



DM 3 · A1. LE CINQUIÈME PROBLÈME DE MONSIEUR HUYGENS

Pourquoi le joueur le plus patient finit toujours ruiné

LE PLAN DE L'ÉDIFICE

PARTIE	NIVEAUX	S'APPUIE SUR
0. Prologue et préliminaires	△	
I. Le jeu équitable	△▲	R1 à R4
II. Le jeu biaisé	△▲	la partie I
III. Retrouver le nombre de 1657	△▲◆	la partie II
IV. Combien de temps ?	▲◆	les parties I et II
V. Une espérance infinie	▲◆	indépendante
Annexes : coups de pouce et laboratoire	▲	les parties I à IV

Facultatif, et pour longtemps. Tout travail sincère, même partiel, est valorisé ; un travail bâclé ne l'est jamais. Ce document peut vous accompagner plusieurs années : certaines questions vous attendront en prépa ou à l'université. Horizon raisonnable : 3 à 4 semaines. Et si vous bloquez, écrivez : dire où l'on bloque et pourquoi est déjà du travail mathématique, souvent le plus formateur. Vérifiez toujours les hypothèses d'un résultat avant de l'utiliser.

△ fondations : accessible avec le cours · ▲ construction : recul et autonomie · ◆ sommet : défis, ou invitations pour plus tard

PROLOGUE

1657 : cinq problèmes, sans les solutions

EN 1654, Blaise Pascal et Pierre de Fermat échangent une série de lettres sur un problème que leur a soumis un joueur : comment partager équitablement les mises quand une partie doit être interrompue avant son terme ? Cette correspondance est l'acte de naissance du calcul des probabilités. Deux ans plus tard, dans une lettre de 1656, Pascal mentionne une question nouvelle, d'apparence plus modeste : deux joueurs d'égale fortune jouent jusqu'à ce que l'un des deux soit ruiné. Que peut-on en dire ?

Ce n'est pourtant ni Pascal ni Fermat qui publient. C'est un jeune Hollandais, Christiaan Huygens, qui fait paraître en 1657, chez Elzevier à Leyde, un traité de quinze pages, *De ratiociniis in ludo aleae*, le premier ouvrage imprimé sur les probabilités. Et Huygens le clôt d'une façon qui a de quoi désarçonner : par cinq problèmes proposés au lecteur, **sans leurs solutions**.

Le cinquième est celui de la ruine du joueur. Huygens ne donne pas de formule. Il donne un nombre, et ce nombre est le point de départ de ce voyage : les chances du joueur désavantagé sont à celles de l'autre comme

$$244\,140\,625 \quad \text{est à} \quad 282\,429\,536\,481.$$

Il faudra attendre Abraham de Moivre, vers 1712, pour qu'une formule générale soit établie. Cinquante-cinq ans. Vous, vous allez la construire en deux parties, et vous n'aurez besoin que d'une seule idée : celle qui consiste à regarder, non pas la suite qui vous intéresse, mais la suite de ses **différences**. Puis vous reviendrez sur ces deux entiers de 1657 et vous les retrouverez exactement.

Ce que vous découvrirez en chemin est plus dérangeant que la formule. À un jeu parfaitement équitable, sans le moindre tricheur, celui qui a la plus petite fortune est ruiné presque à coup sûr. Et le temps qu'il faut pour cela tend vers l'infini.

LEYDE, 1657

Le traité de Huygens ne parut pas seul : il fut publié en latin comme partie d'un ouvrage de son ancien professeur Frans van Schooten. Huygens l'avait d'abord rédigé en néerlandais, et c'est van Schooten qui le traduisit. Pendant un demi-siècle, ce fut le seul manuel de probabilités disponible en Europe.

△ **Q1. Trois jetons.** Alice et Bruno jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée. À chaque coup, le perdant donne un jeton au gagnant. Ils disposent de 3 jetons en tout, et la partie s'arrête quand l'un des deux les possède tous. On note r_k la probabilité qu'Alice soit ruinée lorsqu'elle part avec k jetons.

