



DM 1 · A2. LES CINQUANTE-DEUX PARFUMS

Partitions : du jeu des encens aux nombres de Bell

LE PLAN DE L'ÉDIFICE

PARTIE	NIVEAUX	S'APPUIE SUR
0. Prologue et préliminaires	△	
I. Le jeu des cinq parfums	△▲	les préliminaires
II. Le triangle caché	△▲	R1 et la partie I
III. La formule d'Arima	▲◆	la partie II
IV. L'atelier des surjections	△▲	R2 et la partie II ; indépendante de III
V. Regards du sommet	◆	la partie II

Facultatif, et pour longtemps. Tout travail sincère, même partiel, est valorisé ; un travail bâclé ne l'est jamais. Ce document peut vous accompagner plusieurs années : certaines questions vous attendront en prépa ou à l'université. Horizon raisonnable : 3 à 4 semaines. Et si vous bloquez, écrivez : dire où l'on bloque et pourquoi est déjà du travail mathématique, souvent le plus formateur. Vérifiez toujours les hypothèses d'un résultat avant de l'utiliser.

△ fondations : accessible avec le cours · ▲ construction : recul et autonomie · ◆ sommet : défis, ou invitations pour plus tard

PROLOGUE

Edo : cinq volutes d'encens

DANS le Japon de l'époque d'Edo, les lettrés jouent à un jeu d'une élégance rare : le *genji-kō*. Le maître d'encens fait brûler cinq encens l'un après l'autre ; certains sont identiques, d'autres non, et rien ne l'indique à l'œil. Les invités hument les cinq volutes, puis chacun écrit sa réponse à la question : *lesquels sentaient pareil ?* Pour l'écrire sans un mot, on trace cinq bâtonnets verticaux, un par encens, et l'on relie d'un trait horizontal ceux que l'on juge de même parfum. Chaque réponse possible a ainsi son diagramme, son *genji-mon*, et chacun de ces diagrammes porte le nom d'un chapitre du *Dit du Genji*, le grand roman de Murasaki Shikibu. Or les recueils n'en dessinent jamais que *cinquante-deux*, et personne, en plusieurs siècles de parties, n'en a trouvé un cinquante-troisième. Ce devoir explique ce nombre, et ce qu'il cache : une famille d'objets qui échappe aux quatre modèles du chapitre, et qui a fait compter des mathématiciens de Kyōto à Londres.

Q1. Deux, puis trois encens.

- a) △ On joue avec deux encens seulement. Écrire toutes les réponses possibles au jeu. (On notera 12 la réponse « les deux sentaient pareil » et 1 | 2 la réponse « deux parfums différents ».)

- b) $\triangle$ Avec trois encens, la planche ci-dessous donne les cinq réponses possibles et leurs diagrammes. Vérifier qu'aucune n'a été oubliée, en recomptant les réponses selon leur nombre de groupes : combien à trois groupes ? à deux ? à un seul ?



Les cinq genji-mon du jeu à trois encens. Un trait horizontal relie les bâtonnets de même parfum.

Notations et outils. Formalisons le jeu. Dans tout le document, n et k désignent des entiers naturels, et E un ensemble fini. Les résultats encadrés R1 à R4 peuvent être cités partout.

DÉFINITION – PARTITION D'UN ENSEMBLE

Soit E un ensemble fini non vide. Une *partition* de E est un ensemble de parties de E , toutes non vides, deux à deux disjointes, et dont la réunion est E . Ces parties sont appelées les *blocs* de la partition.

Une réponse au genji-kō à n encens est exactement une partition de $\{1, 2, \dots, n\}$: les blocs sont les groupes de même parfum. On note :

$S(n, k)$ = le nombre de partitions de $\{1, \dots, n\}$ en exactement k blocs,

B_n = le nombre total de partitions de $\{1, \dots, n\}$.

Ces nombres ne dépendent que de n et k : renommer les éléments d'un ensemble transforme ses partitions en partitions, une à une (admis). On convient enfin que $S(n, k) = 0$ lorsque $k > n$ ou lorsque $n \geq 1$ et $k = 0$ (il n'y a alors aucune partition du type demandé), et que $S(0, 0) = 1$: l'ensemble vide admet une unique partition, celle qui n'a aucun bloc (la question Q9 y reviendra).

R1 – PRINCIPE ADDITIF

Si un ensemble fini A est la réunion de parties $A_1, \dots, A_p$ deux à deux disjointes, alors $\text{Card}(A) = \text{Card}(A_1) + \dots + \text{Card}(A_p)$. (Admis : démontré dans le cours du chapitre.)

