



CORRIGÉ · A2. ORDRE, INTERVALLES ET VALEUR ABSOLUE

Corrigé des trente exercices de l'Atelier

Ce corrigé se lit **la feuille en main** : les énoncés n'y sont pas recopiés. Seize questions sont rédigées comme une copie idéale, à imiter jusqu'à la ponctuation ; les autres donnent la stratégie, le calcul et le résultat. Un encadrement sans son amplitude, et un résultat sans phrase de réponse, ne sont pas des réponses.

RÉDACTION MODÈLE : la copie idéale, à imiter · MÉTHODE : la stratégie en une ligne, puis le calcul · COMMENTAIRES : ce que la solution enseigne

I. COMPARER, C'EST SOUSTRAIRE

EXERCICE 1 · APL-A2-01



Le signe décide

RÉDACTION MODÈLE – PARTIE A, QUESTION 3, CELLE OÙ LA CALCULATRICE NE PROUVE RIEN

Le nombre 0,667 est un décimal : écrivons-le en fraction, ce qui rend la différence exacte.

$$0,667 = \frac{667}{1000}.$$

Calculons la différence, au dénominateur commun 3000 :

$$\frac{667}{1000} - \frac{2}{3} = \frac{667 \times 3}{3000} - \frac{2 \times 1000}{3000} = \frac{2001 - 2000}{3000} = \frac{1}{3000}.$$

Ce nombre est strictement positif, comme quotient de deux nombres strictement positifs.

Donc $\frac{2}{3} < 0,667$

MÉTHODE Partie A : une seule différence par couple, réduite au dénominateur commun, puis son signe. Partie B : ranger d'abord à vue, puis justifier la chaîne obtenue par quatre différences seulement, chaque nombre comparé à son voisin immédiat.

1. $\frac{7}{11} - \frac{5}{8} = \frac{56 - 55}{88} = \frac{1}{88}$, strictement positif, donc $\frac{5}{8} < \frac{7}{11}$

$$2. -\frac{4}{9} - \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{-28 + 27}{63} = \frac{-1}{63}, \text{ strictement négatif, donc } \boxed{-\frac{4}{9} < -\frac{3}{7}}$$

Partie B. L'ordre conjecturé est $\frac{3}{4}$, $\frac{31}{40}$, $0,7777$, $\frac{7}{9}$, $0,78$. Quatre différences le démontrent.

$$1. \frac{31}{40} - \frac{3}{4} = \frac{31 - 30}{40} = \frac{1}{40} > 0.$$

$$2. 0,7777 - \frac{31}{40} = \frac{7777}{10\,000} - \frac{7750}{10\,000} = \frac{27}{10\,000} > 0.$$

$$3. \frac{7}{9} - 0,7777 = \frac{70\,000}{90\,000} - \frac{69\,993}{90\,000} = \frac{7}{90\,000} > 0.$$

$$4. 0,78 - \frac{7}{9} = \frac{702 - 700}{900} = \frac{2}{900} > 0.$$

Ces quatre inégalités s'enchaînent, car si un nombre est inférieur à un deuxième et ce deuxième à un troisième, alors le premier est inférieur au troisième : la somme de deux nombres positifs est positive, et c'est exactement ce que dit la définition de l'ordre.

$$\boxed{\frac{3}{4} < \frac{31}{40} < 0,7777 < \frac{7}{9} < 0,78}$$

COMMENTAIRES

En partie A, la calculatrice est le piège : l'écran affiche $0,666666\dots$ pour $\frac{2}{3}$, ce qui suggère la réponse sans la **démontrer**, puisque l'écran a coupé l'écriture quelque part ; la différence, elle, est un nombre exact, et son signe tranche. Au couple 2, entre deux négatifs, le plus grand en valeur absolue est le plus petit, et c'est déjà le renversement du paragraphe 1. En partie B, quatre différences suffisent pour cinq nombres là où il en faudrait dix pour tous les couples : c'est le *chaînage* qui fait l'économie, et encore faut-il l'avoir énoncé, car le cours ne le fait nulle part. Les trois derniers nombres tiennent dans moins de trois millièmes : une valeur approchée lue sur un écran n'y départage rien.

EXERCICE 2 · APL-A2-02



La hausse la plus forte

MÉTHODE Deux comparaisons distinctes répondent à deux questions distinctes : la différence dit « de combien », le quotient dit « par combien ». Rien n'oblige leurs verdicts à coïncider.

