



CORRIGÉ · A1. NOMBRES ET CALCUL

Corrigé des trente exercices de l'Atelier

Ce corrigé se lit **la feuille en main** : les énoncés n'y sont pas recopiés. Seize questions sont rédigées comme une copie idéale, à imiter jusqu'à la ponctuation ; les autres donnent la stratégie, le calcul et le résultat. Un résultat sans phrase de réponse n'est pas un résultat.

RÉDACTION MODÈLE : la copie idéale, à imiter · MÉTHODE : la stratégie en une ligne, puis le calcul · COMMENTAIRES : ce que la solution enseigne

I. CALCULER, SANS FAIRE DES GAMMES

EXERCICE 1 · APL-A1-01

★★ ■

Le facteur commun ne se montre pas

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 4, CELLE QUI PIÈGE

Quel que soit le réel x , on remarque que $1 - 3x = -(3x - 1)$. Le second terme s'écrit donc

$$(1 - 3x)(2x) = -(3x - 1)(2x).$$

L'expression devient alors, en mettant $3x - 1$ en facteur :

$$D = (3x - 1)(x + 4) - (3x - 1)(2x) = (3x - 1)[(x + 4) - 2x] = (3x - 1)(4 - x).$$

Vérifions en développant : $(3x - 1)(4 - x) = 12x - 3x^2 - 4 + x = -3x^2 + 13x - 4$, et l'expression de départ donne $(3x^2 + 11x - 4) + (2x - 6x^2) = -3x^2 + 13x - 4$. Les deux coïncident.

Donc $D = (3x - 1)(4 - x)$ pour tout réel x

MÉTHODE Pour les trois autres : facteur commun apparent en 1, différence de deux carrés en 2, carré parfait en 3.

1. $A = (2x - 1)[(2x - 1) - (x + 3)]$, donc $A = (2x - 1)(x - 4)$ pour tout réel x

2. $B = (x + 2)^2 - 3^2$, donc $B = (x - 1)(x + 5)$ pour tout réel x

3. $C = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 2 + 2^2$, donc $C = (5x + 2)^2$ pour tout réel x

COMMENTAIRES

La question 4 est la seule à cacher son facteur commun, et c'est elle qui compte vraiment. Elle teste un réflexe : devant deux parenthèses qui se ressemblent sans être égales, on cherche si l'une est l'**opposée** de l'autre. Le signe moins qu'on sort alors devant est l'erreur la plus fréquente de tout le chapitre, avant même les racines.

EXERCICE 2 · APL-A1-02

★★ ■

Deux chemins, une seule égalité

MÉTHODE Développer d'un côté ; de l'autre, reconnaître $a^2 - b^2$ avec $a = x + 3$ et $b = x - 3$.

1. $(x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) = 12x$.

2. $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = [(x + 3) - (x - 3)][(x + 3) + (x - 3)] = 6 \times 2x$.

$(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 12x$ pour tout réel x

3. La seconde. Avec $a = x + 3$ et $b = x - 3$ remplacés par $x + a$ et $x - a$, elle donne directement $[2a][2x] = 4ax$ sans le moindre développement, quel que soit le réel a .

EXERCICE 3 · APL-A1-03

★★★ ■

Sortir des racines

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 2, CELLE QUI DEMANDE DE LA MÉTHODE

Cherchons sous chaque racine un carré parfait : $63 = 9 \times 7$ et $28 = 4 \times 7$.

En séparant chaque racine de produit en produit de racines, ce qui est licite car tous ces nombres sont positifs :

$$\sqrt{63} = \sqrt{9} \sqrt{7} = 3\sqrt{7} \quad \text{et} \quad \sqrt{28} = \sqrt{4} \sqrt{7} = 2\sqrt{7}.$$

Les trois termes sont désormais semblables :

$$F = 2 \times 3\sqrt{7} - 3 \times 2\sqrt{7} + \sqrt{7} = 6\sqrt{7} - 6\sqrt{7} + \sqrt{7}.$$

Donc $F = \sqrt{7}$

MÉTHODE Même geste pour les trois autres : isoler le carré parfait, puis sortir.

1. $180 = 36 \times 5$, donc $E = 6\sqrt{5}$ 3. $\frac{8}{50} = \frac{4}{25}$, donc $G = \frac{2}{5}$ 4. $H = 9 \times 2 - 4 \times 3$, donc $H = 6$

COMMENTAIRES

En 3, simplifier la fraction **avant** d'entrer sous la racine évite tout calcul. En 4, le résultat est un entier : une expression bourrée de racines n'est pas forcément irrationnelle, ce que l'exercice 24 reprendra.

Des puissances avec une lettre

MÉTHODE Tout ramener à une seule base. Ici $9 = 3^2$, donc $9^n = 3^{2n}$.

- $3^{n+1} \times 3^{n-1} = 3^{2n}$ et $9^n = 3^{2n}$, donc le quotient vaut 1 pour tout entier relatif n
- $\frac{2^{n+3} - 2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n(2^3 - 2)}{2^n} = 8 - 2$, donc le quotient vaut 6 quel que soit n
- De là, $2^{n+3} - 2^{n+1} = 6 \times 2^n$, et 2^n est un entier pour tout entier naturel n . Donc

$$\boxed{2^{n+3} - 2^{n+1} \text{ est un multiple de 6 pour tout entier naturel } n}$$

La différence de deux carrés, et le calcul mental

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1, LA DÉMONSTRATION

Soient a et b deux réels quelconques. Développons les deux carrés :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{et} \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

En soustrayant membre à membre, les termes a^2 et b^2 disparaissent :

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab.$$

Donc $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$ quels que soient les réels a et b

MÉTHODE Lire l'égalité à l'envers : elle donne le produit à partir de la somme et de la différence.