R2 – PRINCIPE MULTIPLICATIF

Si une situation se construit en p étapes successives, la i -ième offrant n_i possibilités quels que soient les choix des étapes précédentes, alors le nombre total de situations est $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$. (Admis : démontré dans le cours du chapitre.)

R3 – PARTIES D'UN ENSEMBLE

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, un ensemble à n éléments possède 2^n parties. Si $n \geq 1$ et si a est un élément fixé de E , les parties de E qui contiennent a sont au nombre de 2^{n-1} . (Admis : la première affirmation est dans le cours ; la seconde s'en déduit, car $X \mapsto X \setminus \{a\}$ est une bijection entre ces parties et les parties de $E \setminus \{a\}$.)

Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$, leur formule, la symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et la relation de Pascal $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ sont ceux du cours, et s'utilisent librement.

Le jeu des cinq parfums

Avant toute théorie, il faut avoir compté à la main : c'est la règle du chapitre, et c'était déjà celle des joueurs d'Edo. Cette partie constitue le stock d'exemples sur lequel tout l'édifice s'appuiera.

Q2. Quatre encens.

- a) $\triangle$ Dresser la liste complète des partitions de $\{1, 2, 3, 4\}$, rangées par nombre de blocs (on pourra les noter comme en Q1 : par exemple $13 | 2 | 4$ désigne la partition de blocs $\{1, 3\}$, $\{2\}$ et $\{4\}$). Vérifier que l'on obtient

$$S(4, 1) = 1, \quad S(4, 2) = 7, \quad S(4, 3) = 6, \quad S(4, 4) = 1,$$

et en déduire la valeur de B_4 .

- b) $\triangle$ Justifier que pour tout $n \geq 1$, $S(n, 1) = 1$ et $S(n, n) = 1$.

Q3. L'avant-dernière colonne.

- a) $\blacktriangle$ Soit $n \geq 2$. Montrer qu'une partition de $\{1, \dots, n\}$ en $n - 1$ blocs possède exactement un bloc à deux éléments, tous les autres étant des singletons.
- b) $\blacktriangle$ En déduire que pour tout $n \geq 2$, $S(n, n - 1) = \binom{n}{2}$, et contrôler cette valeur sur la liste de la question Q2 pour $n = 4$.

Q4. Couper en deux.

- a) $\triangle$ Vérifier sur les listes des questions Q1 et Q2 que $S(3, 2) = 3$ et $S(4, 2) = 7$, puis conjecturer une formule pour $S(n, 2)$.
- b) $\blacktriangle$ Soit $n \geq 2$. Montrer que la donnée d'une partition de $E = \{1, \dots, n\}$ en deux blocs équivaut à la donnée du bloc contenant l'élément 1, et que ce bloc peut être n'importe quelle partie de E contenant 1 et distincte de E . En déduire, à l'aide de R3, que

$$\forall n \geq 2, \quad S(n, 2) = 2^{n-1} - 1.$$

Le triangle caché

Énumérer à la main s'arrête vite : pour cinq encens, il faudrait déjà écrire cinquante-deux réponses sans en oublier une. Il faut une machine. Or vous la connaissez : c'est exactement le geste qui a construit le triangle du chapitre, appliqué à un objet nouveau.

Q5. La récurrence du triangle. Soit $n \geq 2$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. On classe les partitions de $\{1, \dots, n\}$ en k blocs selon le sort de l'élément n .

- a) $\blacktriangle$ Montrer que les partitions dans lesquelles n est seul dans son bloc sont au nombre de $S(n - 1, k - 1)$, et que celles dans lesquelles n n'est pas seul sont au nombre de $k \cdot S(n - 1, k)$.
- b) $\blacktriangle$ En déduire, à l'aide de R1 :

$$\forall n \geq 2, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + k S(n - 1, k).$$

(ce résultat peut être admis pour la suite)

Comparez avec la démonstration combinatoire de la relation de Pascal vue en cours : c'est le même geste, le sort du dernier élément, qui engendre les deux triangles. Seul le facteur k les distingue, et il change tout.