- Dessiner l'arbre des trois premiers coups pour $k = 1$. Combien de chemins mènent à la ruine d'Alice en exactement un coup ? En exactement trois coups ?
- En sommant les probabilités de tous les chemins menant à la ruine d'Alice, établir que $r_1 = \frac{2}{3}$. (Ces chemins sont en nombre illimité : on calculera donc la somme des n premiers termes, qui est géométrique, puis sa limite. Les résultats R2 et R4 des préliminaires, page suivante, donnent l'une et l'autre.)
- Par un argument de symétrie, en déduire r_2 .
- Reprendre a) avec 4 jetons en tout et $k = 1$, la notation r_k désignant désormais la probabilité de ruine d'Alice dans ce nouveau jeu. La méthode de b) vous paraît-elle encore praticable ? Pour obtenir tout de même r_1 , on admettra que la symétrie donne ici $r_2 = \frac{1}{2}$, et l'on appliquera la relation vérifiée par (r_k) dans le résultat R1 des préliminaires, page suivante, avec $p = \frac{1}{2}$.

PRÉLIMINAIRES

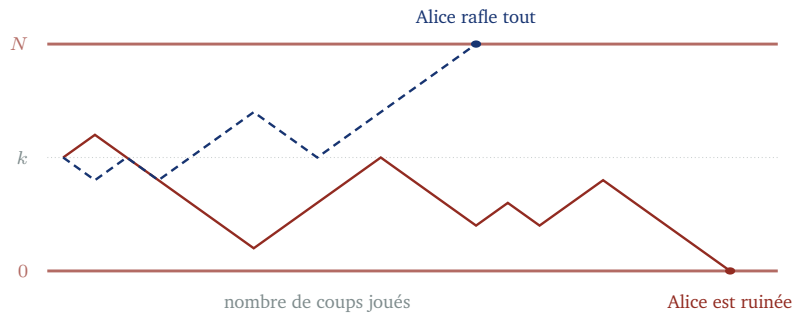
Le jeu, et ce que l'on admet

DÉFINITION – LA PARTIE

Deux joueurs, Alice et Bruno, disposent ensemble de N jetons, avec $N \geq 2$. À chaque coup, Alice gagne un jeton avec la probabilité p et en perd un avec la probabilité $q = 1 - p$, indépendamment des coups précédents, avec $0 < p < 1$. La partie s'arrête dès que l'un des deux joueurs possède les N jetons.

Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq N$, on note r_k la probabilité qu'Alice soit **ruinée** en partant de k jetons, et D_k le **nombre moyen de coups** de la partie.

La fortune d'Alice décrit ce que l'on appelle une *marche aléatoire* sur les entiers de 0 à N , avec deux barrières absorbantes : une fois en 0 ou en N , on n'en repart plus.



Les deux quantités r_k et D_k portent sur un nombre de coups qui n'est pas borné à l'avance : rien ne garantit *a priori* qu'elles aient un sens. On l'admet, ainsi que les relations qu'elles vérifient.

R1 – CONDITIONNEMENT AU PREMIER COUP, ADMIS

Pour tout p tel que $0 < p < 1$, la partie s'arrête avec la probabilité 1, les nombres r_k et D_k existent, r_k est la limite quand n tend vers $+\infty$ de la probabilité qu'Alice soit ruinée en au plus n coups, et

$$\forall k \in \llbracket 1; N-1 \rrbracket, \quad r_k = p r_{k+1} + q r_{k-1}, \quad D_k = 1 + p D_{k+1} + q D_{k-1},$$

avec les conditions aux bords $r_0 = 1$, $r_N = 0$, $D_0 = D_N = 0$.

R2 – SOMME GÉOMÉTRIQUE

$$\forall \rho \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^n \rho^i = \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho}.$$

R3 – SOMME TÉLESCOPIQUE

Pour toute suite réelle (u_k) et tous entiers m et n de $\mathbb{N}$ tels que $m \leq n$:

$$\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m.$$

R4 – LIMITE D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Soit $\rho \in \mathbb{R}$. Si $|\rho| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho^n = 0$; si $\rho > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho^n = +\infty$. (Cours A1, démontré par l'inégalité de Bernoulli.)

Une notation, et une seule. Dans tout le document,

$$\rho = \frac{q}{p} \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket, \quad d_k = r_{k+1} - r_k.$$

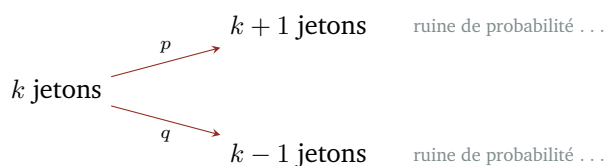
La suite (d_k) est celle des **différences** de (r_k) . C'est elle, et non (r_k) , qui est simple. Toute la partie I et toute la partie II consistent à s'en apercevoir.

