



DM 1 · A3. DEVINER FAUX

Thèbes, vers 1550 avant notre ère · l'art de trouver juste en essayant faux

LE PLAN DE L'ÉDIFICE

PARTIE	NIVEAUX	S'APPUIE SUR
0. Prologue	△	
I. Préliminaires : cibles, essais, erreurs		
II. La recette du scribe	△▲	les préliminaires
III. Là où la recette casse	△▲	R3 et la partie II
IV. Les deux erreurs	△▲◆	R2 et la partie III
V. La droite qui devine	△▲◆	R4 et la partie IV
VI. Le sommet : chiffrer $\sqrt{7}$	△▲◆	R4 et la partie V

Facultatif, et pour longtemps. Tout travail sincère, même partiel, est valorisé ; un travail bâclé ne l'est jamais. Ce document peut vous accompagner plusieurs années : certaines questions vous attendront en prépa ou à l'université. Horizon raisonnable : 3 à 4 semaines. Et si vous bloquez, écrivez : dire où l'on bloque et pourquoi est déjà du travail mathématique, souvent le plus formateur. Vérifiez toujours les hypothèses d'un résultat avant de l'utiliser.

△ fondations : accessible avec le cours · ▲ construction : recul et autonomie · ◆ sommet : défis, ou invitations pour plus tard

PROLOGUE

Le scribe qui essayait faux

THÈBES, vers 1550 avant notre ère. Un scribe nommé Ahmès recopie, sur un rouleau de papyrus de plusieurs mètres, un recueil de problèmes déjà vieux de trois siècles. On y apprend à partager des pains, à mesurer des greniers, à nourrir des volailles ; et, au problème 24, on y lit ceci : « une quantité et son septième font 19. Quelle est cette quantité ? »

Ahmès ne connaît ni le signe égal, ni la lettre x , ni aucun des gestes du chapitre A3 : l'algèbre ne sera nommée et systématisée que vingt-quatre siècles plus tard, à Bagdad. Et pourtant il donne la réponse exacte. Sa méthode tient en une phrase déconcertante : **essayer une valeur fausse, exprès, puis corriger le tir**. Il essaie 7, parce que 7 rend le septième commode. Or 7 et son septième font 8, pas 19 : c'est faux. Mais le scribe ne jette pas son essai. Il le *corrige* : puisque 8 doit devenir 19, il multiplie son essai par $\frac{19}{8}$, et annonce $7 \times \frac{19}{8} = \frac{133}{8}$, c'est-à-dire $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

Ce document explore cette idée sur trois mille cinq cents ans : pourquoi un essai faux, corrigé, donne-t-il la bonne réponse ? Quand un seul essai suffit-il, quand en faut-il deux, et que peut la méthode là où même l'algèbre ne donne plus de valeur exacte ?

△ Q1. La quantité cherchée est la solution de l'équation $x + \frac{x}{7} = 19$.

1. Vérifier, comme au chapitre A3, que $\frac{133}{8}$ est solution de cette équation.
2. Résoudre l'équation avec les gestes du cours (on pourra multiplier les deux membres par 7), et retrouver la réponse du scribe. Conclure par l'ensemble S .

PARTIE I

Préliminaires : cibles, essais, erreurs

Notations utilisées dans tout le document. Une **expression du premier degré** est une expression qui, à tout réel x , associe le nombre $E(x) = mx + p$, où m et p sont des réels fixés avec m non nul ; $E(a)$ désigne la valeur de l'expression quand on remplace x par le réel a . Lorsque $p = 0$, on dit que l'expression est **sans constante** : elle s'écrit $E(x) = kx$.

DÉFINITION – CIBLE, ESSAI, ERREUR

Résoudre l'équation $E(x) = c$, c'est chercher les réels qui amènent l'expression sur la **cible** c . Un **essai** est un réel a que l'on propose ; son **erreur** est le réel

$$e = E(a) - c.$$

L'erreur est positive si la valeur $E(a)$ dépasse la cible (*excédent*), négative si elle reste en dessous (*déficit*), nulle exactement quand a est solution.

R1 – LES GESTES LÉGAUX

Ajouter un même réel aux deux membres d'une équation, ou multiplier ses deux membres par un même réel non nul, conserve l'ensemble des solutions. (Démontré au cours A3, § 1.3 ; utilisable partout ici.)

R2 – LA SOLUTION DU PREMIER DEGRÉ

Pour tous réels m , p et c avec m non nul, l'équation $mx + p = c$ a exactement une solution, le réel $\frac{c-p}{m}$. (Conséquence de R1, admise ici ; c'est la discussion de l'exercice 8 de l'Atelier.)

