



La rigueur et la clarté de vos raisonnements ainsi que le soin apporté à votre copie seront pris en compte dans la notation.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Bon courage !

Exercice 1: Questions à choix multiples – 5 points

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Réponses à compléter :

Question	1	2	3	4	5
Réponse					

Question 1. On a tracé une droite d passant par les points $(0; 4)$ et $(6; 0)$. Le coefficient directeur de d est :

A. $\frac{2}{3}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $-\frac{3}{2}$

D. $\frac{3}{2}$

Question 2. Le point $M(\sqrt{2}; 2\sqrt{2} - 1)$ appartient-il à la droite $d : y = 2x - 1$?

A. Oui

B. Non

C. On ne peut pas savoir

D. Seulement si $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Question 3. La droite $d : 3x - 6y + 12 = 0$ a pour équation réduite :

A. $y = 3x + 12$

B. $y = \frac{1}{2}x + 2$

C. $y = 2x - 4$

D. $y = -\frac{1}{2}x - 2$

Question 4. Deux droites non verticales ont pour coefficients directeurs $m_1 = 3$ et $m_2 = 3$. Ces droites sont :

A. Sécantes

B. Parallèles

C. Perpendiculaires

D. Confondues

Question 5. La droite passant par les points $A(1; 4)$ et $B(1; 7)$ a pour équation :

A. $y = 3x + 1$

B. $x = 1$

C. $y = 1$

D. N'existe pas

Correction :

Question	1	2	3	4	5
Réponse	B	A	B	B	B

Justifications :

1. **Question 1** : Le coefficient directeur d'une droite passant par deux points $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ est donné par :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Avec les points $(0; 4)$ et $(6; 0)$:

$$m = \frac{0 - 4}{6 - 0} = \frac{-4}{6} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

La réponse est **B**.

2. **Question 2** : Pour vérifier si le point $M(\sqrt{2}; 2\sqrt{2} - 1)$ appartient à la droite $d : y = 2x - 1$, on remplace x par $\sqrt{2}$ dans l'équation et on vérifie si l'on obtient $y = 2\sqrt{2} - 1$.

Calcul : $2 \times \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} - 1$.

C'est bien l'ordonnée de M , donc M appartient à la droite d .

La réponse est **A** (Oui).

3. **Question 3** : On isole y dans l'équation $3x - 6y + 12 = 0$:

$$3x - 6y + 12 = 0$$

$$-6y = -3x - 12$$

$$y = \frac{-3x - 12}{-6}$$

$$y = \frac{-3x}{-6} + \frac{-12}{-6}$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

La réponse est **B**.

4. **Question 4** : Deux droites non verticales ayant le même coefficient directeur sont parallèles (elles peuvent être confondues ou strictement parallèles).

Ici, $m_1 = m_2 = 3$, donc les droites sont parallèles.

Remarque : Sans connaître les ordonnées à l'origine, on ne peut pas savoir si elles sont confondues ou strictement parallèles. La réponse **B** (Parallèles) est la plus générale et correcte.

5. **Question 5** : Les points $A(1; 4)$ et $B(1; 7)$ ont la même abscisse ($x = 1$).

Cela signifie que la droite (AB) est verticale. Une droite verticale passant par des points d'abscisse 1 a pour équation $x = 1$.

La réponse est **B**.

Exercice 2: La droite d'Euler analytique – 8 points

Exercice 2: La droite d'Euler analytique – 8 points

Propriétés admises pour cet exercice :

- Deux droites non verticales sont **perpendiculaires** si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs vaut -1 : $m_1 \times m_2 = -1$.
- La **hauteur** d'un triangle issue d'un sommet est la droite passant par ce sommet et **perpendiculaire** au côté opposé.
- Le **centre de gravité** G d'un triangle ABC a pour coordonnées :

$$G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

On considère le triangle ABC avec $A(0;6)$, $B(-2;0)$ et $C(8;0)$.