Le jeu équitable

On commence par le cas le plus favorable qui soit : la pièce est équilibrée, personne ne triche, $p = q = \frac{1}{2}$. L'intuition dit que les deux joueurs sont à égalité. Elle a tort, et cette partie dit pourquoi.

△ **Q2. La relation de récurrence.** On suppose $1 \leq k \leq N - 1$.

- Reproduire et compléter l'arbre ci-dessous, qui décrit le *premier* coup de la partie lorsqu'Alice possède k jetons.
- En déduire, en une phrase, d'où vient la relation $r_k = p r_{k+1} + q r_{k-1}$ de R1.
- Expliquer pourquoi $r_0 = 1$ et $r_N = 0$.



△ **Q3. Les différences sont constantes.** On suppose dans toute cette question $p = \frac{1}{2}$.

- Démontrer que $\forall k \in \llbracket 1; N - 1 \rrbracket, d_k = d_{k-1}$.
- Quelle est la nature de la suite (d_k) ?

△ **Q4. La formule.** On suppose toujours $p = \frac{1}{2}$, et l'on note d la valeur commune des d_k .

- À l'aide de R3, démontrer que $\sum_{k=0}^{N-1} d_k = r_N - r_0$, et en déduire la valeur de d .
- En écrivant $r_k = r_0 + \sum_{i=0}^{k-1} d_i$, démontrer que

$$\forall k \in \llbracket 0; N \rrbracket, \quad r_k = 1 - \frac{k}{N}.$$

- Vérifier que cette formule redonne bien les valeurs de Q1.b) et Q1.c) avec $N = 3$, et celle de Q1.d) avec $N = 4$.

▲ **Q5. L'adversaire infiniment riche.** Alice possède k jetons, et l'on fait grandir la fortune de Bruno, c'est-à-dire N , en laissant k fixé.

- Déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} r_k$.
- Traduire ce résultat en une phrase, en français, sans symbole.
- Le jeu est pourtant parfaitement équitable. Comment concilier ce résultat avec le fait que, à chaque coup, Alice a exactement une chance sur deux de gagner ?

▲ **Q6. La ruine, ou la fortune.** Toujours avec $p = \frac{1}{2}$, on note g_k la probabilité qu'Alice possède finalement les N jetons.

- Justifier que $\forall k \in \llbracket 0; N \rrbracket, g_k = \frac{k}{N}$. (On pourra invoquer R1 et l'échange des rôles.)
- Vérifier que $\forall k \in \llbracket 0; N \rrbracket, r_k + g_k = 1$. Que signifie cette égalité, et quelle hypothèse de R1 rend-elle visible ?

Le jeu biaisé

Le cas équitable était le plus favorable, et il est déjà cruel. On passe au cas général, celui de tous les jeux d'argent réels, où $p \neq \frac{1}{2}$. La méthode ne change pas d'un pouce : on regarde les différences. Elles ne sont simplement plus constantes.

△ **Q7. Les différences sont géométriques.** On suppose désormais $p \neq \frac{1}{2}$.

- a) En écrivant $r_k = (p + q) r_k$ dans la relation de R1, démontrer que

$$\forall k \in \llbracket 1; N-1 \rrbracket, \quad p(r_{k+1} - r_k) = q(r_k - r_{k-1}).$$

- b) En déduire que $\forall k \in \llbracket 1; N-1 \rrbracket, d_k = \rho d_{k-1}$, puis la nature de la suite (d_k) .
c) Exprimer d_k en fonction de d_0 , de ρ et de k .

▲ **Q8. La formule close.**

- a) À l'aide de R2 et R3, démontrer que $d_0 \times \frac{1 - \rho^N}{1 - \rho} = -1$.
b) En déduire l'expression de d_0 , puis démontrer que

$$\forall k \in \llbracket 0; N \rrbracket, \quad r_k = \frac{\rho^N - \rho^k}{\rho^N - 1}$$

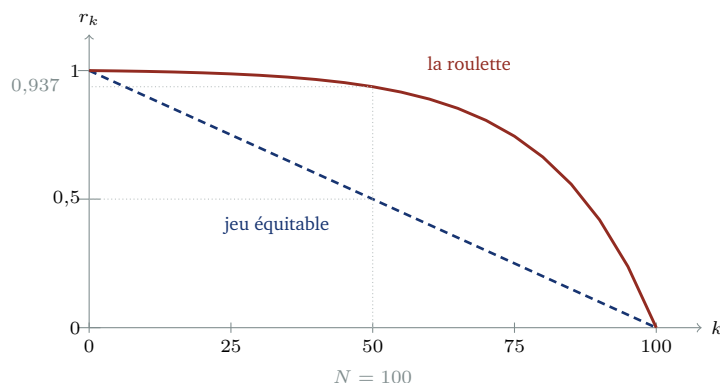
- c) Vérifier que cette expression donne bien $r_0 = 1$ et $r_N = 0$.