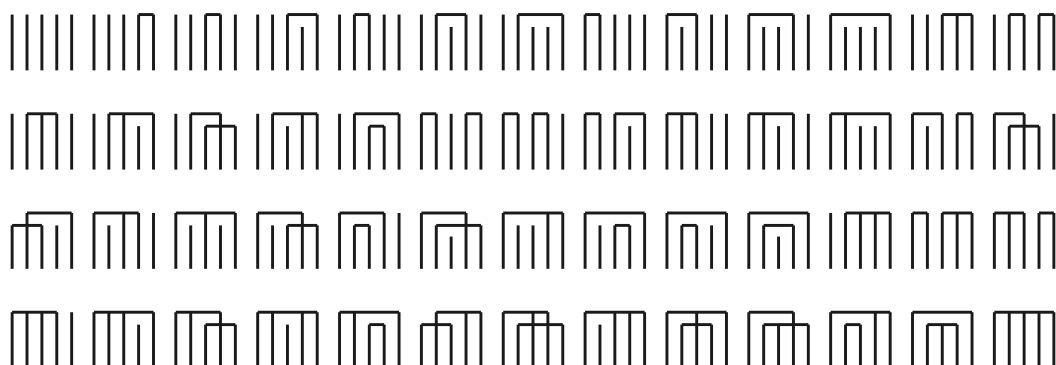
△ **Q6.** Recopier et compléter le triangle des nombres $S(n, k)$ jusqu'à la ligne $n = 7$ à l'aide de la récurrence de la question Q5.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	B_n
1	1							1
2	1	1						2
3	1	3	1					5
4	1	7	6	1				15
5	...	...	...	...	...			...
6	...	...	...	...	...	...		...
7	...	...	...	...	...	...	...	...

△ **Q7.** Justifier soigneusement, à l'aide de R1, que

$$\forall n \geq 1, \quad B_n = \sum_{k=1}^n S(n, k),$$

et vérifier ainsi que le jeu des cinq encens admet bien $B_5 = 52$ réponses possibles. Les voici toutes :



Les cinquante-deux genji-mon, rangés par nombre de groupes décroissant. Dans les recueils japonais, chacun porte le nom d'un chapitre du Dit du Genji.

À QUI CES NOMBRES ?

Les $S(n, k)$ sont dits *nombre de Stirling de seconde espèce*, les B_n *nombre de Bell*. Or James Stirling (1730) ne comptait aucune partition, comme la partie IV le révélera ; le nom lui fut attaché par Niels Nielsen au début du XX^e siècle. Quant à Eric Temple Bell, il écrivait lui-même en 1938 que ces nombres avaient été « redécouverts de nombreuses fois » ; le nom fut fixé par Becker et Riordan au milieu du siècle. Les noms des objets mathématiques récompensent rarement les premiers arrivés : ce devoir en donnera un exemple de plus.

▲ **Q8. Une colonne entière.** Démontrer par récurrence, en utilisant les questions Q4 et Q5 :

$$\forall n \geq 3, \quad S(n, 3) = \frac{3^{n-1} + 1}{2} - 2^{n-1}.$$

Contrôler la formule sur la colonne $k = 3$ du triangle de la question Q6.

La formule d'Arima

Le triangle exige de calculer toute la ligne n pour atteindre B_n . Au Japon, Matsunaga Yoshisuke a trouvé un raccourci : une formule qui relie directement les nombres B_n entre eux, sans passer par les $S(n, k)$. Elle repose sur une idée que ce chapitre vous a rendue familière : classer selon le sort d'un élément, puis compter classe par classe.

△ **Q9. La partition de rien.** On convient que $B_0 = 1$: l'ensemble vide admet exactement une partition, celle qui n'a aucun bloc. Vérifier que cette convention est cohérente avec la définition des préliminaires : chaque condition (blocs non vides, disjoints, de réunion E) est-elle satisfaite par la collection vide de blocs ?

Q10. Classer selon le bloc du dernier.

- a) △ On reprend les quinze partitions de $\{1, 2, 3, 4\}$ (question Q2), et on les classe selon l'ensemble A des *compagnons* de 4, c'est-à-dire les éléments qui partagent son bloc : le bloc de 4 est $\{4\} \cup A$, avec $A \subseteq \{1, 2, 3\}$. Recopier et compléter le tableau, et contrôler que le total vaut $B_4 = 15$:

Card(A)	0	1	2	3
choix possibles pour A	1	3	...	...
partitions du reste, pour chaque A	$B_3 = 5$	$B_2 = 2$	...	...
total de la classe	5	6	...	...

- b) ▲ Adapter ce classement à l'ensemble $\{1, \dots, n+1\}$ et à l'élément $n+1$ pour démontrer, à l'aide de R1 et R2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_{n-j},$$

puis, à l'aide de la symétrie des coefficients binomiaux, la forme équivalente encadrée en R4. (ce résultat peut être admis pour la suite)

R4 – FORMULE D'ARIMA

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

(Démontrée à la question Q10.)