PARTIE II

s'appuie sur les préliminaires

La recette du scribe

La méthode d'Ahmès porte aujourd'hui un nom : la **fausse position simple**. On essaie une valeur commode, on regarde ce qu'elle produit, on corrige par proportionnalité. Cette partie la fait fonctionner, puis démonte le mécanisme.

THÈBES, VERS 1550 AVANT NOTRE ÈRE

Le rouleau d'Ahmès, dit *papyrus Rhind* du nom de l'Écossais qui l'acheta à Louxor en 1858, aligne plus de quatre-vingts problèmes résolus. La quantité inconnue y est appelée *aha*, le « tas ». Aucun symbole, aucune

équation : des recettes, un exemple, et le geste de l'essai corrigé, déjà parfaitement rodé.

△ **Q2.** Un autre problème de tas : « une quantité et son cinquième font 18 ».

1. Appliquer la recette du scribe : essayer 5, calculer ce que produit cet essai, puis corriger l'essai comme Ahmès l'a fait au prologue.
2. Vérifier que la valeur obtenue est solution de $x + \frac{x}{5} = 18$.
3. Résoudre cette équation avec les gestes du cours, et comparer.

△ **Q3.** La recette, en formule. Pour une expression **sans constante** $E(x) = kx$ et une cible c , la recette s'écrit : si l'essai a produit la valeur $r = E(a)$, non nulle, alors on propose le réel $\frac{a \times c}{r}$.

1. L'appliquer à l'équation $3x = 21$ avec l'essai $a = 5$, puis vérifier la valeur proposée.
2. Le problème du prologue s'écrit $\frac{8}{7}x = 19$ (en effet, $x + \frac{x}{7} = \frac{7x + x}{7} = \frac{8}{7}x$) : montrer que la recette, avec l'essai 7, redonne exactement $\frac{133}{8}$.

▲ **Q4.** La recette, démontrée. Dans cette question, k et c désignent des réels, k non nul, et a un essai non nul de valeur $r = ka$.

1. Justifier que r n'est pas nul, puis que $k = \frac{r}{a}$.
2. En utilisant R2, montrer que la solution de $kx = c$ est exactement $\frac{a \times c}{r}$. Rédiger la conclusion en français : pour toute expression sans constante, la recette du scribe donne la solution exacte.
3. En déduire que la valeur $\frac{a \times c}{r}$ ne dépend pas de l'essai a choisi : le choix de l'essai est *libre*.

R3 – LA FAUSSE POSITION SIMPLE

Pour toute expression sans constante $E(x) = kx$ avec k non nul, toute cible c et tout essai a non nul de valeur $r = E(a)$: la solution de $E(x) = c$ est le réel $\frac{a \times c}{r}$. (Démontré à la question Q4.)

PARTIE III

s'appuie sur R3 et la partie II

Là où la recette casse

Trois mille ans de succès, et pourtant la recette a une frontière précise. Cette partie la localise : c'est elle qui rendra la suite nécessaire.

△ **Q5.** On considère l'expression $E(x) = 2x + 5$ et la cible 25.

1. Calculer $E(4)$, puis appliquer aveuglément la recette du scribe avec l'essai $a = 4$: quelle valeur propose-t-elle ?
2. Tester cette valeur : est-elle solution de $2x + 5 = 25$?
3. Résoudre correctement $2x + 5 = 25$ avec les gestes du cours. Conclure par S , et constater l'écart.

▲ **Q6.** Le coupable est le terme constant. Dans cette question, $E(x) = mx + p$ avec m non nul, et a désigne un réel.

1. Exprimer $E(2a)$ et $2E(a)$ en fonction de m , p et a , puis montrer que l'égalité $E(2a) = 2E(a)$ a lieu si et seulement si $p = 0$.

2. Conclure en français : doubler l'essai ne double la valeur que pour les expressions sans constante, et c'est exactement pour elles que la recette du scribe est exacte quel que soit l'essai.

PARTIE IV

s'appuie sur R2 et la partie III

Les deux erreurs

Si un essai ne suffit plus, on en fera deux. L'idée traverse un traité chinois, passe par les marchands arabes, et arrive en Europe dans le livre qui lui donna son nom le plus étrange.