- Ici $a + b = 50$ et $a - b = 2$, donc $4ab = 50^2 - 2^2 = 2496$ et $ab = 624$
 - 26 et 24 ont pour somme 50 et pour différence 2 : $26 \times 24 = 624$
 - Deux entiers également éloignés d'un même nombre c s'écrivent $c - d$ et $c + d$, et leur produit vaut $c^2 - d^2$. Pour 97×103 , on prend $c = 100$ et $d = 3$: $97 \times 103 = 10\,000 - 9 = 9\,991$
- Contrôle de cohérence* : la question 3 relève du même cas, avec $c = 25$ et $d = 1$, d'où $625 - 1 = 624$.

COMMENTAIRES

Le passage de la question 1 à la question 4 est le vrai contenu de l'exercice : une identité qu'on a démontrée devient un outil de calcul mental. C'est le même mouvement que l'on retrouvera en III, où une écriture avec une lettre devient un outil de preuve.

Des racines dans les racines

RÉDACTION MODÈLE – QUESTIONS 1 ET 2

Le développement. $(2 + \sqrt{3})^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$.

La déduction, et sa précaution. Le nombre $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ est, par définition, le nombre positif dont le carré vaut $7 + 4\sqrt{3}$. Or le cours a établi que deux réels positifs de même carré sont égaux : il y a donc exactement deux nombres dont le carré vaut $7 + 4\sqrt{3}$, à savoir $2 + \sqrt{3}$ et son opposé $-(2 + \sqrt{3})$. Le premier est positif, le second est négatif : c'est donc le premier.

Donc $\boxed{\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}}$

MÉTHODE Même précaution à chaque fois : on identifie un carré, puis on garde celle des deux racines qui est positive.

3. $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, et $1 + \sqrt{2}$ est positif. Donc $\boxed{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}}$

4. On cherche u et v positifs tels que $u^2 + v^2 = 9$ et $2uv = 4\sqrt{5}$. Alors $uv = 2\sqrt{5}$, donc $u^2v^2 = 20$: les nombres u^2 et v^2 ont pour somme 9 et pour produit 20, ce sont 4 et 5. On prend $u = 2$ et $v = \sqrt{5}$, et l'on vérifie $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

Mais $2 - \sqrt{5}$ est **négatif**, puisque $\sqrt{5} > 2$. La racine cherchée est donc son opposé : $\boxed{\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2}$

COMMENTAIRES

La question 4 est un piège, et il est volontaire. Après trois questions où la précaution sur le signe ne changeait rien, elle change tout. Une copie qui écrit $2 - \sqrt{5}$ a fait tout le travail mathématique et perd le point sur la dernière ligne : c'est exactement pour cela que la précaution est rédigée en toutes lettres dans la question 2.

II. LA QUANTITÉ CONJUGUÉE

L'astuce qui fait disparaître les racines

MÉTHODE Chaque produit est de la forme $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$, et élever une racine au carré la fait disparaître.

1. $(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2$, donc $\boxed{5 - 3 = 2}$

2. $2^2 - (\sqrt{7})^2$, donc $\boxed{4 - 7 = -3}$

3. $\boxed{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b}$ pour tous réels positifs a et b

4. Parce que la troisième identité remarquable ne laisse que des carrés, et que le carré d'une racine est le nombre de départ.

Chasser la racine du dénominateur

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 3, CELLE OÙ LE SIGNE SE RETOURNE

Multiplions le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, c'est-à-dire par $1 + \sqrt{3}$. Cela ne change pas la valeur du quotient, puisqu'on multiplie par un nombre égal à 1.

Au dénominateur : $(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2$.

Au numérateur : $(1 + \sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$.

Donc

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}.$$

Donc $\boxed{\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}}$

MÉTHODE Multiplier haut et bas par la conjuguée du dénominateur · sauf en 1, où le dénominateur est une racine seule : il suffit alors de multiplier par cette racine.

1. On multiplie haut et bas par $\sqrt{5}$, donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}}$

2. Conjuguée $3 + \sqrt{2}$, dénominateur 7, donc $\boxed{\frac{1}{3 - \sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{2}}{7}}$

4. Conjuguée $\sqrt{7} - \sqrt{5}$, dénominateur 2, donc $\boxed{\frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \sqrt{7} - \sqrt{5}}$

COMMENTAIRES

Le dénominateur -2 de la question 3 est le piège : il faut penser à distribuer le signe moins sur les **deux** termes du numérateur. La question 4 est la plus agréable : le dénominateur vaut 2 et se simplifie avec le numérateur, il ne reste rien.

Un résultat qui surprend

MÉTHODE Ni l'une ni l'autre de ces différences n'est calculable de tête ; leurs inverses, si.

1. L'intuition attendue est que $\sqrt{101} - \sqrt{100}$ soit le plus grand des deux, puisque les nombres en jeu le sont. Elle est fautive, et c'est tout l'objet des questions suivantes.

2. $\sqrt{2} - 1 = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}.$

3. De même, $\sqrt{101} - \sqrt{100} = \frac{1}{\sqrt{101} + 10}.$

4. Les deux quotients ont le même numérateur 1. Or $\sqrt{2} + 1$ vaut environ 2,4, tandis que $\sqrt{101} + 10$ dépasse 20. Le second quotient est donc bien plus petit : $\boxed{\sqrt{101} - \sqrt{100} < \sqrt{2} - 1}$

COMMENTAIRES

L'intuition dit souvent le contraire, parce que 101 et 100 sont « plus grands ». C'est justement l'inverse : plus on avance sur la droite, plus les racines successives se resserrent, et c'est ce que l'exercice 10 démontre.

EXERCICE 10 · SYN-A1-10

★★★★ ◆

L'écart entre deux racines consécutives

RÉDACTION MODÈLE – QUESTIONS 1 ET 2

L'égalité. Soit n un entier naturel non nul. Comme $n \geq 1$, la somme $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ est strictement positive : on peut donc l'utiliser comme dénominateur. Multiplions par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

L'encadrement. Ce quotient est strictement positif, comme quotient de deux nombres strictement positifs.