EDO, 1769

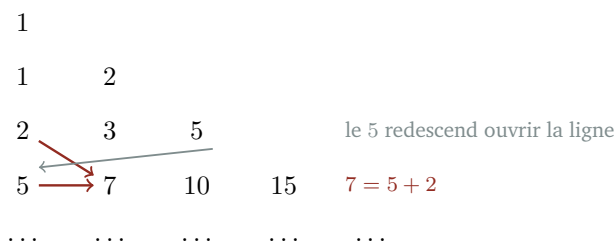
Matsunaga Yoshisuke, mathématicien du début du XVIII^e siècle japonais, établit cette relation et le comptage général des partitions, mais meurt sans les publier. C'est Arima Yoriyuki, seigneur de Kurume et mathématicien lui-même, qui les transmet en 1769 dans son *Shūki Sanpō*, un recueil de cent cinquante problèmes : cent soixante-cinq ans avant les articles d'E. T. Bell. La formule que vous venez de démontrer a donc porté un kimono bien avant un nom écossais.

△ **Q11.** À l'aide de la formule d'Arima (R4) et des valeurs déjà connues de $B_0, \dots, B_5$, retrouver B_5 par le calcul, puis établir :

$$B_6 = 203, \quad B_7 = 877.$$

Q12. Le triangle d'Aitken. Voici une autre machine à produire les B_n , ligne à ligne. La règle : la première ligne est « 1 » ; chaque nouvelle ligne *commence* par le dernier terme de la ligne précédente ; chaque terme

suivant est la somme du terme à sa gauche et du terme situé au-dessus de ce voisin de gauche.



- a) $\triangle$ Construire le triangle jusqu'à sa septième ligne, et constater que les nombres de Bell $B_1, B_2, \dots, B_7$ apparaissent en fin de chaque ligne.
- b) $\blacklozenge$ Pour $n \geq 1$, on note $a(n, 0), a(n, 1), \dots, a(n, n-1)$ les termes de la n -ième ligne. Démontrer, par récurrence sur n puis de proche en proche le long de la ligne, que :

$$\forall n \geq 1, \forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad a(n, k) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_{n-1-j}.$$

(Les deux moteurs de la preuve sont la relation de Pascal et la formule d'Arima.)

- c) $\blacklozenge$ En déduire que le dernier terme de la n -ième ligne vaut B_n : la machine est justifiée.

PARTIE IV

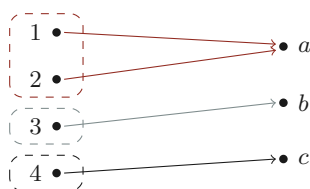
s'appuie sur R2 et la partie II ; indépendante de III

L'atelier des surjections

Les partitions semblent un objet à part ; elles se cachent en réalité au cœur d'un objet que le chapitre a déjà croisé : les applications entre ensembles finis. Cette partie fournit le dictionnaire, et il travaille dans les deux sens.

DÉFINITION – APPLICATION, INJECTION, SURJECTION

Une *application* f de E vers F associe à chaque élément de E un unique élément de F , noté $f(x)$. On dit que f est *injective* si deux éléments distincts de E ont toujours des images distinctes ; que f est *surjective* si tout élément de F est l'image d'au moins un élément de E ; que f est *bijective* si elle est les deux à la fois. Pour $y \in F$, la *fibres* de y est l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ des éléments de E dont l'image est y .



les fibres $\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}$ découpent E en blocs

Q13. Premiers comptages.

- a) $\triangle$ Rappeler, en citant R2, le nombre d'applications d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à k éléments ($n, k \geq 1$).
- b) $\triangle$ Écrire les huit applications de $\{1, 2, 3\}$ vers $\{a, b\}$ (on pourra noter f par le mot $f(1)f(2)f(3)$, comme aba), et entourer celles qui sont surjectives : vérifier qu'il y en a six.

c) $\triangle$ Contrôler l'égalité $6 = 2! \times S(3, 2)$.

Q14. Le dictionnaire. Soit $n \geq k \geq 1$. On note $\text{Surj}(n, k)$ le nombre de surjections d'un ensemble E à n éléments sur un ensemble F à k éléments.