CHINE, VERS LE PREMIER SIÈCLE

Les *Neuf Chapitres sur l'art mathématique*, compilés vers le premier siècle, consacrent leur chapitre 7 au *ying buzu*, « excédent et déficit » : vingt problèmes résolus par deux essais et leurs deux écarts. Le premier dit : « des personnes achètent un objet en commun. Si chacune donne 8 pièces, il en reste 3 ; si chacune donne 7 pièces, il en manque 4. Combien de personnes, et quel prix ? »

△ Q7. Le problème chinois, résolu à la moderne. On note n le nombre de personnes.

- Justifier que le prix de l'objet vaut à la fois $8n - 3$ et $7n + 4$, puis déterminer n et le prix par une équation du premier degré.
- Vérifier les deux comptes (l'excédent de 3 et le déficit de 4).

PISE, 1202

Dans le *Liber Abaci*, Léonard de Pise, dit Fibonacci, consacre son chapitre 13 à une méthode apprise des marchands arabes, qu'il nomme *elchataym*, de l'arabe *al-khata'ayn* : « les deux erreurs ». Il écrit qu'elle permet de résoudre « presque tous les problèmes ». Le problème d'ouvrier de la question Q9 est composé pour l'occasion, à la manière du *Liber Abaci*.

R4 – LA RÈGLE DES DEUX ERREURS

Soit une expression du premier degré $E(x) = mx + p$ (avec m non nul) et une cible c . Si deux essais distincts a et a' ont pour erreurs $e = E(a) - c$ et $e' = E(a') - c$, alors la solution de $E(x) = c$ est le réel

$$x^* = \frac{ae' - a'e}{e' - e}.$$

(Énoncée ici, démontrée à la question Q10 ; la question Q11 garantit que le dénominateur n'est jamais nul.)

△ Q8. La règle répare l'échec de la partie III. On reprend $E(x) = 2x + 5$ et la cible 25, avec les essais $a = 4$ et $a' = 12$.

- Calculer les deux erreurs e et e' .
- Appliquer R4 et vérifier qu'elle donne *exactement* la solution trouvée à la question Q5.

▲ Q9. À la manière du *Liber Abaci*. Un ouvrier est engagé pour 30 jours : chaque jour travaillé lui rapporte 7 pièces, chaque jour chômé lui en coûte 3. Au terme du contrat, il reçoit 90 pièces.

- En notant t le nombre de jours travaillés, montrer que le solde vaut $10t - 90$, puis déterminer t par une équation.

2. Retrouver ce résultat par la règle des deux erreurs, avec les essais 15 et 20 : calculer les deux erreurs, appliquer R4, comparer.

▲ **Q10.** La démonstration. C'est la question centrale du document : elle n'utilise que du calcul du premier degré. On garde les notations de R4, et l'on note $x_c = \frac{c-p}{m}$ la solution donnée par R2.

1. Justifier que $e = ma + p - c$ et $e' = ma' + p - c$.
2. En déduire que $e' - e = m(a' - a)$.
3. ♦ Montrer, en développant soigneusement, que

$$ae' - a'e = (a - a')(p - c).$$

4. En déduire que $x^* = \frac{c-p}{m}$ (le dénominateur $e' - e$ n'est pas nul : c'est l'objet de la question Q11), c'est-à-dire que la règle des deux erreurs donne exactement la solution x_c . Rédiger la conclusion en français. (ce résultat peut être admis pour la suite)

♦ **Q11.** Le dénominateur qui ne trahit jamais. Montrer, à l'aide de la question Q10.b, que si les essais a et a' sont distincts, alors les erreurs e et e' le sont aussi. Où l'hypothèse « m non nul » sert-elle ?