Par ailleurs la fonction racine carrée est croissante, donc $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ et $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n}$. En passant aux inverses, ce qui renverse l'inégalité entre nombres strictement positifs :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Donc $0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ pour tout entier $n \geq 1$

3. Pour $n = 10^6$, on obtient $\sqrt{n} = 1000$ et l'écart est donc inférieur à $\frac{1}{2000}$, soit 0,0005. En prenant n assez grand, on rend cet écart aussi petit que l'on veut.

4. Ils se **resserrent** : l'écart entre deux racines consécutives diminue sans cesse.

EXERCICE 11 · APR-A1-11

★★★★★ ☆

La somme qui s'effondre

RÉDACTION MODÈLE – L'EXERCICE ENTIER

Chaque terme est une différence. D'après l'exercice 10, pour tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$$

La somme se réécrit. En remplaçant chacun des 99 termes :

$$S = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}).$$

Tout s'annule, sauf les extrémités. Chaque racine apparaît deux fois, une fois précédée du signe +

et une fois du signe $-$, sauf $\sqrt{1}$ qui n'apparaît qu'en négatif et $\sqrt{100}$ qui n'apparaît qu'en positif. Il reste

$$S = \sqrt{100} - \sqrt{1} = 10 - 1.$$

Donc $S = 9$

La généralisation. Le même effacement se produit quel que soit le rang d'arrêt : la somme dont le dernier terme est $\frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$ vaut $\sqrt{n} - 1$ pour tout entier $n \geq 2$

COMMENTAIRES

On appelle cela une **somme télescopique** : les termes rentrent les uns dans les autres comme les tubes d'une longue-vue qu'on referme. Rien de tout cela n'est calculable terme à terme, et pourtant le résultat est un entier. C'est le plus bel effet de la quantité conjuguée, et c'est pour lui que la partie II existe.

III. ENTIERS, MULTIPLES, PARITÉ

EXERCICE 12 · APL-A1-12



Écrire avec une lettre

MÉTHODE Un seul geste : mettre en facteur le nombre annoncé, puis dire que le second facteur est un entier.

- $4n + 10 = 2(2n + 5)$ et $2n + 5$ est un entier, donc $4n + 10$ est un multiple de 2 pour tout entier n
- $15n - 25 = 5(3n - 5)$, donc $15n - 25$ est un multiple de 5 pour tout entier n
- $7n + 7 = 7(n + 1)$, donc $7n + 7$ est un multiple de 7 pour tout entier n

EXERCICE 13 · APL-A1-13



La table de la parité

MÉTHODE Écrire les entiers $2k$ et $2k' + 1$, puis lire la forme du résultat.

- Le tableau complété :

	somme	produit
pair et pair	paire	pair
pair et impair	impaire	pair
impair et impair	paire	impair

- Trois justifications, au choix. Somme de deux impairs : $(2k + 1) + (2k' + 1) = 2(k + k' + 1)$, qui est pair. Produit d'un pair par un impair : $2k(2k' + 1) = 2[k(2k' + 1)]$, qui est pair. Produit de deux impairs : $(2k + 1)(2k' + 1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(2kk' + k + k') + 1$, qui est impair.

- Les six réponses sont **certaines** : aucune ne dépend des nombres choisis, puisque chaque justification n'utilise que l'écriture $2k$ ou $2k' + 1$, valable pour n'importe quel entier.

4. La dernière : **impair** $\times$ **impair** = **impair**. Un carré d'impair est un produit de deux impairs égaux.

COMMENTAIRES

La question 4 relie cet exercice à la démonstration la plus importante du cours. Le carré d'un impair est impair non pas par miracle, mais comme cas particulier d'une règle de multiplication : le lemme de $\sqrt{2}$ tient dans une case de ce tableau.

EXERCICE 14 · APL-A1-14

★★★ ■

Des entiers qui se suivent

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 3, CELLE QUI DÉMONTRE UN « JAMAIS »

Soient quatre entiers consécutifs. En appelant n le premier, leur somme s'écrit

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6.$$

Or $4n + 6 = 4(n + 1) + 2$. Cette somme est donc de la forme « multiple de 4, plus 2 ».

Si elle était un multiple de 4, on aurait $4(n + 1) + 2 = 4m$ pour un certain entier m , donc $2 = 4m - 4(n + 1) = 4(m - n - 1)$, c'est-à-dire que 2 serait un multiple de 4. C'est faux.

Donc la somme de quatre entiers consécutifs n'est jamais un multiple de 4

1. $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$, donc la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3

2. Par exemple $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $5 + 6 + 7 + 8 = 26$, $10 + 11 + 12 + 13 = 46$: le reste dans la division par 4 vaut toujours 2.

4. Cinq entiers consécutifs donnent $5n + 10 = 5(n + 2)$, donc leur somme est un multiple de 5.

La conjecture est que la propriété vaut pour un nombre **impair** de termes, et échoue pour un nombre pair.

On la démontre en une ligne, en utilisant la somme des premiers entiers, $0 + 1 + \dots + (m - 1) = \frac{m(m - 1)}{2}$:

la somme de m entiers consécutifs à partir de n vaut $mn + \frac{m(m - 1)}{2}$. Si m est impair, $\frac{m - 1}{2}$ est un entier et la somme s'écrit $m\left(n + \frac{m - 1}{2}\right)$, donc c'est un multiple de m . Si m est pair, elle vaut $mn + \frac{m}{2}(m - 1)$, où $\frac{m}{2}(m - 1)$ n'est pas un multiple de m puisque $m - 1$ est impair.

COMMENTAIRES

Démontrer un « jamais » n'est pas la même chose que démontrer un « toujours ». Trois exemples, comme en question 2, ne prouvent rien : ils orientent. C'est le calcul littéral de la question 3 qui prouve, et lui seul.

Ce qu'un carré ne peut pas être

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1, LA DISJONCTION DES CAS

Soit n un entier. Il est pair ou impair, et ces deux cas couvrent toutes les possibilités.

Cas n pair. Il existe un entier k tel que $n = 2k$. Alors $n^2 = 4k^2$, qui est de la forme $4 \times$ entier.

Cas n impair. Il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Alors

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1,$$

qui est de la forme $4 \times$ entier $+ 1$.

