La rigueur et la clarté de vos raisonnements ainsi que le soin apporté à votre copie seront pris en compte dans la notation.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Bon courage !

Exercice 1: Questions à choix multiples – 5 points

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Réponses à compléter :

Question	1	2	3	4	5
Réponse					

Question 1. On donne $A(2\,;5)$ et $B(-1\,;3)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

A. $\binom{3}{2}$ **B.** $\binom{-3}{-2}$ **C.** $\binom{-3}{2}$ **D.** $\binom{1}{8}$

Question 2. On donne $\vec{u}\binom{4}{-6}$ et $\vec{v}\binom{-2}{3}$. Ces deux vecteurs sont :

A. Égaux **B.** Colinéaires **C.** Opposés **D.** Ni l'un ni l'autre

Question 3. Le milieu du segment $[AB]$ avec $A(1\,;7)$ et $B(5\,;3)$ est :

A. $(3\,;5)$ **B.** $(6\,;10)$ **C.** $(2\,;2)$ **D.** $(4\,;-4)$

Question 4. On donne $\vec{u}\binom{1}{3}$ et $\vec{v}\binom{2}{-1}$. Les coordonnées de $2\vec{u}-\vec{v}$ sont :

A. $\binom{0}{7}$ **B.** $\binom{4}{5}$ **C.** $\binom{0}{5}$ **D.** $\binom{-1}{4}$

Question 5. On donne $A(1\,;2)$, $B(3\,;6)$ et $C(5\,;10)$. Ces trois points sont :

A. Les sommets d'un triangle **B.** Alignés **C.** Les sommets d'un parallélogramme **D.** On ne peut pas savoir

Correction :

Question	1	2	3	4	5
Réponse	**B**	**B**	**A**	**A**	**B**

Justifications :

1. **Question 1 :** Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par :
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$
Avec $A(2\,;5)$ et $B(-1\,;3)$:
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-2 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}}$$
La réponse est **B**.

2. **Question 2 :** On vérifie si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires en cherchant un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\,\overrightarrow{v}$.
Si $\overrightarrow{u} = k\,\overrightarrow{v}$, alors $4 = k \times (-2)$, soit $k = -2$.
Vérifions : $k \times 3 = -2 \times 3 = -6$, ce qui correspond bien à la deuxième coordonnée de $\overrightarrow{u}$.
Donc $\overrightarrow{u} = -2\,\overrightarrow{v}$: les vecteurs sont **colinéaires**.
Remarque : Ils ne sont pas opposés car il faudrait $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{v}$, soit $k = -1$. Or ici $k = -2$. Ils ne sont pas non plus égaux ($k \neq 1$).
La réponse est **B**.

3. **Question 3 :** Les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$ sont :
$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\frac{y_A + y_B}{2}\right)$$
Avec $A(1\,;7)$ et $B(5\,;3)$:
$$M\left(\frac{1+5}{2}\,;\frac{7+3}{2}\right) = \boxed{(3\,;5)}$$
La réponse est **A**.

4. **Question 4 :** On calcule $2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ coordonnée par coordonnée :
$$2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 6-(-1) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}}$$
La réponse est **A**.

5. **Question 5 :** Calculons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5-1 \\ 10-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$
Calculons le déterminant (critère de colinéarité) :
$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2 \times 8 - 4 \times 4 = 16 - 16 = 0$$

Le déterminant est nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : les points A, B et C sont **alignés**.
La réponse est **B**.

Exercice 2: Le parallélogramme – 9 points

On considère les points $A(1\,;3)$, $B(5\,;1)$ et $C(6\,;4)$.

Partie A – Construction d'un parallélogramme

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
3. Calculer les coordonnées des milieux des diagonales $[AD]$ et $[BC]$. Que constate-t-on ?

Partie B – Alignement et décomposition

4. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BE}$ où $E(9\,;-1)$.
5. Les points A, B et E sont-ils alignés ? Justifier par le critère de colinéarité.
6. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{BE} = k\,\overrightarrow{BA}$. Interpréter géométriquement.

Correction :

Partie A – Construction d'un parallélogramme

1. **Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:**
   Avec $A(1\,;3)$, $B(5\,;1)$ et $C(6\,;4)$:
   $$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-1\\1-3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6-1\\4-3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}}$$

2. **Coordonnées du point D :**
   On cherche $D(x_D\,;y_D)$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
   Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\binom{x_D-6}{y_D-4}$.
   L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donne :
   $$\begin{cases} x_D - 6 = 4 \\ y_D - 4 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_D = 10 \\ y_D = 2 \end{cases}$$
   Ainsi : $\boxed{D(10\,;2)}$

3. **Milieux des diagonales $[AD]$ et $[BC]$:**
   Milieu de $[AD]$: avec $A(1\,;3)$ et $D(10\,;2)$:
   $$M_1\left(\frac{1+10}{2}\,;\frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$$
   Milieu de $[BC]$: avec $B(5\,;1)$ et $C(6\,;4)$:
   $$M_2\left(\frac{5+6}{2}\,;\frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$$
   Constatation : Les deux diagonales $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu $\left(\frac{11}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$.