1. La cotisation augmente de $270 - 250 = 20$ euros, le loyer de $1\,300 - 1\,250 = 50$ euros.

en euros, la hausse du loyer est la plus grande

2. $\frac{270}{250} = 1,08$ et $\frac{1\,300}{1\,250} = 1,04$: la cotisation a été multipliée par 1,08, le loyer par 1,04.

3. Comme $1,08 > 1,04$, en proportion, la hausse de la cotisation est la plus forte

Les deux questions rendent des verdicts **opposés**, et aucune ne se trompe : elles ne mesurent pas la même chose.

4. **Vrai.** Les deux valeurs étant strictement positives, la propriété du cours s'applique : dire que le quotient de la nouvelle valeur par l'ancienne est strictement inférieur à 1 revient à dire que la nouvelle valeur est strictement inférieure à l'ancienne. la valeur a baissé

COMMENTAIRES

C'est l'exercice qui départage les deux comparaisons du paragraphe 1 : l'additive sert quand les euros comptent (le trésorier paie 50 euros de plus de loyer), la multiplicative quand les ordres de grandeur diffèrent (une hausse de 20 euros ne pèse pas pareil sur 250 et sur 1 250). Le quotient de la question 2 porte un nom, coefficient multiplicateur, et le chapitre P1 en fera son outil central.

EXERCICE 3 · APL-A2-03

★★ ■

Vrai ou faux

MÉTHODE Une affirmation vraie se démontre ou se cite ; une affirmation fausse tombe sous un seul contre-exemple, et il suffit qu'il soit un.

n°		Justification
1	VRAI	C'est la propriété du cours : deux inégalités de même sens s'additionnent membre à membre.
2	FAUX	Avec $a = -2$, $b = 1$, $c = -2$, $d = 1$: $ac = 4$ et $bd = 1$.
3	FAUX	Avec $a = -3$ et $b = 1$: $a^2 = 9$ et $b^2 = 1$. La comparaison des carrés exige deux nombres positifs .
4	VRAI	Multiplier par -3 , strictement négatif, renverse le sens : $-3b \leq -3a$.
5	FAUX	Avec $a = 1$, $b = 4$, $c = 0$, $d = 6$: $a - c = 1$ et $b - d = -2$. C'est la fausse règle de soustraction.
6	VRAI	Si c est strictement positif, c'est la propriété du cours. Si c est nul, les deux produits valent 0, et l'inégalité large est vraie.

COMMENTAIRES

Trois affirmations fausses, trois vraies, et la dissymétrie du travail est le vrai enseignement : réfuter demande **un** exemple, démontrer demande un argument valable pour **tous** les cas. L'affirmation 6 déborde d'ailleurs le cours, qui n'énonce la conservation que pour un c *strictement* positif ; le cas $c = 0$ n'est pas une chicane, il se règle en une phrase, et une règle doit couvrir tout ce que son hypothèse permet.

EXERCICE 4 · APL-A2-04

★★★ ■

Somme, différence, et le piège

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 2, CELLE QUI DONNE LA SEULE MÉTHODE SÛRE

L'encadrement de l'opposé. Partons de $-2 \leq y \leq 4$ et multiplions les trois membres par -1 , qui est strictement négatif : le sens est renversé, et l'on relit l'encadrement de droite à gauche.

$$-4 \leq -y \leq 2.$$

Le passage à la différence. Soustraire, c'est ajouter l'opposé : $x - y$ est la somme de x et de $-y$.

Nous disposons de deux encadrements de même sens,

$$3 \leq x \leq 7 \quad \text{et} \quad -4 \leq -y \leq 2,$$

et la propriété d'addition s'applique à chacune des deux inégalités.

En additionnant les bornes inférieures d'un côté, les bornes supérieures de l'autre :

$$3 + (-4) \leq x - y \leq 7 + 2.$$

Donc $-1 \leq x - y \leq 9$, encadrement d'amplitude 10.

MÉTHODE Une seule règle sert pour tout l'exercice : on n'additionne que des inégalités de même sens, et l'on passe à l'opposé avant de soustraire.

1. $3 + (-2) \leq x + y \leq 7 + 4$, donc $1 \leq x + y \leq 11$, d'amplitude 10.

3. La ligne annonce $5 \leq x - y \leq 3$: sa borne inférieure dépasse sa borne supérieure, donc *aucun* nombre ne peut la vérifier. On le voit sans rien calculer, et cela suffit à condamner la ligne.

La règle employée à tort est la soustraction membre à membre des deux encadrements, bornes inférieures entre elles et bornes supérieures entre elles. Le cours prévient qu'elle est fautive ; l'exercice 5 dira ce qui, à sa place, est vrai.