- $\blacktriangle$ Montrer que les fibres des éléments de F par une surjection $f : E \rightarrow F$ forment une partition de E en k blocs.
- $\blacktriangle$ Réciproquement, montrer que la donnée d'une partition de E en k blocs, puis d'une bijection de l'ensemble de ses blocs vers F , détermine une et une seule surjection de E sur F , et que toute surjection s'obtient ainsi une seule fois.
- $\blacktriangle$ Conclure à l'aide de R2 :

$$\forall n \geq k \geq 1, \quad \text{Surj}(n, k) = k! \times S(n, k).$$

(ce résultat peut être admis pour la suite)

Q15. La table des surjections.

- $\triangle$ À l'aide du triangle de la question Q6, calculer $\text{Surj}(4, k)$ pour $k = 1, 2, 3, 4$, et vérifier que l'on obtient 1, 14, 36 et 24.
- $\blacktriangle$ Retrouver $\text{Surj}(4, 2) = 14$ sans la partie II : parmi les 2^4 applications de $\{1, 2, 3, 4\}$ vers $\{a, b\}$, lesquelles ne sont pas surjectives ?
- $\blacktriangle$ On tente la même stratégie pour $\text{Surj}(4, 3)$: retirer de 3^4 les applications qui évitent a , puis celles qui évitent b , puis celles qui évitent c . Expliquer pourquoi ce décompte retire certaines applications plusieurs fois, et pourquoi on ne peut donc pas conclure ainsi sans outil supplémentaire. (Cet outil, le *crible*, n'est pas au programme du chapitre : le compagnon numérique vous y attend.)

Q16. Classer par l'image.

- $\blacktriangle$ Soit $n, k \geq 1$. En classant les applications d'un ensemble à n éléments vers un ensemble F à k éléments selon leur ensemble image $J \subseteq F$, démontrer à l'aide de R1 :

$$k^n = \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \text{Surj}(n, j).$$

- $\triangle$ En déduire la valeur de $\text{Surj}(4, 3)$ à partir de $3^4 = 81$, $\text{Surj}(4, 1) = 1$ et $\text{Surj}(4, 2) = 14$, et contrôler l'accord avec la question Q15.a).

LONDRES, 1730

Voici enfin ce que faisait vraiment James Stirling. Sa *Methodus Differentialis* convertit les puissances en « factorielles descendantes » $k(k-1) \cdots (k-j+1)$, plus commodes pour ses calculs de sommes. Or $\binom{k}{j} \times j! = k(k-1) \cdots (k-j+1)$: la formule de la question Q16 s'écrit donc $k^n = \sum_j S(n, j) \times k(k-1) \cdots (k-j+1)$, et les coefficients de conversion de Stirling sont exactement nos compteurs de partitions. Ses tables de 1730 contenaient les $S(n, j)$ sans qu'aucune partition, aucun encens, n'y paraisse : il a fallu deux siècles pour que les deux lectures se reconnaissent.

Regards du sommet

Trois ascensions pour finir : deux identités que le triangle ne montre pas au premier regard, puis la révélation de ce que compte vraiment le jeu des parfums.

Q17. La diagonale $S(n, n-2)$. Soit $n \geq 4$.

- ♦ Montrer qu'une partition de $\{1, \dots, n\}$ en $n-2$ blocs est de l'un des deux types suivants, et d'un seul : ou bien un bloc de trois éléments et $n-3$ singletons, ou bien deux blocs de deux éléments et $n-4$ singletons.
- ♦ Compter les partitions de chaque type ; on justifiera avec soin que quatre éléments fixés se répartissent en deux paires d'exactly *trois* façons. En déduire :

$$\forall n \geq 4, \quad S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3 \binom{n}{4}.$$

- △ Contrôler la formule pour $n=5$ sur le triangle de la question Q6.

Q18. Une somme sur le triangle de Pascal.

- ♦ Soit $n \geq k \geq 0$. En classant les partitions de $\{1, \dots, n+1\}$ en $k+1$ blocs selon la réunion J des blocs qui ne contiennent pas $n+1$, démontrer :

$$S(n+1, k+1) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} S(j, k).$$

- △ Vérifier cette identité pour $n=4$ et $k=2$: les trois termes non nuls valent 6, 12 et 7, et le membre de gauche est $S(5, 3)$.

Q19. Ce que le jeu compte vraiment. Le chapitre A0 vous a appris à regarder les énoncés ; voici l'objet logique que les joueurs d'Edo manipulaient sans le nommer.