Dans les deux cas, en nommant m l'entier obtenu (c'est k^2 dans le premier, $k^2 + k$ dans le second, et il n'y a aucune raison que ce soit le même) :

$$n^2 \text{ s'écrit } 4m \text{ ou } 4m + 1, \text{ pour tout entier } n$$

2. $2023 = 4 \times 505 + 3$, le reste vaut $\boxed{3}$

3. Un carré laisse un reste de 0 ou de 1 dans la division par 4, jamais 3. Donc

$$\boxed{2023 \text{ n'est le carré d'aucun entier}}$$

4. 2024 laisse le reste 0, 2025 le reste 1, 2026 le reste 2. La méthode n'élimine que $\boxed{2026}$. Elle ne dit rien de 2024 ni de 2025, et pour cause : $2025 = 45^2$.

5. Même disjonction, en trois cas cette fois. Si $n = 3k$, alors $n^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$. Si $n = 3k + 1$, alors $n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$. Si $n = 3k + 2$, alors $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$.

$$\boxed{n^2 \text{ est de la forme } 3m \text{ ou } 3m + 1, \text{ pour tout entier } n}$$

6. Lisons ce résultat à l'envers. Si 3 ne divisait pas n , alors n serait de la forme $3k + 1$ ou $3k + 2$, et dans les deux cas n^2 serait de la forme $3m + 1$, donc ne serait pas un multiple de 3. Par contraposée :

$$\boxed{\text{si } 3 \text{ divise } n^2, \text{ alors } 3 \text{ divise } n}$$

COMMENTAIRES

Un critère qui *élimine* ne prouve rien quand il ne s'applique pas : 2024 passe le test et n'est pourtant pas un carré. C'est la même logique que la preuve par neuf de l'exercice 28, et la même limite.

Les questions 5 et 6 ne sont pas un supplément : elles arment l'exercice 25. La disjonction est le seul outil du programme de seconde qui permette de passer de « 3 divise n^2 » à « 3 divise n ».

Pourquoi la somme des chiffres décide

RÉDACTION MODÈLE – QUESTIONS 1 À 4

L'écriture. Un entier de trois chiffres $\overline{abc}$ est le nombre $100a + 10b + c$. On l'écrit

$$100a + 10b + c = 99a + 9b + a + b + c = (99a + 9b) + (a + b + c).$$

Le premier morceau est toujours un multiple de 3. En effet $99a + 9b = 3(33a + 3b)$, et $33a + 3b$ est un entier, quels que soient les chiffres a et b .

La conclusion, dans les deux sens. Le nombre $100a + 10b + c$ est la somme de deux termes, dont le premier est un multiple de 3. D'après le cours, une somme de deux multiples de 3 est un multiple de 3 : donc si $a + b + c$ est un multiple de 3, le nombre l'est aussi.

Réciproquement, supposons le nombre multiple de 3. Alors $a + b + c = (100a + 10b + c) - (99a + 9b)$. Si l'on écrit $100a + 10b + c = 3u$ et $99a + 9b = 3v$, cette différence vaut $3(u - v)$, donc c'est encore un multiple de 3.

$100a + 10b + c$ est un multiple de 3 si et seulement si $a + b + c$ en est un

Pour 9. Le même découpage sert, car $99a + 9b = 9(11a + b)$ est aussi un multiple de 9, et le raisonnement se répète mot pour mot :

$100a + 10b + c$ est un multiple de 9 si et seulement si $a + b + c$ en est un

Ces deux conclusions valent quels que soient les chiffres a , b et c .

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 5, LA VERSION FORTE

Reprenons l'égalité de la question 1, en isolant le second morceau :

$$(100a + 10b + c) - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b).$$

Le nombre $11a + b$ est un entier, donc la différence entre $100a + 10b + c$ et $a + b + c$ est un multiple de 9. Or deux entiers dont la différence est un multiple de 9 ont le même reste dans la division par 9 : en effet, si $100a + 10b + c = 9q + r$ avec $0 \leq r < 9$, alors $a + b + c = 9(q - 11a - b) + r$, et le reste est encore r .

$100a + 10b + c$ et $a + b + c$ ont le même reste dans la division par 9

C'est strictement plus fort que le critère : le critère ne parle que du reste 0.

6. Pour quatre chiffres, on écrit $1000a + 100b + 10c + d = (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d)$, et $999a + 99b + 9c = 3(333a + 33b + 3c)$ est encore un multiple de 3 et de 9. Pour un nombre de n chiffres, le même découpage donne un premier morceau formé de 9, 99, 999, ..., tous multiples de 3 et de 9 : la méthode s'étend donc à un nombre quelconque de chiffres.

La version forte s'étend aussi, et c'est elle qui servira à l'exercice 28. En notant N un entier quelconque et S la somme de ses chiffres, le même découpage donne

$$N - S = 9a_1 + 99a_2 + 999a_3 + \dots,$$

où $a_1, a_2, a_3, \dots$ sont les chiffres de N à partir des dizaines. Chaque terme est un multiple de 9, donc $N - S$ aussi, donc N et S ont le même reste dans la division par 9 : le raisonnement de la question 5 se

répète mot pour mot.

En particulier, 10^n s'écrit « un 1 suivi de n zéros », donc la somme de ses chiffres vaut 1. Comme 1 n'est pas un multiple de 3 :

10^n n'est un multiple de 3 pour aucun entier naturel n

COMMENTAIRES

Cet exercice est le pivot de l'Atelier. Le cours utilisait ce critère sans le démontrer, pour établir qu'un tiers n'est pas décimal. Vous venez de combler ce trou, et vous allez vous en servir deux fois : la question 6 arme l'exercice 20, la question 5 arme l'exercice 28.

Attention à ne pas confondre : l'exercice 25 ne s'appuie **pas** sur ce critère. Le critère des chiffres ne dit rien de la divisibilité d'un carré ; c'est la disjonction de cas de l'exercice 15 qui arme l'exercice 25.