PARTIE V

s'appuie sur R4 et la partie IV

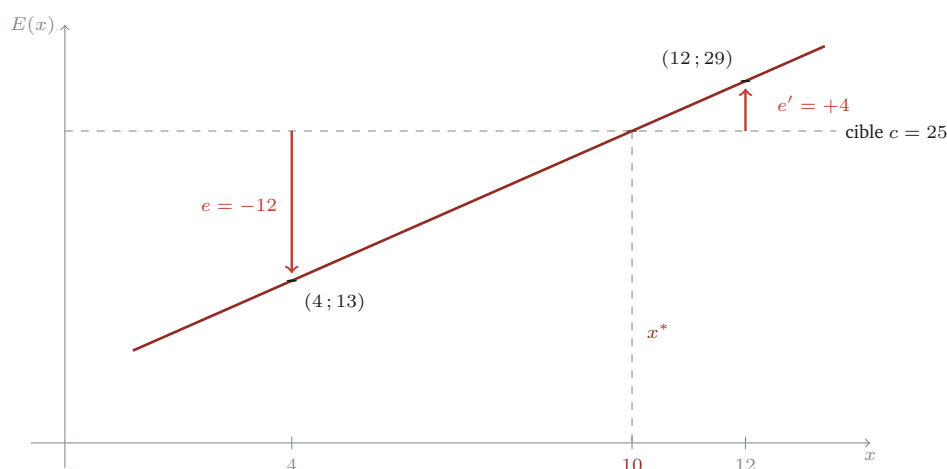
La droite qui devine

La formule de R4 sort d'un calcul ; voici l'image qui la rend évidente. On admet le résultat suivant, vu au collège et repris au chapitre F1.

R5 – LA DROITE D'UNE EXPRESSION

Dans un repère, les points de coordonnées $(a ; E(a))$, obtenus quand a parcourt les réels, forment une droite lorsque E est une expression du premier degré. (Admis ; c'est la représentation des fonctions affines.)

Dans toute cette partie, on garde les notations de R4 : une expression $E(x) = mx + p$ avec m non nul, une cible c , et deux essais distincts a et a' , d'erreurs e et e' .



△ **Q12.** Lecture de la figure, qui reprend la question Q8 avec $E(x) = 2x + 5$ et la cible 25.

1. Que représentent, sur la figure, les deux flèches rouges ? Pourquoi l'une pointe-t-elle vers le bas et l'autre vers le haut ?
2. La droite coupe la ligne de la cible en un point : lire son abscisse, et dire quelle question du document l'avait déjà calculée.

▲ **Q13.** La vitesse de la droite. On garde $E(x) = mx + p$ et deux essais distincts a et a' .

1. Vérifier sur l'exemple de la figure : calculer $\frac{E(12) - E(4)}{12 - 4}$, et comparer au coefficient $m = 2$.
2. Montrer, à l'aide de la question Q10.b, que pour toute expression du premier degré,

$$\frac{E(a') - E(a)}{a' - a} = m.$$

Ce nombre, qui mesure de combien E grandit par unité d'écart, s'appellera en Première le *coefficient directeur* de la droite.

▲ **Q14.** L'erreur mesure la distance. Montrer que pour tout essai a ,

$$e = m(a - x_c),$$

où x_c est la solution. En déduire, en français : l'erreur d'un essai est proportionnelle à son écart à la solution, et c'est ce qui permet de « trianguler » la solution avec deux essais seulement.

♦ **Q15.** Une autre écriture de la règle. Montrer que

$$x^* = a - e \times \frac{a' - a}{e' - e},$$

puis interpréter cette écriture : on part de l'essai a , et on le corrige d'une quantité proportionnelle à son erreur. C'est sous cette forme que la méthode vit aujourd'hui dans les machines.

PARTIE VI

s'appuie sur R4 et la partie V

Le sommet : chiffrer $\sqrt{7}$

L'exercice 21 de l'Atelier a établi que l'équation $x^2 = 7$ a exactement deux solutions, $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$. C'est une réponse exacte, et pourtant elle laisse sur sa faim : *combien* vaut $\sqrt{7}$? L'expression $C(x) = x^2$ n'est pas du premier degré ; la règle des deux erreurs ne s'applique donc plus en toute rigueur. On va l'appliquer quand même, et regarder ce qui se passe : la droite ment, mais elle ment peu, et de mieux en mieux.

▲ **Q16.** Montrer que l'expression $C(x) = x^2$ n'est pas du premier degré : supposer que $x^2 = mx + p$ pour tout réel x , examiner ce que donnent les valeurs 0, 1 et 2, et conclure à une contradiction.

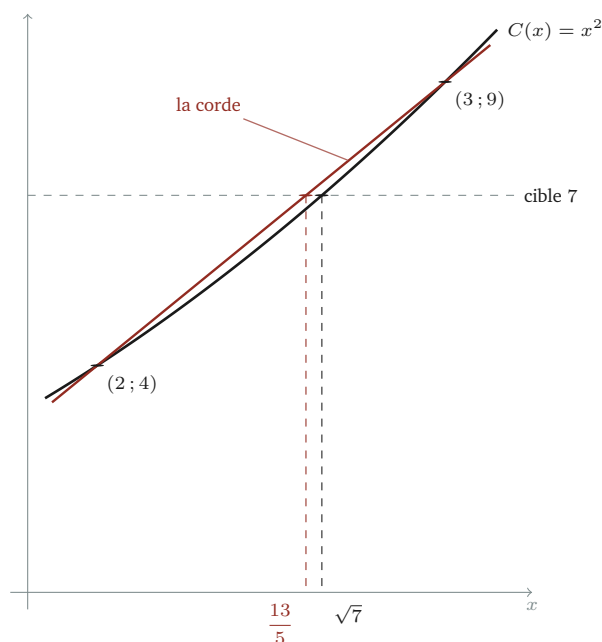
△ **Q17.** L'encadrement de départ.