DÉFINITION – RELATION D'ÉQUIVALENCE

Une *relation* $\mathcal{R}$ sur un ensemble E précise, pour chaque couple (x, y) d'éléments de E , si « x est en relation avec y » (on écrit $x \mathcal{R} y$) ou non. Elle est dite *relation d'équivalence* si elle est : *réflexive* (pour tout $x \in E$, $x \mathcal{R} x$) ; *symétrique* (pour tous $x, y \in E$, si $x \mathcal{R} y$ alors $y \mathcal{R} x$) ; *transitive* (pour tous $x, y, z \in E$, si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, alors $x \mathcal{R} z$). La *classe* de x est alors l'ensemble des éléments en relation avec x .

- △ Au genji-kō, la relation « avoir le même parfum » sur l'ensemble des cinq encens est une relation d'équivalence : formuler ce que signifient concrètement la réflexivité, la symétrie et la transitivité pour les joueurs.
- ♦ Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble fini non vide E . Montrer que deux classes sont ou bien disjointes, ou bien confondues, et en déduire que l'ensemble des classes forme une partition de E .
- ♦ Réciproquement, montrer que toute partition de E est l'ensemble des classes d'une unique relation d'équivalence (celle qui déclare $x \mathcal{R} y$ lorsque x et y sont dans le même bloc).

- d) ♦ Conclure : le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments est B_n . Justifier par R3 qu'il existe $2^9 = 512$ relations sur $\{1, 2, 3\}$, et situer les $B_3 = 5$ relations d'équivalence parmi elles.

Le compte est bon : cinquante-deux diagrammes, parce que cinq encens n'admettent que cinquante-deux relations d'équivalence. Le chapitre vous avait donné quatre modèles, listes et parties ; les partitions sont un cinquième continent, avec son triangle, sa formule d'Arima et son dictionnaire des surjections. Vous savez désormais compter les façons de regrouper, ce qui est, à tout prendre, la première chose qu'un mathématicien fait d'un ensemble.

ANNEXE • COUPS DE POUCE

À consulter librement : un coup de pouce n'est pas une solution, et y recourir n'enlève rien à la valeur du travail.

Q2a. Pour deux blocs, classer selon le bloc qui contient 1 ; pour trois blocs, utiliser la question Q3 en éclairer : quel bloc n'est pas un singleton ?

Q3a. Sommer les tailles des blocs : $n - 1$ blocs non vides pour n éléments ne laissent qu'un seul élément « en trop ».

Q4b. Le second bloc est alors imposé : c'est le complémentaire. Combien de parties de E contiennent 1 (R3), et laquelle est interdite ?

Q5a. Si n n'est pas seul, le retirer laisse une partition de $\{1, \dots, n - 1\}$ en k blocs ; combien de manières de l'y réinsérer ?

Q8. À $k = 3$ fixé, la récurrence de Q5 donne $S(n, 3) = S(n - 1, 2) + 3 S(n - 1, 3)$, et Q4 fournit $S(n - 1, 2)$.

Q10b. Choisir d'abord A parmi les parties de $\{1, \dots, n\}$ à j éléments, puis partitionner librement les $n - j$ éléments restants : R2 pour chaque classe, R1 pour la somme.

Q12b. Deux moteurs : le premier terme de la ligne n est le dernier de la ligne $n - 1$, et l'hypothèse de récurrence jointe à la formule d'Arima l'identifie à B_{n-1} ; puis, le long de la ligne, $a(n, k + 1) = a(n, k) + a(n - 1, k)$ et la relation de Pascal recollent les deux sommes (réindexer la seconde).

Q14b. Une bijection des blocs vers F est une manière de donner un nom de F à chaque bloc ; l'application envoie alors chaque élément sur le nom de son bloc.

Q16a. Une application d'image exactement J est une surjection de E sur J . Classer les k^n applications selon J , et compter les J à j éléments.

Q17a. Sommer les tailles : n éléments dans $n - 2$ blocs non vides ne laissent que deux éléments « en trop », à loger ensemble ou séparément.

Q17b. Pour deux blocs de deux : choisir les quatre éléments concernés, puis les appairer. Fixer le plus petit des quatre : combien de partenaires possibles ?

Q18a. Le bloc de $n + 1$ est le complémentaire de J dans $\{1, \dots, n + 1\}$. Classer selon J : choisir J , puis le partitionner en k blocs.

Q19b. Si deux classes ont un élément commun z , utiliser la symétrie et la transitivité pour montrer que tout élément de l'une est dans l'autre.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

La formule explicite des $S(n, k)$ par le crible, la formule de Dobinski, et la planche des cinquante-deux genji-mon avec leurs chapitres du Dit du Genji vous attendent sur le compagnon numérique.