IV. LES ÉCRITURES D'UN NOMBRE

EXERCICE 17 · APL-A1-17



Irréductible, puis décimal ou non

MÉTHODE *Simplifier d'abord, décider ensuite : c'est l'ordre qui compte.*

1. $\frac{108}{135} = \frac{4}{5}$ après division par 27, et $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$, donc décimal, 0,8 2. $\frac{84}{210} = \frac{2}{5}$ après division par 42, donc décimal, 0,4

3. Après division par 13 :

$$\frac{91}{117} = \frac{7}{9}.$$

Ne pas trouver d'entier qui transforme 9 en une puissance de 10 ne prouve rien : posons la division et surveillons les *restes*. On divise 7 par 9 : le premier reste vaut 7, et l'étape suivante, 70 divisé par 9, redonne le reste 7. Le même reste étant revenu, le calcul se reproduit à l'identique indéfiniment : le reste 0 n'apparaîtra jamais, donc l'écriture ne s'arrête pas et $\frac{91}{117}$ n'est pas un nombre décimal

4. $\frac{51}{85} = \frac{3}{5}$ après division par 17, donc décimal, égal à 0,6

COMMENTAIRES

Aucune des quatre n'était irréductible au départ, et **trois** d'entre elles ($\frac{108}{135}$, $\frac{84}{210}$ et $\frac{51}{85}$) auraient été jugées non décimales sur la seule vue de leur dénominateur. C'est exactement le piège de la phase 3 de l'activité.

La question 3 mérite une seconde lecture. Le cours prévient que **ne pas avoir trouvé n'est pas une preuve** : pour conclure qu'un nombre n'est *pas* décimal, il faut un argument, pas un échec de recherche. Constaté trois ou quatre décimales n'en est pas un non plus, et c'est l'erreur naturelle ici. Ce qui prouve, c'est le **retour d'un reste** : il garantit que le calcul boucle, donc qu'il ne s'arrêtera jamais. C'est exactement l'argument de la roue des restes du cours.

EXERCICE 18 · APL-A1-18

★★★ ■

Ça s'arrête, ou ça se répète

MÉTHODE Poser la division, et surveiller les restes.

1. $\frac{3}{16} = 0,1875$, l'écriture s'arrête.
2. $\frac{5}{12} = 0,41666\dots$, période 6, de longueur 1.
3. $\frac{7}{11} = 0,636363\dots$, période 63, de longueur 2.
4. $\frac{9}{80} = 0,1125$, l'écriture s'arrête.

EXERCICE 19 · APL-A1-19

★★★ ◆

Le nombre qui tourne

MÉTHODE Calculer, puis regarder les chiffres plutôt que les nombres.

1. 285 714, 428 571, 571 428, 714 285, 857 142. Ce sont

les six mêmes chiffres, dans le même ordre cyclique

seul le point de départ change.

2. $142\,857 \times 7 = 999\,999$
3. De cette égalité on tire $142\,857 = \frac{999\,999}{7}$, donc $\frac{1}{7} = \frac{142\,857}{999\,999}$: diviser par 999 999, c'est exactement produire la période 142857 répétée indéfiniment.
4. Oui. Puisque $\frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7}$ et que $142\,857 \times 3 = 428\,571$, on prévoit $\frac{3}{7} = 0,428571\,428571\dots$, ce que la division confirme.

EXERCICE 20 · THE-A1-20

★★★★ ◆

Un dénominateur qui condamne

RÉDACTION MODÈLE – QUESTIONS 1 À 3

L'hypothèse absurde. Soit b un entier strictement positif que 3 divise. Supposons que $\frac{1}{b}$ soit décimal : il existe alors un entier p et un entier naturel n tels que

$$\frac{1}{b} = \frac{p}{10^n}.$$

L'égalité entre entiers. En multipliant les deux membres par $b \times 10^n$, on obtient

$$10^n = pb.$$

La divisibilité. Comme 3 divise b , il existe un entier c tel que $b = 3c$. Alors $10^n = 3(pc)$, et pc est un entier : 3 divise donc 10^n .

La contradiction. Or la question 6 de l'exercice 16 établit que 10^n n'est un multiple de 3 pour aucun entier naturel n , puisque la somme de ses chiffres vaut 1.

L'hypothèse de départ est donc fausse :

$$\text{si } 3 \text{ divise } b, \text{ alors } \frac{1}{b} \text{ n'est pas décimal, quel que soit l'entier } b > 0$$

4. 3 divise 12 et divise 33, donc $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{33}$ ne sont pas décimaux

5. Le raisonnement s'adapte, mais un pas change. Avec $\frac{5}{12}$ on obtient $5 \times 10^n = pb$, d'où l'on tire que 3 divise 5×10^n .

Le pas qui ne se fait plus est le passage de là à « 3 divise 10^n » : il reviendrait à simplifier par 5 à l'intérieur d'une divisibilité, et rien ici ne l'autorise.

Par quoi on le remplace : on applique le critère de l'exercice 16 directement à 5×10^n , qui s'écrit « un 5 suivi de n zéros ». La somme de ses chiffres vaut 5, qui n'est pas un multiple de 3 : donc 3 ne divise pas 5×10^n , et la contradiction est atteinte sans aucun outil nouveau.

$$\frac{5}{12} \text{ n'est pas un nombre décimal}$$

AUTRE MÉTHODE · HORS BARÈME – UN SECOND CHEMIN, PLUS COURT

On peut aussi conclure sans revenir aux chiffres. Supposons $\frac{5}{12}$ décimal. Le nombre $\frac{4}{5} = 0,8$ est décimal lui aussi, et un produit de deux décimaux est décimal. Or

$$\frac{5}{12} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

On en déduirait que $\frac{1}{3}$ est décimal, ce que le cours a démontré faux. Donc $\frac{5}{12}$ n'est pas décimal

COMMENTAIRES

La question 5 est une leçon de précision : un raisonnement ne se juge pas en bloc, il se juge pas à pas. Un seul maillon change, et il ne s'agit pas d'un manque d'outil mais d'un raccourci illégitime. Repérer exactement ce maillon, c'est déjà l'avoir réparé.