Cela confirme que $ABDC$ est bien un parallélogramme, car dans un parallélogramme les diagonales se coupent en leur milieu.

Partie B – Alignement et décomposition

4. **Coordonnées de $\overrightarrow{BE}$:**
   Avec $B(5\,;1)$ et $E(9\,;-1)$:
   $$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 9-5 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

5. **Alignement de A, B et E :**
   Calculons les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BE}$:
   $$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 1-5 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$
   Calculons le déterminant :
   $$\det(\overrightarrow{BA},\, \overrightarrow{BE}) = (-4)\times(-2) - 2\times 4 = 8-8 = 0$$
   Le déterminant est nul, donc $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires.
   Par conséquent, les points A, B et E sont **alignés**.

6. **Détermination du réel k :**
   On cherche k tel que $\overrightarrow{BE} = k\,\overrightarrow{BA}$.
   $$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
   La première coordonnée donne : $4 = -4k$, soit $k = -1$.
   Vérification : $(-1)\times 2 = -2$ ✓
   Ainsi : $\boxed{k = -1}$

   Interprétation géométrique : L'égalité $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BA}$ signifie que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$.
   D'après la question 5, les points A, B et E sont alignés. De plus, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$ signifie que B est situé exactement « à mi-chemin » entre A et E.
   Ainsi, B est le milieu du segment $[AE]$.
   Vérification : $\left(\dfrac{1+9}{2}\,;\dfrac{3+(-1)}{2}\right) = (5\,;1) = B$. ✓

Exercice 3: Vecteur directeur et droites – 6 points

On considère la droite d d'équation $2x - 3y + 6 = 0$ et le point $A(0\,;-1)$.

1. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite d.

2. La droite d' passe par le point $A(0\,;-1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\binom{3}{2}$. Les droites d et d' sont-elles parallèles ? Justifier.

3. Pour tout réel t, on considère le point $P_t\left(t\,;\dfrac{2t+6}{3}\right)$ appartenant à la droite d. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AP_t}$ en fonction de t.

4. Montrer que, quel que soit le réel t, les vecteurs $\overrightarrow{AP_t}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont jamais colinéaires. Que peut-on en déduire sur la position du point A par rapport à la droite d ?

   Indication : calculer $x_1y_2 - x_2y_1$ et montrer que ce nombre ne dépend pas de t.

Correction :

1. **Vecteur directeur de d :**
   Pour une droite d'équation $ax + by + c = 0$, un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\binom{-b}{a}$ (ou $\binom{b}{-a}$).
   Ici, $a = 2$, $b = -3$, donc :
   $$\boxed{\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}$$
   Vérification : on peut aussi remarquer que deux points de d sont, par exemple, $(0\,;2)$ et $(3\,;4)$ (en posant $x = 0$ puis $x = 3$). Le vecteur reliant ces deux points est bien $\binom{3}{2}$.

2. **Parallélisme de d et d' :**
   La droite d a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\binom{3}{2}$.
   La droite d' a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\binom{3}{2}$.
   On constate que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$: les deux vecteurs directeurs sont égaux, donc en particulier colinéaires.
   Deux droites ayant des vecteurs directeurs colinéaires sont parallèles.
   Vérifions que d et d' ne sont pas confondues : le point $A(0\,;-1)$ appartient-il à d ?
   $2 \times 0 - 3 \times (-1) + 6 = 0 + 3 + 6 = 9 \neq 0$.
   Donc $A \notin d$, et par conséquent d et d' sont **strictement parallèles**.

3. **Coordonnées de $\overrightarrow{AP_t}$:**
   Avec $A(0\,;-1)$ et $P_t\left(t\,;\dfrac{2t+6}{3}\right)$:
   $$\overrightarrow{AP_t}\begin{pmatrix}t-0\\ \dfrac{2t+6}{3}-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\ \dfrac{2t+6}{3}+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\ \dfrac{2t+6+3}{3}\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}t\\ \dfrac{2t+9}{3}\end{pmatrix}}$$

4. **Non-colinéarité de $\overrightarrow{AP_t}$ et $\overrightarrow{u}$:**

On calcule le déterminant de $\overrightarrow{AP_t}\binom{t}{\frac{2t+9}{3}}$ et $\overrightarrow{u}\binom{3}{2}$:

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AP_t},\ \overrightarrow{u}) &= t \times 2 - \frac{2t+9}{3} \times 3 \\ &= 2t - (2t+9) \\ &= 2t - 2t - 9 \\ &= -9\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel t :

$$\boxed{\det(\overrightarrow{AP_t},\ \overrightarrow{u}) = -9 \neq 0}$$

Le déterminant ne dépend pas de t et est toujours non nul. Les vecteurs $\overrightarrow{AP_t}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont donc **jamais colinéaires**.

Conclusion : Comme P_t est un point quelconque de la droite d et que $\overrightarrow{AP_t}$ n'est jamais colinéaire à $\overrightarrow{u}$ (vecteur directeur de d), cela signifie que le point A n'est jamais aligné avec deux points de d. Autrement dit, le point A **n'appartient pas** à la droite d.

Remarque : On retrouve le résultat de la question 2, où l'on avait vérifié que $A \notin d$.