ – FORMULES DE POLARISATION – RAPPEL DE PREMIÈRE ■

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Ces identités, démontrées en première à l'aide des propriétés algébriques du produit scalaire, restent valables dans l'espace.

PROPRIÉTÉ – EXPRESSION ANALYTIQUE ■

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

Démonstration ♦.

On utilise la formule de polarisation : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.
Dans un repère orthonormé, on admet que $\|\vec{w}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2$ pour

$\vec{w} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (démontré en section suivante). On a alors :

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 + (z + z')^2$$

En développant : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 + z^2 + 2zz' + z'^2$.

OBJECTIFS

Étendre le produit scalaire au cas de l'espace.

Calculer avec des coordonnées dans un RON.

← PRÉREQUIS

Ch. de 1^{re}

Produit scalaire dans le plan, vecteurs de l'espace.

Scalaire : Du latin *scalaris* (échelle). Le produit scalaire est un **nombre**, par opposition à un vecteur.

Toutes les formules de première restent valables : formule avec le cosinus, formule de polarisation, identités remarquables. La seule nouveauté est la troisième coordonnée.

$$D'o\grave{u} \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(2xx' + 2yy' + 2zz') = xx' + yy' + zz'. \quad \blacksquare$$

PORTAIL ACT

ACT-G1 · Phases 1–2

Découverte dans le cube.

1.2. Norme et distance

PROPRIÉTÉ – NORME ET DISTANCE ■

Dans un repère orthonormé :

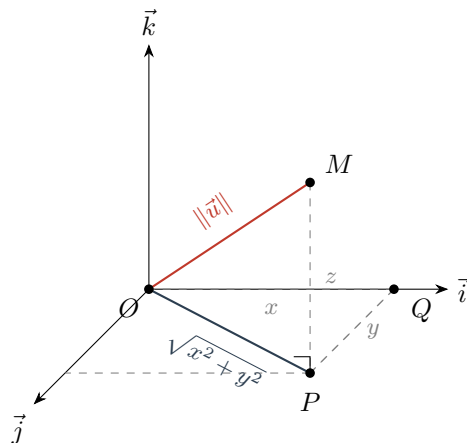
$$- \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$- AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Démonstration par Pythagore itéré ■.

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Considérons le point $M(x, y, z)$ et ses projections :

$P(x, y, 0)$ est le projeté de M sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$, et $Q(x, 0, 0)$ est le projeté de P sur l'axe $(O; \vec{i})$.



Étape 1 (dans le plan horizontal) : le triangle OQP est rectangle en Q , donc : $OP^2 = x^2 + y^2$.

Étape 2 (dans le plan vertical) : le triangle OPM est rectangle en P , donc :

$$OM^2 = OP^2 + PM^2 = (x^2 + y^2) + z^2$$

D'où $\|\vec{u}\| = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

La formule de distance s'en déduit :

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

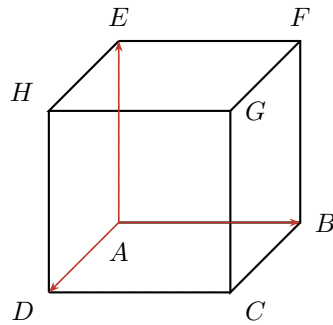
On applique Pythagore **deux fois** : une fois dans le plan horizontal pour obtenir OP , puis une fois dans le plan vertical (O, P, M) pour obtenir OM .

Exemple – ■

Dans le cube $ABCDEFGH$ unitaire muni du repère orthonormé

$(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, la grande diagonale AG vérifie :

$$AG = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{3}}$$



$$\vec{i} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{j} = \overrightarrow{AD}, \quad \vec{k} = \overrightarrow{AE}$$

Ce cube servira de cadre à de nombreux exemples et exercices du chapitre. Le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est ortho-normé.