EXERCICE 21 · SYN-A1-21

★★★★ ♦

De l'écriture périodique à la fraction

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1, LA TECHNIQUE DU DÉCALAGE

Posons $x = 0,999\dots$, avec une infinité de 9.

En multipliant par 10, on décale l'écriture d'un rang, et comme tous les chiffres sont identiques, la partie après la virgule est *inchangée* :

$$10x = 9,999\dots$$

En soustrayant, les parties décimales s'annulent exactement :

$$10x - x = 9,999\dots - 0,999\dots = 9, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 9x = 9.$$

Donc $x = 1$, autrement dit 0,999... et 1 sont **le même nombre**, écrit de deux façons.

MÉTHODE On multiplie par 10^p , où p est la longueur de la période, pour que la soustraction efface la partie décimale.

2. $100y = 45,4545\dots$, donc $99y = 45$ et $y = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$

3. La période commence après un chiffre : on multiplie d'abord par 10, puis par 100. De $100z = 16,666\dots$ et $10z = 1,666\dots$, on tire $90z = 15$ et $z = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

4. La période a six chiffres, donc on multiplie par 10^6 : $999\,999w = 142\,857$, d'où $w = \frac{142\,857}{999\,999} = \frac{1}{7}$, ce que l'exercice 19 annonçait.

COMMENTAIRES

Cet exercice démontre la *réciproque* que le cours avait admise : toute écriture périodique est celle d'une fraction. La question 1 déconcerte toujours ; elle ne dit pas que 0,999... est « presque » 1, mais qu'il **est** 1. Deux écritures, un seul point sur la droite.

V. RATIONNELS ET IRRATIONNELS

EXERCICE 22 · APL-A1-22



À sa place dans la chaîne

MÉTHODE Toujours simplifier avant de ranger : l'apparence trompe.

1. $\sqrt{9} = 3$, donc $\mathbb{N}$
2. $\sqrt{10}$ est irrationnel, donc $\mathbb{R}$
3. $-\frac{\sqrt{16}}{2} = -2$, donc $\mathbb{Z}$
4. $(\sqrt{2})^2 = 2$, donc $\mathbb{N}$
5. $\pi - \pi = 0$, donc $\mathbb{N}$
6. $\frac{22}{7}$ n'est pas décimal, donc $\mathbb{Q}$
7. $0,25 \times 4 = 1$, donc $\mathbb{N}$
8. $\sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$, donc $\mathbb{N}$

COMMENTAIRES

Cinq des huit nombres sont des entiers naturels, et pas un seul ne le laissait voir. Un symbole de racine, une fraction ou un π ne disent rien tant qu'on n'a pas calculé.

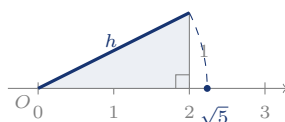
EXERCICE 23 · APL-A1-23



Construire un irrationnel au compas

MÉTHODE Chercher un triangle rectangle dont le théorème de Pythagore donne 5 pour le carré de l'hypoténuse.

1. Le triangle rectangle de côtés 1 et 2 : son hypoténuse h vérifie $h^2 = 1^2 + 2^2 = 5$, donc $h = \sqrt{5}$.
2. On construit ce triangle en posant le côté de longueur 2 sur la droite depuis l'origine, on élève la perpendiculaire de longueur 1, puis on reporte l'hypoténuse au compas **depuis l'origine** sur la droite.



3. $2^2 = 4 < 5 < 9 = 3^2$, donc $2 < \sqrt{5} < 3$, ce que la figure confirme.

4. Pour $\sqrt{10}$, on prendrait le triangle rectangle de côtés 1 et 3, car $1^2 + 3^2 = 10$.

EXERCICE 24 · APL-A1-24

★★★★ ◆

Vrai ou faux, et pourquoi

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1, L'OUTIL, PUIS QUESTION 4, LA SEULE QUI SE DÉMONTRE

L'outil. Soient r et r' deux nombres rationnels. Par définition, il existe quatre entiers p, q, p', q' , avec q et q' non nuls, tels que $r = \frac{p}{q}$ et $r' = \frac{p'}{q'}$. En réduisant au même dénominateur :

$$r - r' = \frac{pq' - p'q}{qq'}.$$

Le numérateur $p q' - p' q$ est un entier, comme produits et différence d'entiers, et le dénominateur $q q'$ est un entier non nul, comme produit de deux entiers non nuls. Le quotient est donc bien un quotient de deux entiers, donc $r - r'$ est un nombre rationnel.

L'affirmation 4. VRAI. Soient r un rationnel et x un irrationnel. Raisonnons par l'absurde en supposant que $r + x$ soit rationnel.

On peut alors écrire $x = (r + x) - r$, c'est-à-dire x comme différence de deux rationnels. D'après la question 1, x serait donc rationnel.

Cela contredit l'hypothèse selon laquelle x est irrationnel.

Donc la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est toujours irrationnelle.

MÉTHODE Pour les trois autres affirmations, un seul contre-exemple suffit à réfuter.

2. **FAUX.** $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont irrationnels, et leur somme vaut 0.

3. **FAUX.** $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

5. **FAUX.** $\sqrt{2}$ est irrationnel et $(\sqrt{2})^2 = 2$ ne l'est pas.

COMMENTAIRES

Trois affirmations fausses, une vraie, et la dissymétrie est le vrai enseignement : réfuter demande **un** exemple, démontrer demande un raisonnement valable pour **tous** les cas. Aucune accumulation d'exemples ne remplacera jamais la question 4.

La question 1 n'est pas un préliminaire décoratif. Sans elle, la démonstration de l'affirmation 4 s'appuierait sur un « c'est bien connu » qui n'a jamais été établi. Elle resservira à l'exercice 26.

La racine de trois à son tour

RÉDACTION MODÈLE – QUESTIONS 1 À 3

L'hypothèse absurde. Supposons $\sqrt{3}$ rationnel. On peut alors l'écrire $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, avec p et q entiers, q non nul, et la fraction rendue irréductible.

