



DM 3 · A0. LE CALCUL DE LA PENSÉE

De l'algèbre oubliée de Boole aux circuits de Shannon

LE PLAN DE L'ÉDIFICE

PARTIE	NIVEAUX	S'APPUIE SUR
0. Prologue et préliminaires	△▲	
I. L'algèbre des 0 et 1	△▲	les préliminaires
II. Le OU exclusif et l'addition	△▲	la partie I
III. Construire la machine	▲	la partie II
IV. Le sommet : gagner à tous les coups	◆	la partie II et R2 du DM 1

Facultatif, et pour longtemps. Tout travail sincère, même partiel, est valorisé ; un travail bâclé ne l'est jamais. Ce document peut vous accompagner plusieurs années : certaines questions vous attendront en prépa ou à l'université. Horizon raisonnable : 3 à 4 semaines. Et si vous bloquez, écrivez : dire où l'on bloque et pourquoi est déjà du travail mathématique, souvent le plus formateur. Vérifiez toujours les hypothèses d'un résultat avant de l'utiliser.

△ fondations : accessible avec le cours · ▲ construction : recul et autonomie · ◆ sommet : défis, ou invitations pour plus tard

PROLOGUE

1937 : l'étudiant qui réveilla une algèbre morte

AU MIT, en 1937, un étudiant de vingt et un ans nommé Claude Shannon veille sur les centaines de relais électriques d'un calculateur analogique. Chaque relais est un interrupteur : ouvert ou fermé, rien d'autre. Et Shannon se souvient d'un cours de logique suivi au Michigan : l'algèbre d'un certain George Boole, fils de cordonnier de Lincoln, autodidacte devenu professeur sans aucun diplôme, qui avait écrit en 1854 un livre au titre démesuré, *Les lois de la pensée*, où le raisonnement se calcule avec des 0 et des 1. Personne, en quatre-vingt-trois ans, n'en avait rien fait. La thèse de master de Shannon, qu'on appellera « la plus importante du siècle », tient en une idée : les circuits électriques *sont* l'algèbre de Boole. Ce devoir refait le chemin : l'algèbre, la machine, et pour finir, une partie qu'on gagne à tous les coups.

Notations et outils. L'écriture binaire utilise les seuls chiffres 0 et 1 : ainsi 101 désigne $1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 5$ (on souligne les écritures binaires pour les distinguer des décimales).

R1 – ÉCRITURE BINAIRE

Tout entier $n \geq 1$ possède une écriture binaire, et une seule. (*Existence démontrée en Q2 ; unicité admise.*)

△ Q1. Écrire 13 et 27 en binaire, puis poser et effectuer l'addition binaire de ces deux écritures, $\underline{1101} + \underline{11011}$ (mêmes règles qu'en base dix : on retient dès que l'on atteint deux). Vérifier le résultat en décimal.

▲ Q2. Démontrer par récurrence forte (le principe R2 du DM 1, rappelé : l'hérédité peut s'appuyer sur tous les rangs précédents) que tout entier $n \geq 1$ admet une écriture binaire. (Distinguer $n + 1$ pair ou impair, et appliquer l'hypothèse à $\frac{n+1}{2}$ ou à $\frac{n}{2}$.)

PARTIE I

s'appuie sur les préliminaires

L'algèbre des 0 et 1

Boole calcule sur deux valeurs : 0 (faux) et 1 (vrai). Trois opérations suffisent, définies par leurs tables, c'est-à-dire par la liste exhaustive de leurs valeurs :

DÉFINITION – LES TROIS OPÉRATIONS DE BOOLE

Pour x et y dans $\{0; 1\}$:

x	y	$x \wedge y$ (ET)	$x \vee y$ (OU)	x	$\bar{x}$ (NON)
0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1		
1	1	1	1		

Ce sont exactement les connecteurs *et*, *ou*, *non* du cours (§ 3), devenus des opérations.

△ Q3. Dresser la table complète (quatre lignes) de l'expression $(x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$. En une phrase : que fait cette opération ? (Retenir cette table : elle revient dans toute la suite.)

Q4. Les lois étranges.