1.3. Propriétés du produit scalaire

PROPRIÉTÉ – PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES ■

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel λ :

1. **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. **Bilinéarité** : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
3. **Carré scalaire** : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Attention – ■

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un **nombre réel**, pas un vecteur ! On ne peut pas écrire $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$.

Exemple – Utilisation de la bilinéarité ■

Développons $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ en utilisant les propriétés algébriques :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) && \text{(carré scalaire)} \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} && \text{(bilinéarité)} \\ &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 && \text{(symétrie + carré scalaire)} \end{aligned}$$

On retrouve l'identité remarquable, analogue à $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

ÉCHO EXO

APL-G1-01 *

Calculs de produits scalaires et normes.

2. ORTHOGONALITÉ

2.1. Vecteurs orthogonaux

DÉFINITION – VECTEURS ORTHOGONAUX ■

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **orthogonaux** si et seulement si :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Convention : le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

Exemple – ■

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} : \vec{u} \cdot \vec{v} = 4 + 2 - 6 = \boxed{0}, \text{ donc } \vec{u} \perp \vec{v}.$$

2.2. Droites orthogonales

DÉFINITION – DROITES ORTHOGONALES ■

Deux droites de l'espace sont **orthogonales** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Attention – ■

Dans l'espace, **orthogonal** \neq **perpendiculaire** !

Deux droites **perpendiculaires** sont orthogonales et sécantes.

Deux droites orthogonales peuvent ne pas se rencontrer (droites non coplanaires).

Exemple – ■

Dans le cube unitaire (repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$), les droites (AG)

$$\text{et } (BD) \text{ ont pour vecteurs directeurs } \vec{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\vec{AG} \cdot \vec{BD} = -1 + 1 + 0 = 0$: ces droites sont orthogonales.

Mais (AG) et (BD) ne se coupent pas (la grande diagonale et la diagonale de face ne sont pas coplanaires).

OBJECTIFS

Définir l'orthogonalité de vecteurs, droites, droite-plan.

Vecteur normal à un plan.

ÉCHO EXO

APL-G1-02 *

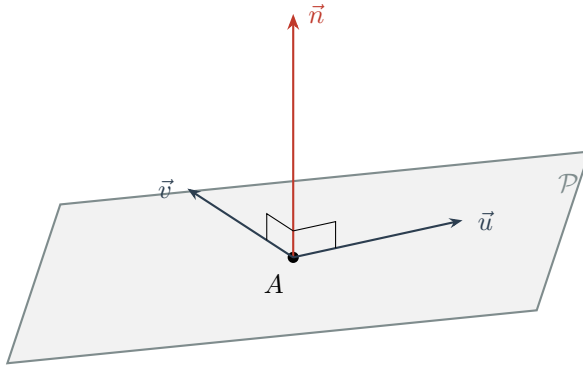
Orthogonalité de vecteurs.

Cette distinction n'existe pas dans le plan, où toutes les droites sont coplanaires. C'est une spécificité de l'espace.

2.3. Vecteur normal à un plan

DÉFINITION – VECTEUR NORMAL ■

Un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ est **normal** à un plan \mathcal{P} s'il est orthogonal à tout vecteur de \mathcal{P} .



MÉTHODE – TROUVER UN VECTEUR NORMAL ■

Soit \mathcal{P} un plan défini par un point A et deux vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} (non colinéaires).

▷ 1. On cherche $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

▷ 2. On obtient un système de 2 équations à 3 inconnues.

▷ 3. On fixe une coordonnée (par exemple $c = 1$) et on résout.

Exemple – ■

Trouver un vecteur normal au plan passant par $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 0)$ et $C(0; -1; 3)$.

$\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On cherche $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ -a - b + 2c = 0 \end{cases}$$

En additionnant : $c = 0$, puis $a = -b$. On choisit $b = -1$, $a = 1$:

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ÉCHO EXO

APL-G1-04 **

Équation de plan par trois points.