▲ **Q9. Les trois régimes.** On fait maintenant tendre N vers $+\infty$, à k fixé.

- a) On suppose $p < \frac{1}{2}$. Déterminer le signe de $\rho - 1$, puis $\lim_{N \rightarrow +\infty} r_k$. (Factoriser numérateur et dénominateur par ρ^N .)
b) On suppose $p > \frac{1}{2}$. Déterminer de même $\lim_{N \rightarrow +\infty} r_k$.
c) Rassembler ces deux résultats et celui de Q5.a) dans un tableau à trois lignes. Dans lequel des trois cas Alice a-t-elle une chance strictement positive de ne jamais être ruinée ?

△ **Q10. La roulette.** À la roulette européenne, une mise sur *rouge* est gagnante dans 18 cas sur 37 : le zéro n'est ni rouge ni noir, et c'est là toute la marge du casino. On prend donc $p = \frac{18}{37}$, d'où $\rho = \frac{19}{18}$.

- a) Alice et Bruno ont chacun 10 jetons. Calculer r_{10} avec $N = 20$, au millième.
b) Reprendre avec 100 jetons chacun, puis 1000 jetons chacun.
c) Comparer ces trois valeurs à celles que donnerait un jeu équitable. Commenter en deux phrases.



▲ Q11. Un avantage d'un trente-septième.

- Sur le graphique de la question Q10, les deux joueurs ont la même fortune lorsque celle d'Alice vaut $k = 50$. Lire sur les deux courbes les valeurs correspondantes de r_{50} , et commenter l'écart.
- Écrire une fonction Python `seuil(p)` renvoyant la plus petite fortune commune a (les deux joueurs ayant a jetons, donc $N = 2a$ et $k = a$) pour laquelle la probabilité de ruine dépasse 0,99. L'exécuter pour $p = \frac{18}{37}$.
- Le casino ne prend aucun risque et ne triche pas. Dire, en trois lignes, où se trouve exactement son avantage.

PARTIE III

s'appuie sur la partie II

Retrouver le nombre de 1657

Vous possédez maintenant la formule que de Moivre a mis cinquante-cinq ans à établir. Il est temps de revenir au cinquième problème, et de vérifier votre travail contre celui d'un homme qui écrivait en 1657.

DÉFINITION – LE CINQUIÈME PROBLÈME DE HUYGENS

Alice et Bruno possèdent chacun 12 jetons. On lance trois dés équilibrés. Si la somme obtenue vaut 11, Bruno donne un jeton à Alice ; si elle vaut 14, Alice donne un jeton à Bruno ; dans tous les autres cas, on relance sans rien changer. Le premier qui possède les 24 jetons a gagné.

△ Q12. Compter les faces. On lance trois dés équilibrés, ce qui donne $6^3 = 216$ issues équiprobables.

- Dénombrer les issues dont la somme vaut 11.
- Dénombrer celles dont la somme vaut 14.
- Vérifier votre réponse à b) à l'aide d'un argument de symétrie. (À quelle autre somme le nombre d'issues donnant 14 est-il nécessairement égal ?)

▲ Q13. Le jeu caché. Les coups où l'on relance ne changent rien à la fortune des joueurs.

- Justifier que l'on peut ignorer ces coups, et que la probabilité qu'Alice gagne un jeton à un coup décisif vaut $p = \frac{27}{42} = \frac{9}{14}$.
- En déduire q , puis ρ sous forme de fraction irréductible.
- Identifier N et k pour ce problème.

▲ Q14. Le rapport des chances. On pose $s = \rho^{12}$.

- À l'aide de Q8.b), démontrer que $r_{12} = \frac{s}{1+s}$.
- En déduire que la probabilité qu'Alice gagne vaut $\frac{1}{1+s}$.
- Démontrer que

$$\frac{\text{probabilité qu'Alice gagne}}{\text{probabilité qu'Alice perde}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{12}.$$

▲ Q15. Le nombre de Huygens.