- △ Démontrer par une table : $x \vee x = x$ (l'idempotence, qui ferait s'évanouir un professeur d'arithmétique).
- ▲ Démontrer par une table l'absorption : $x \vee (x \wedge y) = x$.
- ▲ Démontrer par une table (huit lignes) la distributivité interdite aux nombres : $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
- ▲ Question méta : en quoi une table de vérité est-elle une *démonstration* ? De quel raisonnement du cours (§ 4) est-elle un cas particulier ?

▲ Q5. **De Morgan, preuves mécaniques.** Démontrer par tables les deux lois de De Morgan :

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} \quad \text{et} \quad \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y},$$

puis les traduire dans le dictionnaire des ensembles du cours (§ 5) : que dit la première loi du complémentaire d'une intersection ?

Le OU exclusif et l'addition

DÉFINITION – LE OU EXCLUSIF

On note $x \oplus y$ l'opération de la question Q3 : $x \oplus y = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$. Elle vaut 1 exactement quand x et y diffèrent.

Q6. Les vertus du OU exclusif.

- a) $\triangle$ Vérifier par tables : $x \oplus x = 0$ et $x \oplus 0 = x$.
- b) $\blacktriangle$ Démontrer par une table à huit lignes que $\oplus$ est associatif : $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$. (ce résultat peut être admis pour la suite) (On admet de même qu'il est commutatif; on écrira donc $x \oplus y \oplus z$ sans parenthèses.)

$\blacktriangle$ Q7. Le demi-additionneur. Soient x et y deux chiffres binaires. Vérifier, sur les quatre cas possibles, que la somme arithmétique $x + y$ s'écrit toujours :

$$x + y = 2 \times (x \wedge y) + (x \oplus y).$$

Autrement dit : dans une addition binaire posée, le chiffre à écrire est $x \oplus y$ et la retenue est $x \wedge y$. Relire l'addition de la question Q1 à cette lumière.

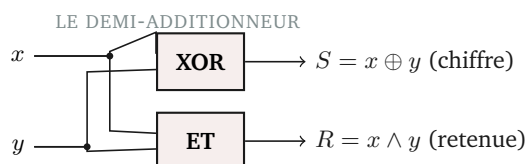
$\blacktriangle$ Q8. L'additionneur complet. Au cœur d'une colonne d'addition, trois chiffres arrivent : x , y et la retenue entrante c . On pose :

$$S = x \oplus y \oplus c \quad \text{et} \quad R = (x \wedge y) \vee ((x \oplus y) \wedge c).$$

Dresser la table à huit lignes de S et R , et vérifier sur chaque ligne que $x + y + c = 2R + S$: la colonne d'addition est entièrement calculée par les opérations de Boole.

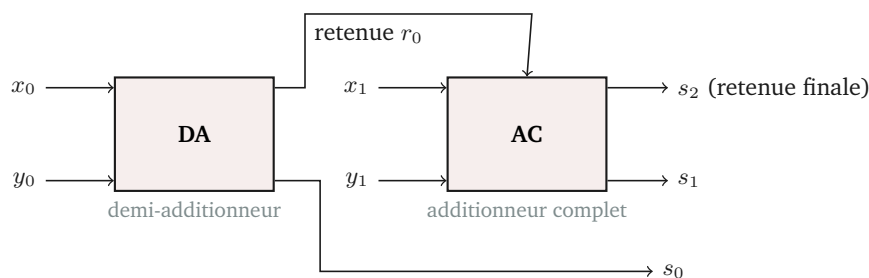
Construire la machine

Chaque opération de Boole se câble : une porte reçoit des 0 et des 1, et en sort un. En assemblant des portes, on assemble des calculs, comme Shannon l'a vu dans ses relais.



$\blacktriangle$ Q9. Suivre les fils : pour chacune des quatre entrées $(x; y)$, donner la valeur qui circule sur chaque fil de sortie du demi-additionneur. Présenter le résultat en table, et vérifier la cohérence avec la question Q7.

Q10. L'additionneur à deux chiffres. On additionne deux nombres de deux chiffres binaires, x_1x_0 et y_1y_0 : un demi-additionneur traite la colonne des unités, un additionneur complet (question Q8) traite la colonne suivante, et sa retenue sortante devient le troisième chiffre du résultat.