2.4. Droite orthogonale à un plan

DÉFINITION – DROITE ORTHOGONALE À UN PLAN ■

Une droite d est **orthogonale** à un plan \mathcal{P} si son vecteur directeur est un **vecteur normal** à \mathcal{P} .

De façon équivalente, d est orthogonale à \mathcal{P} si elle est orthogonale à toute droite de \mathcal{P} .

THÉORÈME – CARACTÉRISATION PRATIQUE ■

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à **deux droites sécantes** de ce plan.

Démonstration ♦

Soient \vec{u}_1 et \vec{u}_2 deux vecteurs non colinéaires du plan \mathcal{P} , et \vec{n} un vecteur directeur de d tel que $\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 0$.

Tout vecteur \vec{w} de \mathcal{P} s'écrit $\vec{w} = \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (car \vec{u}_1 et \vec{u}_2 forment une base de \mathcal{P}).

Par bilinéarité : $\vec{n} \cdot \vec{w} = \alpha \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{u}_1)}_{=0} + \beta \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{u}_2)}_{=0} = 0$.

Donc \vec{n} est orthogonal à tout vecteur de \mathcal{P} : c'est un vecteur normal, et $d \perp \mathcal{P}$. ■

C'est la Proposition XI.4 d'Euclide (voir l'introduction), formulée ici en langage vectoriel moderne.

— Euclide, ~300 av. J.-C.

PROPRIÉTÉ – ■

\vec{n} est normal à \mathcal{P} si et seulement si \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de \mathcal{P} .

JALON

C'est le résultat clé du chapitre : il réduit une condition infinie (toute droite du plan) à une vérification finie (deux droites).

ÉCHO EXO

THE-G1-06 **

Démonstration détaillée et application dans le cube.

3. ÉQUATIONS CARTÉSIENNES DE PLANS

Nous savons désormais qu'un plan \mathcal{P} est entièrement caractérisé par un point et un vecteur normal \vec{n} . Or, dire qu'un point M appartient à \mathcal{P} revient à dire que \overrightarrow{AM} est orthogonal à \vec{n} , c'est-à-dire que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. En exprimant cette condition en coordonnées, on obtient une **équation** du plan : c'est le passage de la géométrie à l'algèbre, dans la droite ligne de l'idée de Descartes.

OBJECTIFS

Déterminer et utiliser une équation cartésienne de plan.

Plans parallèles, perpendiculaires.

3.1. Théorème fondamental

THÉORÈME – ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN ■

Soit \mathcal{P} un plan passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur normal

$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Alors : $M(x, y, z) \in \mathcal{P}$ si et seulement si :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{où } d = -(ax_A + by_A + cz_A)$$

Réciproquement, tout ensemble $\{(x, y, z) : ax + by + cz + d = 0\}$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est un plan de vecteur normal $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Démonstration ■

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

$$\text{Or } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A).$$

En posant $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on obtient $ax + by + cz + d = 0$.

■

Exemple - ■

Équation du plan passant par $A(1; 2; -1)$ de vecteur normal

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} :$$

$3(x - 1) + (-1)(y - 2) + 2(z + 1) = 0$, soit $3x - 3 - y + 2 + 2z + 2 = 0$,
d'où :

$$3x - y + 2z + 1 = 0$$

Vérification : $3(1) - 2 + 2(-1) + 1 = 3 - 2 - 2 + 1 = 0 \checkmark$.

Cartésien : De René Descartes (1596–1650), qui introduit les coordonnées et l'algébrisation de la géométrie.

ÉCHO EXO

APL-G1-03 *

Vecteur normal et équation de plan.

3.2. Déterminer une équation de plan

MÉTHODE – TROIS MÉTHODES ■

- ▷ **1. Point + vecteur normal** : substitution directe dans $ax + by + cz + d = 0$.
- ▷ **2. Trois points A, B, C** : calculer $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, trouver \vec{n} orthogonal aux deux, puis l'équation.
- ▷ **3. Point + deux vecteurs directeurs** : même méthode que ci-dessus.