- Calculer 9^{12} et 5^{12} . (Une calculatrice suffit, mais on pourra remarquer que $9^{12} = 3^{24}$ et que 5^{12} se calcule par élévations au carré successives.)

- b) Confronter le rapport obtenu en Q14.c) aux deux entiers que Huygens publie en 1657, rappelés dans le prologue. Conclure.
- c) Calculer la probabilité qu'Alice gagne, au dix-millième. Ce jeu vous paraît-il équilibré ?

♦ **Q16. Ce que Huygens pouvait faire.** Huygens ne disposait ni de la formule de Q8.b), ni d'aucune notation pour une suite.

- a) Le rapport de Q14.c) ne dépend que de p , q et du nombre de jetons de chaque joueur, et il ne fait intervenir aucune soustraction ni aucune somme géométrique. Quelle propriété du cas « fortunes égales » rend ce rapport aussi simple ?
- b) Proposer un raisonnement, sans formule close, qui aurait pu conduire Huygens à ce rapport. (*On pourra associer à toute partie gagnée par Alice une partie perdue par elle, et comparer les probabilités des deux.*)
- c) Pourquoi, selon vous, Huygens a-t-il publié ses cinq problèmes sans leurs solutions ?

PARTIE IV

s'appuie sur les parties I et II

Combien de temps ?

Une question reste entière. La partie I a établi que, face à un adversaire infiniment riche, la ruine est certaine. Certaine, soit. Mais au bout de combien de coups ? Cette partie répond, et la réponse est le sommet du voyage.

▲ **Q17. La récurrence de la durée.** On revient au cas équitable, $p = \frac{1}{2}$.

- a) En reprenant l'arbre de Q2.a), expliquer d'où vient le terme constant 1 dans la relation $D_k = 1 + p D_{k+1} + q D_{k-1}$ de R1.
- b) Expliquer pourquoi $D_0 = D_N = 0$.
- c) En quoi cette relation diffère-t-elle de celle vérifiée par (r_k) , et pourquoi la méthode des différences ne donne-t-elle plus directement une suite géométrique ?

♦ **Q18. Une formule offerte.** On admet, et l'on va vérifier, que dans le cas équitable la durée moyenne vaut

$$\forall k \in \llbracket 0 ; N \rrbracket, \quad D_k = k(N - k).$$

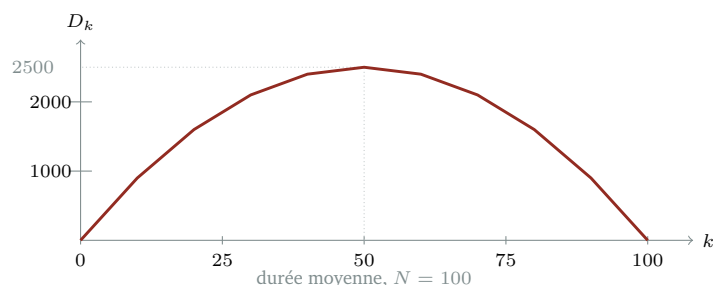
- a) Vérifier que cette expression satisfait les conditions aux bords.
- b) Vérifier par substitution qu'elle satisfait la relation vérifiée par (D_k) dans R1, prise avec $p = \frac{1}{2}$. (*Développer $\frac{1}{2}(k+1)(N-k-1) + \frac{1}{2}(k-1)(N-k+1)$ et comparer à $k(N-k) - 1$.*)

♦ **Q19. Et c'est la seule.** Vérifier qu'une formule convient ne prouve pas qu'elle soit la bonne : il faut savoir qu'il n'y en a pas d'autre. Soient (u_k) et (v_k) deux suites vérifiant toutes deux la relation vérifiée par (D_k) dans R1, prise avec $p = \frac{1}{2}$, et les mêmes conditions aux bords. On pose $\forall k \in \llbracket 0 ; N \rrbracket, e_k = u_k - v_k$.

- a) Démontrer que $\forall k \in \llbracket 1 ; N-1 \rrbracket, e_k = \frac{1}{2}e_{k+1} + \frac{1}{2}e_{k-1}$, et que $e_0 = e_N = 0$.
- b) En reprenant Q3.a), démontrer que la suite des différences de (e_k) est constante, puis que (e_k) est arithmétique.
- c) Conclure que $\forall k \in \llbracket 0 ; N \rrbracket, e_k = 0$, et donc que la formule de Q18 est la seule possible.