En élevant au carré, $3 = \frac{p^2}{q^2}$, donc

$$p^2 = 3q^2.$$

Le numérateur est un multiple de 3. L'égalité montre que p^2 est un multiple de 3. D'après la dernière question de l'exercice 15, p l'est aussi : il existe un entier k tel que $p = 3k$.

Le dénominateur l'est aussi. En reportant, $9k^2 = 3q^2$, donc $q^2 = 3k^2$. Le même argument s'applique : q^2 est un multiple de 3, donc q aussi.

La contradiction. p et q sont tous deux des multiples de 3 : la fraction pouvait encore être simplifiée par 3, ce qui contredit son caractère irréductible.

Donc $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel

4. Le raisonnement se bloque à la deuxième étape. Pour $\sqrt{4}$, on obtiendrait $p^2 = 4q^2$, et il faudrait affirmer que si 4 divise p^2 alors 4 divise p . C'est **faux** : $p = 2$ donne $p^2 = 4$, divisible par 4, alors que 2 ne l'est pas. Et c'est heureux, puisque $\sqrt{4} = 2$ est rationnel.

COMMENTAIRES

La question 4 est la plus instructive de l'exercice. Une démonstration qui « marcherait pour tout » démontrerait aussi des choses fausses : savoir où elle cesse de marcher, c'est savoir ce qu'elle utilise vraiment.

Deux racines valent-elles mieux qu'une ?

MÉTHODE Élever au carré pour ramener deux racines à une seule, puis réutiliser la trame du cours.

1. $x^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3$, donc $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$

2. Si x était rationnel, x^2 le serait aussi, donc $2\sqrt{6} = x^2 - 5$ le serait (question 1 de l'exercice 24 : une différence de deux rationnels est rationnelle), donc $\sqrt{6}$ le serait également.

3. Supposons $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$ irréductible. Alors $p^2 = 6q^2$, donc p^2 est pair, donc p est pair (contraposée de la propriété du cours : le carré d'un impair est impair). En écrivant $p = 2k$, il vient $4k^2 = 6q^2$, soit $2k^2 = 3q^2$. Le membre de gauche est pair, donc $3q^2$ est pair, et comme 3 est impair, q^2 est pair (case « impair $\times$ impair » de la table de l'exercice 13), donc q est pair. Contradiction avec l'irréductibilité, donc $\sqrt{6}$ est irrationnel

4. La question 2 conduirait à ce que $\sqrt{6}$ soit rationnel, ce que la question 3 interdit. Donc

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ est irrationnel}$$

Un nombre construit pour ne jamais se répéter

MÉTHODE Écrire les premières décimales, puis chercher dans l'écriture une régularité que la périodicité interdirait.

1. $K = 0,12345678910111213141 \dots$
2. Non : l'écriture ne s'arrête pas, puisqu'il y a une infinité d'entiers à écrire.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTIONS 3 À 5

Une longue plage de zéros. L'écriture de K contient, à la suite, tous les entiers. Elle contient donc en particulier l'entier 10^{100} , qui s'écrit « un 1 suivi de cent zéros ». À cet endroit, l'écriture de K présente donc au moins cent zéros consécutifs, et a fortiori quatre-vingt-dix-neuf.

Des plages aussi longues qu'on veut. Le même argument vaut pour 10^m , quel que soit l'entier m : l'écriture de K contient une plage d'au moins m zéros consécutifs. On peut donc y trouver des plages de zéros de longueur arbitrairement grande.

La conclusion. Raisonnons par l'absurde et supposons K rationnel. D'après le cours, son écriture serait alors périodique à partir d'un certain rang ; appelons p la longueur de sa période.

D'après ce qui précède, il existe dans l'écriture de K , au-delà de ce rang, une plage de plus de p zéros consécutifs. Cette plage contient donc une période entière, qui n'est faite que de zéros. Comme tout ce qui suit répète cette période, l'écriture de K ne contiendrait plus que des zéros à partir de là.

Or c'est faux : l'écriture de K contient des chiffres non nuls aussi loin qu'on veut, puisqu'elle contient tous les entiers.

Donc K n'est pas rationnel

COMMENTAIRES

Voilà un irrationnel qu'on n'a pas eu besoin de construire géométriquement, ni de sortir d'une racine : il suffit d'écrire les entiers à la suite. La démonstration n'utilise strictement rien d'autre que la propriété du cours sur l'écriture des rationnels, et c'est ce qui la rend belle.

VI. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

La preuve par neuf, qui n'en est pas une

MÉTHODE Tout repose sur les questions 5 et 6 de l'exercice 16 : un nombre, quel que soit son nombre de chiffres, et la somme de ses chiffres laissent le même reste dans la division par 9. La question 3 y ajoute le seul ingrédient qui manque, le passage au produit.

1. Le réduit de 237 vaut $2 + 3 + 7 = 12$, puis $1 + 2 = 3$. Celui de 46 vaut $4 + 6 = 10$, puis 1. Le produit des réduits vaut $3 \times 1 = 3$, dont le réduit est encore 3. Enfin 10 902 donne $1 + 0 + 9 + 0 + 2 = 12$, puis 3. Les deux valent 3 : la preuve réussit.

2. Les questions 5 et 6 de l'exercice 16 établissent qu'un entier, quel que soit son nombre de chiffres, et la somme de ses chiffres ont le même reste dans la division par 9. C'est bien la version générale qu'il faut ici,

puisque 10 902 a cinq chiffres.

Le réduit s'obtient en répétant cette opération un nombre fini de fois, et chaque passage conserve le reste : un entier et son réduit ont donc le même reste dans la division par 9.

3. L'écriture. Soient a et b deux entiers, de restes respectifs r et s dans la division par 9. Il existe donc deux entiers u et v tels que $a = 9u + r$ et $b = 9v + s$.