- ▲ Faire calculer $10 + 11$ à la machine : donner la valeur portée par chacun des fils (s_0, r_0, s_1, s_2), et vérifier le résultat en décimal.
- ▲ Estimation : avec un demi-additionneur (2 portes) pour la première colonne et un additionneur complet (5 portes) par colonne suivante, donner un ordre de grandeur du nombre de portes nécessaires pour additionner deux nombres de 64 chiffres binaires, comme le fait votre téléphone à chaque instant.

LA THÈSE LA PLUS IMPORTANTE DU SIÈCLE

Dans sa thèse de 1937, Shannon observe que deux interrupteurs en *série* réalisent un ET (le courant passe si les deux sont fermés) et deux interrupteurs en *parallèle* un OU. Toute l'algèbre de Boole devient du câblage, et réciproquement : simplifier une formule, c'est économiser des relais. Le 0-ou-1 élémentaire gagnera un nom une décennie plus tard : le *bit*, contraction de *binary digit* (le chiffre binaire), proposée par le statisticien John Tukey et rendue célèbre par Shannon lui-même dans son article fondateur de 1948, où il en crédite loyalement l'inventeur. Le psychologue Howard Gardner qualifiera ce mémoire de master de « plus important, et aussi plus célèbre, du siècle ».

PARTIE IV

s'appuie sur la partie II et sur R2 du DM 1

Le sommet : gagner à tous les coups

Dernier mouvement : l'algèbre de Boole gagne une partie réelle. Au jeu de Nim, des allumettes sont réparties en tas ; chacun son tour, un joueur retire autant d'allumettes qu'il veut, mais dans un seul tas ; celui qui prend la dernière allumette gagne. En 1901, Charles Bouton publie dans les *Annals of Mathematics* la première théorie complète d'un jeu : une formule dit qui gagne, et comment.



La position $(3; 5; 7)$: à vous de jouer. Mais faut-il vouloir jouer ?

△ **Q11. Les petits cas.** Pour chacune des positions (1) , $(1; 1)$, $(1; 2)$ et $(2; 2)$, déterminer en raisonnant sur tous les coups possibles si le joueur *au trait* (celui qui doit jouer) peut forcer la victoire.

DÉFINITION – NIM-SOMME

La *nim-somme* d'une position $(t_1; \dots; t_k)$ est le nombre obtenu en appliquant $\oplus$ **colonne par colonne** aux écritures binaires des tailles des tas. Exemple : $3 \oplus 5 = \underline{011} \oplus \underline{101} = \underline{110} = 6$ (chaque colonne binaire est traitée par le $\oplus$ de la partie II).

▲ **Q12.** Calculer la nim-somme des positions de la question Q11, puis celle de $(1; 3; 5; 7)$ et celle de $(3; 5; 7)$. Conjecturer un lien entre la nim-somme et le sort du joueur au trait.

♦ **Q13. Le théorème de Bouton (1901).** On veut démontrer : *le joueur au trait perd si la nim-somme est nulle, et gagne sinon* (face à des joueurs parfaits). On note s la nim-somme de la position.

- a) *De somme nulle, on sort toujours.* On suppose $s = 0$. Montrer que tout coup légal (remplacer un tas t_i par $t'_i < t_i$) conduit à une position de nim-somme $t_i \oplus t'_i \neq 0$. (Utiliser $x \oplus x = 0$ et les vertus de la question Q6.)
- b) *Vers la somme nulle, on peut toujours rentrer.* On suppose $s \neq 0$, et l'on note 2^k la plus grande puissance de 2 de l'écriture binaire de s . Justifier qu'il existe un tas t_i dont l'écriture binaire contient 2^k ; montrer qu'alors $t'_i = t_i \oplus s$ vérifie $t'_i < t_i$, et que remplacer t_i par t'_i rend la nim-somme nulle.
- c) *La récurrence forte conclut.* Démontrer le théorème par récurrence forte sur le nombre total d'allumettes, en traitant la position vide, puis les deux cas $s = 0$ et $s \neq 0$ à l'aide de a) et b).

Q14. En situation.

- a) $\triangle$ La position $(1 ; 4 ; 5)$ vous est offerte, à vous de jouer. Faut-il s'en réjouir ?
- b) $\blacklozenge$ Depuis $(3 ; 5 ; 7)$, donner un coup gagnant explicite, et vérifier que la position atteinte a bien une nim-somme nulle.