▲ Q20. Lire la parabole.

- a) Pour $N = 100$, calculer D_1 , D_{10} et D_{50} .
- b) Pour quelle valeur de k la partie dure-t-elle le plus longtemps en moyenne? Ce résultat vous surprend-il?
- c) Alice part avec 1 jeton contre 99. Elle sera ruinée avec la probabilité 0,99. Combien de coups la partie dure-t-elle en moyenne? Commenter.

◆ Q21. Le paradoxe. Alice part avec 1 seul jeton, et l'on fait grandir N .

- a) Recopier et compléter le tableau suivant, dans le cas équitable.

N	r_1	D_1
100	...	...
10 000	...	...
1 000 000	...	...

- b) Déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} r_1$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} D_1$.
- c) Énoncer en une phrase le fait que ces deux limites, prises ensemble, établissent.
- d) Ce fait vous paraît-il contradictoire? Rédiger une dizaine de lignes pour expliquer comment un événement peut être certain et n'arriver, en moyenne, qu'au bout d'un temps infini.

◆ Q22. Le cas biaisé. On admet que, lorsque $p \neq \frac{1}{2}$,

$$\forall k \in \llbracket 0; N \rrbracket, \quad D_k = \frac{k}{q-p} - \frac{N}{q-p} \times \frac{1-\rho^k}{1-\rho^N}.$$

On admet également le résultat suivant, qui sera démontré en classe de terminale sous le nom de *croissance comparée* :

$$\forall \rho > 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\rho^n} = 0.$$

- a) Vérifier que cette expression satisfait les conditions aux bords.
- b) On prend $p = \frac{18}{37}$. Déterminer, à k fixé, $\lim_{N \rightarrow +\infty} D_k$ en fonction de k . (Que vaut $q-p$? Et le second terme, dont le numérateur contient un facteur N ?) Que vaut cette limite pour $k=1$? Pour $k=100$?
- c) Comparer, pour $k=1$, à la réponse de Q21.b). En quoi le joueur qui affronte la roulette est-il, paradoxalement, mieux traité que celui qui joue à un jeu équitable?

Une espérance infinie

Cette dernière partie change de problème, mais pas de vertige. Elle traite d'un jeu proposé par Nicolas Bernoulli dans une lettre du 9 septembre 1713, et resté célèbre sous le nom de *paradoxe de Saint-Pétersbourg*, du nom de la ville où Daniel Bernoulli le publia vingt-cinq ans plus tard.

DÉFINITION – LE JEU DE SAINT-PÉTERSBOURG

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir PILE pour la première fois. Si le premier PILE apparaît au lancer numéro j , le joueur reçoit 2^j euros. Combien faut-il payer pour avoir le droit de jouer ?

Les lettres N et k de la partie précédente ne servent plus ici : cette partie compte des lancers, pas des jetons.

▲ **Q23. Le jeu tronqué.** On suppose d'abord que le casino arrête tout après n lancers : si aucun PILE n'est apparu, le joueur ne reçoit rien.

- Justifier que $\forall j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, la probabilité que le premier PILE apparaisse au lancer j vaut $(\frac{1}{2})^j$.
- Démontrer que le gain moyen E_n vaut exactement n euros.
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n$. Quel prix faudrait-il donc payer pour jouer au jeu non tronqué ?

◆ **Q24. La banque n'est pas infinie.** Aucun casino ne peut payer une somme illimitée. On suppose que la banque plafonne le gain à 2^M euros : si le premier PILE apparaît au lancer $j > M$, le joueur reçoit 2^M et non 2^j .

- Démontrer que le gain moyen s'écrit

$$E = \sum_{j=1}^M 2^j \left(\frac{1}{2}\right)^j + 2^M \sum_{j>M} \left(\frac{1}{2}\right)^j.$$

- Démontrer que la seconde somme vaut $(\frac{1}{2})^M$, donc que le second *terme* vaut exactement 1, et en déduire que $E = M + 1$.
- La banque dispose de 2^{40} euros, soit 1 099 511 627 776 euros, plus de mille milliards. Quel est le prix équitable du jeu ?
- Commenter : le paradoxe survit-il à cette remarque ?