3.3. Plans parallèles et perpendiculaires

PROPRIÉTÉ – PARALLÉLISME ET PERPENDICULARITÉ ■

Soient \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 deux plans de vecteurs normaux \vec{n}_1 et \vec{n}_2 .

- $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1$ et \vec{n}_2 sont **colinéaires**.
- $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

Remarque – Intersection de deux plans ♦

Deux plans non parallèles se coupent selon une **droite**. Pour la déterminer :

- Trouver un point de la droite (résoudre le système avec $z = 0$ par exemple).
- Un vecteur directeur est orthogonal aux deux vecteurs normaux.

Une droite d de vecteur directeur \vec{u} est orthogonale au plan \mathcal{P} de vecteur normal \vec{n} si et seulement si \vec{u} et \vec{n} sont **colinéaires**.

ÉCHO EXO

SYN-G1-09 **

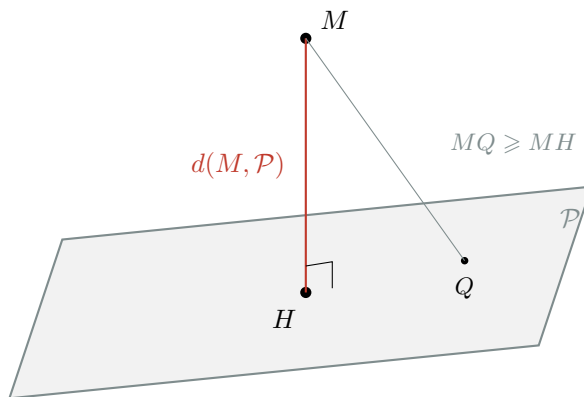
Intersection de plans.

4. PROJETÉ ORTHOGONAL ET DISTANCES

4.1. Projeté orthogonal sur un plan

DÉFINITION – PROJETÉ ORTHOGONAL ■

Soit M un point et \mathcal{P} un plan. Le **projeté orthogonal** de M sur \mathcal{P} est l'unique point $H \in \mathcal{P}$ tel que la droite (MH) est orthogonale à \mathcal{P} .



OBJECTIFS

Projeter, calculer des distances point-plan.

Le projeté orthogonal H est le point du plan le **plus proche** de M . Pour tout autre point Q du plan, $MQ \geq MH$.

MÉTHODE – CALCULER LE PROJETÉ ORTHOGONAL ♦

Soit $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ et $M(x_0, y_0, z_0)$.

- ▷ 1. La droite (MH) passe par M et a pour vecteur directeur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

▷ 2. Représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

▷ 3. On substitue dans l'équation du plan et on résout en t .

▷ 4. On en déduit les coordonnées de H .

ÉCHO EXO

SYN-G1-08 **

Distance et projeté orthogonal.

4.2. Distance d'un point à un plan

THÉORÈME – FORMULE DE LA DISTANCE ■

La distance du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ au plan $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Démonstration ♦.

Soit H le projeté orthogonal de M_0 sur \mathcal{P} . On paramètre la droite (M_0H) :

$$H = M_0 + t\vec{n} \quad \text{soit} \quad H(x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$$

Comme $H \in \mathcal{P} : a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$.

D'où :

$$(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) + t(a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

$$\text{soit} : t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

La distance est $M_0H = |t| \times \|\vec{n}\|$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} M_0H &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

■

Exemple – ■

Distance de $M(1; 3; -1)$ au plan $\mathcal{P} : 2x + y - 2z + 3 = 0$:

$$d = \frac{|2(1) + 1(3) + (-2)(-1) + 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|2 + 3 + 2 + 3|}{\sqrt{9}} = \frac{10}{3} = \boxed{\frac{10}{3}}$$

ÉCHO EXO

SYN-G1-07 **

Le cube, droite \perp plan, distance.