1. Justifier que $2 < \sqrt{7} < 3$ (on pourra comparer 4, 7 et 9 et utiliser le résultat du chapitre A2 : comparer deux positifs, c'est comparer leurs carrés).
2. Calculer les erreurs des essais 2 et 3 pour la cible 7.

▲ **Q18.** Première triangulation. Appliquer la règle des deux erreurs aux essais 2 et 3 : montrer qu'elle propose $x_1 = \frac{13}{5} = 2,6$, puis calculer $(2,6)^2$. La cible est-elle atteinte ? De combien la manque-t-on ?

▲ **Q19.** On recommence, en mieux. Reprendre la règle avec les essais $\frac{13}{5}$ et 3.

1. Montrer que l'erreur de l'essai $\frac{13}{5}$ vaut $-\frac{6}{25}$, puis que la règle propose $x_2 = \frac{37}{14}$.
2. Donner une valeur approchée de x_2 , la comparer à la valeur de $\sqrt{7}$ affichée par la calculatrice, et constater le progrès.



♦ **Q20.** Pourquoi la réponse n'est plus exacte. À l'aide de la figure et de la question Q16, expliquer en quelques phrases pourquoi la règle des deux erreurs, exacte au premier degré, ne donne plus qu'une valeur approchée pour $x^2 = 7$: que remplace-t-elle, et où l'écart se loge-t-il ?

♦ **Q21.** Toujours par défaut. Montrer par le calcul que $\frac{13}{5}$ et $\frac{37}{14}$ sont tous deux *inférieurs* à $\sqrt{7}$: on pourra comparer $\left(\frac{13}{5}\right)^2$ à $\frac{175}{25}$, puis $\left(\frac{37}{14}\right)^2$ à $\frac{1372}{196}$. Les deux premières triangulations approchent ainsi $\sqrt{7}$ par la gauche ; la figure suggère qu'il en va de même de toutes les suivantes.

♦ **Q22.** La machine. Décrire, en français et en quelques étapes numérotées, ce qu'une machine devrait répéter pour approcher $\sqrt{7}$ d'aussi près que l'on veut par cette méthode : quels essais garder, quoi recalculer, quand s'arrêter. Pour rester fidèle aux parties précédentes, on gardera l'essai 3, qui reste de l'autre côté de la cible, et l'on remplacera l'autre essai à chaque tour. Cette méthode, la *regula falsi*, vit encore, sous ses variantes modernes, au cœur des solveurs du calcul numérique : la recette du scribe a trois mille cinq cents ans, et elle tourne encore.

ANNEXE • COUPS DE POUCE

À consulter librement : un coup de pouce n'est pas une solution, et y recourir n'enlève rien à la valeur du travail.

Q3. Pour le b, tout est déjà sous vos yeux : qui est k , qui est a , qui est r dans le calcul du prologue ?

Q4. Pour le c, relire le b : la solution qu'il fournit s'écrit sans a ni r .

Q6. Écrire les deux expressions, puis les soustraire : leur différence ne dépend que de p .

Q10. Pour le c, développer les deux produits $a(ma' + p - c)$ et $a'(ma + p - c)$: les termes en maa' se neutralisent, le reste se factorise par $(a - a')$.

Q11. Raisonner par contraposée : si $e = e'$, que dit la question Q10.b de $a' - a$?

Q14. Que vaut $E(x_c)$? Réinjecter dans la définition de l'erreur.

Q15. Réduire $a - e \times \frac{a' - a}{e' - e}$ au même dénominateur $e' - e$, et comparer au numérateur de R4.

Q20. La règle ne voit de C que deux points ; que fait-elle passer entre eux, et qui passe réellement entre eux ?

Q21. Comparer deux positifs, c'est comparer leurs carrés (chapitre A2) : si deux positifs u et v vérifient $u^2 < v^2$, alors $u < v$.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Sur le compagnon numérique du chapitre : le script de la *regula falsi* prêt à faire tourner vos triangulations, et la suite de l'histoire des méthodes qui devinent.