◆ **Q25. Ce que vaut un gain.** En 1728, Gabriel Cramer propose une autre issue : ce n'est pas le gain qui compte, mais la satisfaction qu'il procure, et celle-ci croît moins vite que le gain. Il propose de remplacer le gain G par $\sqrt{G}$.

- Démontrer que la satisfaction moyenne s'écrit $\sum_{j \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^j$, puis qu'elle vaut $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.
- Démontrer que $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$, et en donner une valeur approchée au millièmes.
- Le prix équitable est alors la somme dont la racine carrée vaut ce nombre. Calculer sa valeur exacte, puis une valeur approchée au centime.
- On sait par ailleurs que le joueur a une chance sur deux de ne gagner que 2 euros, et moins d'une chance sur cinq cents de dépasser 1000 euros. Ces deux faits sont-ils cohérents avec le prix trouvé en c) ? Et avec celui de Q23.c) ?

BÂLE, GENÈVE, SAINT-PÉTERSBOURG

Le problème naît dans une lettre de Nicolas Bernoulli à Pierre Rémond de Montmort, le 9 septembre 1713. L'énoncé original n'utilise d'ailleurs pas une pièce, mais un dé que l'on lance jusqu'à obtenir un six : c'est Cramer qui, en 1728, le simplifie en pile ou face. Cramer propose alors deux solutions, dont celle de la racine carrée. Daniel Bernoulli publie la sienne en 1738 dans les mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg, et reconnaît lui-même l'antériorité de Cramer.

ANNEXE • COUPS DE POUCE

À consulter librement : un coup de pouce n'est pas une solution, et y recourir n'enlève rien à la valeur du travail.

Q1.b). Une ruine en un coup, en trois coups, en cinq coups... Les longueurs paires sont impossibles. Écrivez la probabilité de chaque famille de chemins, et summez.

Q3.a). Que devient la relation de R1 si vous y remplacez le r_k du membre de gauche par $\frac{1}{2}r_k + \frac{1}{2}r_k$, puis rassemblez les termes deux à deux ?

Q4.a). Appliquez R3 à la suite (r_k) elle-même, avec $m = 0$ et $n = N - 1$. Puis souvenez-vous que les N termes de la somme sont tous égaux à d .

Q5.c). Comparez ce qui est équitable à *chaque coup* et ce qui est équitable *sur toute la partie*. Les deux joueurs ont-ils la même marge d'erreur avant de toucher leur barrière ?

Q7.a). Remplacez le r_k du membre de gauche par $(p + q)r_k$, puis rassemblez les termes en p d'un côté et ceux en q de l'autre.

Q8.a). Reprenez le télescopage de Q4.a). Ce qui change, c'est la nature de la suite (d_k) : au lieu d'être constante, elle est maintenant géométrique, et c'est R2 qui en donne la somme.

Q9.a). Si $p < \frac{1}{2}$ alors $q > p$, donc $\rho > 1$. En factorisant par ρ^N au numérateur comme au dénominateur, il reste des puissances de $\frac{1}{\rho}$, dont la limite est connue par R4.

Q12.a). Il s'agit de compter les triplets ordonnés $(a; b; c)$ d'entiers de 1 à 6 dont la somme vaut 11. On pourra organiser le comptage selon la valeur du plus grand des trois.

Q12.c). Remplacer chaque dé par sa face opposée transforme une somme s en une somme $21 - s$. Que devient 14 ?

Q13.a). Ne regardez que les coups où quelque chose se passe. Sachant qu'un coup est décisif, quelle est la probabilité qu'il soit favorable à Alice ? Les coups sans effet ne changent ni les fortunes, ni l'ordre dans lequel les coups décisifs se succèdent.

Q14.a). Avec $N = 24$ et $k = 12$, tout s'exprime en fonction de s seul : $\rho^{24} = s^2$ et $\rho^{12} = s$. Numérateur et dénominateur admettent alors un facteur commun.

Q16.b). Les deux joueurs ayant la même fortune, la position 12 est le *milieu* de $\llbracket 0; 24 \rrbracket$. À toute partie gagnée par Alice, associez celle que l'on obtient en remplaçant chacun de ses gains par une perte et chacune de ses pertes par un gain : elle est perdue par Alice, et le procédé est réversible. Comparez alors les probabilités de ces deux parties, en comptant combien de gains et combien de pertes chacune comporte.

Q17.c). La relation sur (r_k) était *homogène* : tous ses termes sont des r . Celle sur (D_k) porte un 1 isolé, qui ne disparaît pas quand on prend les différences. C'est précisément pourquoi l'énoncé vous offre la formule en Q18 au lieu de vous la faire trouver.