Partie A – L'orthocentre

1. Calculer le coefficient directeur de la droite (BC) . (1 pt)
2. En déduire l'équation de la hauteur issue de A (perpendiculaire à (BC) passant par A). (1 pt)
3. Calculer le coefficient directeur de la droite (AC) . (1 pt)
4. Déterminer l'équation de la hauteur issue de B (perpendiculaire à (AC) passant par B). (1,5 pt)
5. En déduire les coordonnées de l'orthocentre H , intersection des deux hauteurs. (1 pt)

Partie B – Alignement remarquable

6. Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC . (1 pt)
7. Calculer le coefficient directeur de la droite (HG) . En déduire l'équation de cette droite. (1,5 pt)

Correction :

Partie A – L'orthocentre

1. Coefficient directeur de (BC) :

On utilise la formule du coefficient directeur avec $B(-2;0)$ et $C(8;0)$:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{0 - 0}{8 - (-2)} = \frac{0}{10} = \boxed{0}$$

La droite (BC) est donc horizontale (c'est l'axe des abscisses décalé, ici $y = 0$).

2. Équation de la hauteur issue de A :

La hauteur issue de A est perpendiculaire à (BC) .

Comme (BC) est horizontale (coefficient directeur nul), la perpendiculaire est une droite verticale.

Cette hauteur passe par $A(0; 6)$, donc son équation est :

$$\boxed{x = 0}$$

Remarque : C'est l'axe des ordonnées.

3. Coefficient directeur de (AC) :

Avec $A(0; 6)$ et $C(8; 0)$:

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{0 - 6}{8 - 0} = \frac{-6}{8} = \boxed{-\frac{3}{4}}$$

4. Équation de la hauteur issue de B :

Cette hauteur est perpendiculaire à (AC) et passe par $B(-2; 0)$.

Étape 1 : Coefficient directeur de la hauteur.

Si deux droites sont perpendiculaires, le produit de leurs coefficients directeurs vaut -1 .

Soit m le coefficient directeur de la hauteur. On a :

$$m \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -1$$

$$m = \frac{-1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Étape 2 : Équation de la hauteur.

La hauteur passe par $B(-2; 0)$ avec un coefficient directeur $m = \frac{4}{3}$.

On utilise l'équation $y - y_B = m(x - x_B)$:

$$y - 0 = \frac{4}{3}(x - (-2))$$

$$y = \frac{4}{3}(x + 2)$$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$$

L'équation de la hauteur issue de B est : $\boxed{y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}}$

5. Coordonnées de l'orthocentre H :

L'orthocentre H est l'intersection des deux hauteurs :

— Hauteur issue de A : $x = 0$

— Hauteur issue de B : $y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$

On substitue $x = 0$ dans la deuxième équation :

$$y = \frac{4}{3} \times 0 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

Ainsi : $\boxed{H\left(0; \frac{8}{3}\right)}$

Partie B – Alignement remarquable

6. **Coordonnées du centre de gravité G :**

On applique la formule donnée dans l'énoncé avec $A(0;6)$, $B(-2;0)$ et $C(8;0)$:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{0 + (-2) + 8}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{6 + 0 + 0}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Ainsi : $\boxed{G(2;2)}$

7. **Coefficient directeur et équation de (HG) :**

Étape 1 : Coefficient directeur.

Avec $H\left(0; \frac{8}{3}\right)$ et $G(2;2)$:

$$m_{HG} = \frac{y_G - y_H}{x_G - x_H} = \frac{2 - \frac{8}{3}}{2 - 0} = \frac{\frac{6}{3} - \frac{8}{3}}{2} = \frac{-\frac{2}{3}}{2} = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

Étape 2 : Équation de la droite.

La droite (HG) passe par $H\left(0; \frac{8}{3}\right)$ avec un coefficient directeur $m = -\frac{1}{3}$.

Comme H est sur l'axe des ordonnées, l'ordonnée à l'origine est $p = \frac{8}{3}$.

L'équation de (HG) est donc :

$$\boxed{y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}}$$

Remarque culturelle : Cette droite (HG) est appelée **droite d'Euler** du triangle. Elle passe aussi par le centre du cercle circonscrit (non demandé ici).

Exercice 3: Droite et paramètre – 7 points

Pour tout réel k , on considère la droite Δ_k d'équation :

$$kx + (1 - k^2)y - 2 = 0$$

1. Pour quelles valeurs de k la droite Δ_k est-elle **verticale** ? Donner alors son équation simplifiée. (1,5 pt)
2. Pour quelle valeur de k la droite Δ_k est-elle **horizontale** ? Donner alors son équation simplifiée. (1 pt)
3. Pour $k \neq 1$ et $k \neq -1$, écrire l'équation réduite de Δ_k sous la forme $y = mx + p$, où m et p sont exprimés en fonction de k . (2 pt)
4. Calculer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de Δ_2 . (1 pt)
5. Existe-t-il un point par lequel passent **toutes** les droites Δ_k ? Justifier. (1,5 pt)
Indication : réécrire l'équation comme un polynôme en k et chercher une solution valable pour tout k .