Le développement. En multipliant :

$$a \times b = (9u + r)(9v + s) = 81uv + 9us + 9vr + rs = 9(9uv + us + vr) + rs.$$

La conclusion. Le nombre $9uv + us + vr$ est un entier, donc $a \times b$ et $r \times s$ diffèrent d'un multiple de 9. Deux entiers dont la différence est un multiple de 9 ont le même reste dans la division par 9, donc

$$a \times b \text{ et } r \times s \text{ ont le même reste dans la division par 9}$$

4. Notons R et S les réduits de a et de b . D'après la question 2, R a le même reste que a , et S le même reste que b .

La différence $a - R$ est donc un multiple de 9, ce qui permet d'écrire $a = 9u' + R$, et de même $b = 9v' + S$. Le calcul de la question 3 s'applique alors tel quel, avec R et S à la place de r et s : $a \times b$ a le même reste que $R \times S$. Et par la question 2 encore, $R \times S$ a le même reste que son propre réduit.

Or, si le calcul est juste, $a \times b$ et c sont le même nombre : ils ont le même reste, et c a le même reste que son réduit.

Les deux réduits comparés par la preuve ont donc le même reste dans la division par 9. Or un réduit est un entier compris entre 1 et 9, et deux entiers de cet intervalle qui ont le même reste sont égaux. La preuve réussit donc toujours.

5. 10 092 donne $1 + 0 + 0 + 9 + 2 = 12$, puis 3 : le même réduit que 10 902. Le calcul faux passe donc le test. La raison est que $10\,902 - 10\,092 = 810$, qui est un multiple de 9 : l'erreur commise est invisible pour ce test.

La preuve par neuf ne peut que réfuter un calcul, jamais le confirmer

COMMENTAIRES

Une transposition de chiffres change toujours le nombre d'un multiple de 9 : c'est précisément l'erreur la plus fréquente, et c'est précisément celle que la preuve par neuf ne voit pas. Mille ans d'usage commercial pour un test qui laisse passer la faute la plus courante, voilà qui mérite qu'on retienne la différence entre *réfuter* et *prouver*.

EXERCICE 29 · APR-A1-29

★★★★ ◆

L'échelle de Théon de Smyrne

MÉTHODE Appliquer la règle, puis observer avant de conclure.

1. (1 ; 1), (2 ; 3), (5 ; 7), (12 ; 17), (29 ; 41), (70 ; 99).

2. Les quotients valent 1 ; 1,5 ; 1,4 ; 1,41666... ; 1,41379... ; 1,41428... Ils semblent approcher $\sqrt{2}$, et le font

alternativement par excès et par défaut

3. $d^2 - 2s^2$ vaut successivement $-1, 1, -1, 1, -1, 1$:

la valeur alterne entre -1 et 1

4. Un couple seul ne donne qu'une borne, puisque le signe alterne. Pour $(29; 41)$, $41^2 = 1681 < 1682 = 2 \times 29^2$, donc $\frac{41}{29} < \sqrt{2}$. Pour le couple suivant $(70; 99)$, $99^2 = 9801 > 9800 = 2 \times 70^2$, donc $\frac{99}{70} > \sqrt{2}$. D'où

$$\frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{99}{70}$$

5. Pour $(169; 239)$, $239^2 = 57\,121 < 57\,122 = 2 \times 169^2$, donc $\frac{239}{169} < \sqrt{2}$. Cette borne inférieure vaut environ $1,414201$, contre $1,413793$ pour la précédente : elle est meilleure, donc

$$\frac{239}{169} < \sqrt{2} < \frac{99}{70}$$

6. Le sixième quotient vaut $\frac{99}{70} \approx 1,414286$, et le huitième $\frac{577}{408} \approx 1,4142157$. Le nombre du scribe, $1,414212963$, est donc plus précis que les deux : son écart à $\sqrt{2}$ vaut environ 6×10^{-7} , contre $7,2 \times 10^{-5}$ pour $\frac{99}{70}$ et $2,1 \times 10^{-6}$ pour $\frac{577}{408}$.

Le scribe bat les huit premiers termes de l'échelle

COMMENTAIRES

Le résultat de la question 6 mérite d'être savouré, et il est contraire à ce qu'on lit souvent. Une méthode grecque du deuxième siècle, poussée jusqu'à son huitième terme, n'atteint toujours pas la précision qu'un élève scribe avait gravée dans l'argile dix-sept siècles plus tôt.

EXERCICE 30 · APR-A1-30

★★★★★ ☆

Les nombres qui s'aiment, et les pains d'Ahmès

MÉTHODE *Partie A : lister méthodiquement les diviseurs, sans en oublier. Partie B : essayer les fractions unitaires par ordre décroissant.*

1. Diviseurs propres de 220 : 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110. Leur somme vaut 284

2. Diviseurs propres de 284 : 1, 2, 4, 71, 142. Leur somme vaut 220

3. Chacun est la somme des diviseurs propres de l'autre : les deux nombres se renvoient l'un à l'autre.

4. $6 = 1 + 2 + 3$ et $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$: ils sont parfaits. Pour 496, les diviseurs propres sont 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124 et 248, et $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$

5. $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{5}{15} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$, l'égalité est bien vérifiée.

6. Chaque personne doit recevoir $\frac{3}{5}$ de pain, et $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Le partage convient.

7. et 8.

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

COMMENTAIRES

Le procédé qui vient naturellement porte un nom, l'algorithme *glouton* : à chaque étape, on retire la plus grande fraction unitaire qui tienne encore, et l'on recommence avec le reste. Il termine toujours, ce qui n'a rien d'évident.

Attention toutefois à ne pas prêter aux scribes ce qu'ils ne faisaient pas : les tables du papyrus Rhind ne suivent pas le glouton en général, et donnent souvent de meilleures décompositions. Ils obtenaient leurs résultats par des procédés qui leur étaient propres ; l'algorithme glouton, lui, ne sera décrit que bien plus tard.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les prolongements de la partie VI, les réponses des blocs « À vous » du cours et les quiz de révision vous attendent sur le compagnon numérique du chapitre.