Q19.b). La suite (e_k) vérifie exactement la relation étudiée en Q3.a). Ses différences sont donc constantes, ce qui fait d'elle une suite arithmétique. Une suite arithmétique nulle en 0 et en N est... .

Q21.d). Une moyenne peut être infinie alors que chaque partie, prise individuellement, se termine. Cherchez qui, dans ce calcul de moyenne, pèse le plus lourd : les parties courtes, très nombreuses, ou les parties très longues, très rares.

Q22.b). Ici $q - p = \frac{19}{37} - \frac{18}{37}$. Quant au second terme, prenez garde : il porte un facteur N au numérateur, et N tend

vers $+\infty$ lui aussi. C'est exactement la situation que règle le second résultat admis en tête de cette question, avec $\rho = \frac{19}{18} > 1$.

Q24.a). Séparez les issues en deux familles : celles où le premier PILE arrive au plus tard au lancer M , et celles où il arrive après. Dans la seconde, le gain ne dépend plus du rang du premier PILE : il vaut 2^M quel que soit ce rang.

Q24.b). La somme $\sum_{j>M} (\frac{1}{2})^j$ est la somme de tous les termes d'une suite géométrique à partir du rang $M + 1$. Calculez d'abord la somme des termes de rang $M + 1$ à $M + m$ avec R2, puis faites tendre m vers $+\infty$.

Q25.a). Le gain vaut 2^j avec la probabilité $(\frac{1}{2})^j$, donc sa racine vaut $2^{j/2}$. Et $2^{j/2} \times (\frac{1}{2})^j = (\frac{\sqrt{2}}{2})^j$.

ANNEXE • LE LABORATOIRE PYTHON

Les deux programmes ci-dessous n'utilisent que des boucles et des variables accumulatrices. Le premier calcule, le second simule, et l'intérêt est de les confronter.

Le calcul exact, pour la question Q11.b) :

```

1 def ruine(k, N, p):
2     rho = (1 - p)/p
3     return ...                # formule de Q8.b)
4
5 def seuil(p):
6     a = 1
7     while ruine(a, 2*a, p) <= 0.99:
8         a = ...
9     return a

```

La simulation, pour la question Q26. Elle ne connaît aucune formule : elle joue, et elle compte.

```

1 from random import random
2
3 def simule(k, N, p, parties):
4     ruines = 0
5     total_coups = 0
6     for i in range(parties):
7         fortune = k
8         coups = 0
9         while 0 < fortune < N:
10             if random() < p:
11                 fortune = fortune + 1
12             else:
13                 fortune = ...
14                 coups = coups + 1
15         if fortune == 0:
16             ruines = ruines + 1
17         total_coups = total_coups + coups
18     return ruines/parties, total_coups/parties

```

Confronter un calcul et une simulation est la façon la plus sûre de valider les deux. Si les deux tombent d'accord, il est très improbable qu'ils se trompent de la même manière. S'ils divergent, il faut chercher pourquoi, et la réponse n'est pas toujours que l'un des deux est faux : la question Q26.c) en donne un exemple.

▲ Q26. Le calcul contre la simulation.

- a) Compléter les deux programmes, puis exécuter `simule` avec $k = 10$, $N = 20$, $p = 18/37$ et 10 000 parties. Comparer la première valeur renvoyée à celle obtenue en Q10.a).
- b) Exécuter `simule` avec $k = 1$, $N = 100$, $p = 0,5$ et 10 000 parties. Comparer les deux valeurs renvoyées à r_1 et D_1 calculés en Q21.a).
- c) Reprendre b) avec $N = 10\,000$, toujours sur 10 000 parties. La première valeur reste fidèle ; la seconde, en revanche, change beaucoup d’une exécution à l’autre et s’écarte largement de D_1 . Le vérifier en lançant le programme cinq fois, puis proposer une explication. (*Le calcul de Q21.a) et le programme sont tous deux justes : c’est la moyenne empirique qui est en cause. Quelles parties pèsent le plus lourd dans cette moyenne, et sont-elles fréquentes ?*)

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Le texte des cinq problèmes de Huygens, les simulations prêtes à exécuter, le récit de la correspondance entre Nicolas Bernoulli et Montmort, et ce que devient la ruine du joueur quand on la relit avec des matrices, vous attendent sur le compagnon numérique.