LE JEU QUI FIT DU CINÉMA

En 1961, *L'Année dernière à Marienbad* d'Alain Resnais mit ce jeu à l'écran, dans sa variante $(1 ; 3 ; 5 ; 7)$, et la France entière y joua le temps d'une saison. Vous, désormais, savez pourquoi le personnage qui propose la partie ne la perd jamais.

Boole est mort en 1864 sans imaginer une seule application de ses lois. Leibniz, qui rêvait dès 1703 d'une arithmétique binaire, n'en avait trouvée aucune non plus ; et les poètes de Pingala comptaient déjà en brèves et longues, sans le savoir, vingt siècles plus tôt (DM 1). Il aura suffi d'un étudiant de vingt et un ans, en 1937, pour que la pensée calculée devienne machine : chaque addition de votre téléphone traverse les portes que vous venez de câbler.

ANNEXE • COUPS DE POUCE

À consulter librement : un coup de pouce n'est pas une solution, et y recourir n'enlève rien à la valeur du travail.

Q2. Si $n + 1 = 2m$, une écriture de m suivie d'un 0 écrit $n + 1$; si $n + 1 = 2m + 1$, une écriture de m suivie d'un 1. Vérifier $m \leq n$ pour appliquer l'hypothèse forte.

Q3. Quatre lignes suffisent : l'expression vaut 1 sur deux d'entre elles. Son nom arrive dans la partie II.

Q4d. Une table énumère TOUS les cas possibles : c'est une disjonction des cas exhaustive, chaque ligne étant une vérification directe.

Q6b. Les huit lignes $(x; y; z)$; on peut accélérer en remarquant que chaque membre vaut 1 exactement quand le nombre de 1 parmi x, y, z est impair.

Q8. Pour chaque ligne, calculer $x + y + c$ en arithmétique (de 0 à 3), puis vérifier que $2R + S$ donne le même nombre.

Q10b. Une colonne pour les unités, soixante-trois colonnes complètes ensuite.

Q11. Pour $(2; 2)$: montrer que tout coup du joueur au trait laisse à l'adversaire une position déjà étudiée, et gagnante pour lui.

Q13a. La nouvelle nim-somme est $s \oplus t_i \oplus t'_i$ (on retire la contribution de l'ancien tas, on ajoute celle du nouveau). Si elle était nulle, on aurait $t'_i = t_i$.

Q13b. Au-dessus de la position 2^k , t_i et $t_i \oplus s$ coïncident ; en position 2^k , on passe de 1 à 0 : c'est une diminution stricte. Pour la nouvelle somme, calculer $s \oplus t_i \oplus (t_i \oplus s)$.

Q13c. Position vide : le joueur au trait ne peut pas jouer et a donc perdu, et la nim-somme est nulle. Ensuite, chaque coup fait strictement décroître le total d'allumettes : l'hypothèse forte s'applique à toutes les positions atteignables.

Q14b. La nim-somme de $(3; 5; 7)$ vaut 1 : appliquer la recette de Q13.b (il y a d'ailleurs trois coups gagnants, un par tas).

ANNEXE • LE LABORATOIRE PYTHON

Python parle Boole nativement : `&` est le ET colonne par colonne, `|` le OU, `^` le OU exclusif, et `bin` affiche le binaire.

```

1 print(bin(13), bin(27))           # 0b1101 0b11011
2 print(13 & 27, 13 | 27, 13 ^ 27)
3
4 def addition(x, y):
5     """Additionner sans jamais écrire + : XOR et retenues decalees."""
6     while y != 0:
7         x, y = x ^ y, (x & y) << 1
8     return x
9
10 def nim_somme(tas):
11     s = 0
12     for t in tas:
13         s = s ^ t
14     return s
15
16 def coup_gagnant(tas):
17     """L'adversaire imbattable de Bouton, en huit lignes."""
18     s = nim_somme(tas)

```

```
19     if s == 0:
20         return None          # position perdante : subir, et attendre
21     for i, t in enumerate(tas):
22         if t ^ s < t:
23             return i, t ^ s  # reduire le tas i a t XOR s
24
25 print(coup_gagnant([3, 5, 7]))
```

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

La démonstration de Shannon racontée, le Nim à jouer contre la machine et la simplification des circuits vous attendent sur le compagnon numérique.