Correction :**1. Droite verticale :**

Une droite d'équation $ax + by + c = 0$ est verticale lorsque le coefficient de y est nul (et celui de x non nul).

Ici, le coefficient de y est $(1 - k^2)$. On résout :

$$1 - k^2 = 0 \iff k^2 = 1 \iff k = 1 \text{ ou } k = -1$$

Vérifions que le coefficient de x est non nul dans ces cas :

- Si $k = 1$: le coefficient de x est $1 \neq 0$. ✓
- Si $k = -1$: le coefficient de x est $-1 \neq 0$. ✓

Équations simplifiées :

- Pour $k = 1$: $1 \cdot x + 0 \cdot y - 2 = 0$, soit $x = 2$
- Pour $k = -1$: $(-1) \cdot x + 0 \cdot y - 2 = 0$, soit $-x - 2 = 0$, donc $x = -2$

2. Droite horizontale :

Une droite est horizontale lorsque le coefficient de x est nul (et celui de y non nul).

Ici, le coefficient de x est k . On a $k = 0$.

Vérifions que le coefficient de y est non nul : pour $k = 0$, on a $1 - k^2 = 1 \neq 0$. ✓

L'équation devient : $0 \cdot x + 1 \cdot y - 2 = 0$, soit $y = 2$

3. Équation réduite pour $k \neq 1$ et $k \neq -1$:

On part de $kx + (1 - k^2)y - 2 = 0$ et on isole y :

$$\begin{aligned}(1 - k^2)y &= -kx + 2 \\ y &= \frac{-kx + 2}{1 - k^2} \\ y &= \frac{-k}{1 - k^2} \cdot x + \frac{2}{1 - k^2}\end{aligned}$$

On peut simplifier en remarquant que $1 - k^2 = (1 - k)(1 + k)$:

$$\frac{-k}{1 - k^2} = \frac{-k}{(1 - k)(1 + k)} = \frac{k}{(k - 1)(1 + k)} = \frac{k}{k^2 - 1}$$

Ainsi :

$$\boxed{m = \frac{k}{k^2 - 1}} \quad \text{et} \quad \boxed{p = \frac{2}{1 - k^2}}$$

Autre écriture équivalente : $m = \frac{-k}{1 - k^2}$ et $p = \frac{2}{1 - k^2}$.

4. Coefficient directeur et ordonnée à l'origine de Δ_2 :

On applique les formules trouvées avec $k = 2$:

$$\begin{aligned}m &= \frac{2}{2^2 - 1} = \frac{2}{4 - 1} = \boxed{\frac{2}{3}} \\ p &= \frac{2}{1 - 2^2} = \frac{2}{1 - 4} = \frac{2}{-3} = \boxed{-\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

L'équation de Δ_2 est donc $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.

5. Existence d'un point commun à toutes les droites :

Suivons l'indication et réécrivons l'équation comme un polynôme en k .

On développe $(1 - k^2)y$:

$$\begin{aligned}kx + (1 - k^2)y - 2 &= 0 \\ kx + y - k^2y - 2 &= 0\end{aligned}$$

Regroupons par puissances de k :

$$-k^2y + kx + (y - 2) = 0$$

C'est un polynôme de degré 2 en k : $-yk^2 + xk + (y - 2) = 0$.

Pour qu'un point $(x; y)$ appartienne à **toutes** les droites Δ_k (pour tout $k \in \mathbb{R}$), cette équation doit être vérifiée pour tout k . Cela n'est possible que si tous les coefficients sont nuls :

$$\text{Coefficient de } k^2 : -y = 0 \implies y = 0$$

$$\text{Coefficient de } k : x = 0$$

$$\text{Terme constant : } y - 2 = 0 \implies y = 2$$

On obtient une contradiction : $y = 0$ et $y = 2$ simultanément, ce qui est impossible.

Conclusion : Il n'existe pas de point commun à toutes les droites Δ_k .

Remarque : Cela signifie que lorsque k varie, les droites Δ_k « balayent » le plan sans passer toutes par un même point.