4. $y - x$ est l'opposé de $x - y$. En multipliant l'encadrement de la question 2 par -1 , le sens se renverse :

$$-9 \leq y - x \leq 1$$

COMMENTAIRES

Le contrôle de la question 3 est à garder pour toute l'année : **un encadrement dont la borne inférieure dépasse la borne supérieure est faux**, quelle que soit la manière dont on l'a obtenu. Il ne coûte qu'un regard, et il attrape la totalité des soustractions membre à membre. On remarquera aussi que l'amplitude vaut 10 pour la somme comme pour la différence : les deux imprécisions s'ajoutent dans les deux cas, même quand le calcul, lui, soustrait.

EXERCICE 5 · THE-A2-05

★★★★ ♦

La règle que le cours n'a pas énoncée

RÉDACTION MODÈLE – QUESTIONS 1 ET 2, LA CONSTRUCTION DE LA RÈGLE

Les opposés se rangent dans l'ordre inverse. Soient c et d deux réels tels que $c \leq d$. Par définition de l'ordre, le nombre $d - c$ est positif. Or

$$(-c) - (-d) = -c + d = d - c.$$

Ce nombre est donc positif, et cela signifie exactement, toujours par définition de l'ordre, que $-d \leq -c$.

La règle de soustraction. Soient maintenant a, b, c, d quatre réels tels que $a \leq b$ et $c \leq d$. D'après ce qui précède, $-d \leq -c$.

Nous disposons donc de deux inégalités de même sens,

$$a \leq b \quad \text{et} \quad -d \leq -c,$$

et la propriété d'addition du cours s'applique : $a + (-d) \leq b + (-c)$.

Donc

$$a - d \leq b - c \text{ pour tous réels } a \leq b \text{ et } c \leq d$$

MÉTHODE Pour la question 4, ne pas chercher la condition au hasard : écrire ce que l'inégalité voulue exige, et voir ce qu'il faut lui imposer.

3. Avec $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ et $d = 5$, la règle établie donne $a - d = 2 - 5 = -3$ et $b - c = 3 - 1 = 2$. Or $-3 \leq 2$: le couple la vérifie.

C'est le même couple qui réfutait la fausse règle, et il n'y a là aucune contradiction : les deux écritures ne soustraient pas les mêmes bornes.

4. L'inégalité $a - c \leq b - d$ revient à dire que le nombre

$$(b - d) - (a - c) = (b - a) + (c - d)$$

est positif. On veut que cela vaille *quels que soient* les réels $a \leq b$, donc en particulier lorsque $a = b$, auquel cas $b - a$ est nul : il faut alors que $c - d$ soit positif, c'est-à-dire $d \leq c$.

Or l'hypothèse donne $c \leq d$. Les deux ensemble imposent $c = d$.

Réciproquement, si $c = d$, l'écriture $a - c \leq b - d$ devient $a - c \leq b - c$, qui est vraie dès que $a \leq b$.

$$\text{la fausse règle ne devient vraie que si } c = d$$

COMMENTAIRES

La conclusion de la question 4 est le mot de la fin sur cette affaire : soustraire deux inégalités membre à membre n'est légitime que lorsque la seconde est en réalité une **égalité**, c'est-à-dire lorsqu'on retranche un même nombre aux deux membres. Reste à retenir la vraie règle par sa forme : la borne inférieure de $a - d$ associe le *plus petit* des deux premiers au *plus grand* des deux seconds, et ce croisement est la signature de toute soustraction d'encadrements.

EXERCICE 6 · SYN-A2-06

★★★★★ ☆

Un nombre et son carré

MÉTHODE Tout tient dans la factorisation $a^2 - a = a(a - 1)$: le signe d'un produit se lit sur celui de ses deux facteurs, et il faut les examiner sur chacun des trois domaines.

1. $a^2 - a = a(a - 1)$ pour tout réel a

2. Si $a \geq 1$, les deux facteurs a et $a - 1$ sont positifs, donc leur produit l'est aussi :

$$a \leq a^2 \text{ pour tout réel } a \geq 1$$

3. Si $0 \leq a \leq 1$, le facteur a est positif et le facteur $a - 1$ est négatif, donc leur produit est négatif :

$$a^2 \leq a \text{ pour tout réel } a \text{ de } [0; 1]$$

4. Si $a \leq 0$, les deux facteurs sont négatifs, puisque $a - 1 \leq -1$, donc leur produit est positif :

$$a \leq a^2 \text{ pour tout réel } a \text{ négatif}$$

5. Les trois cas recouvrent tous les réels. En dehors du deuxième, on a $a \leq a^2$, et l'inégalité $a^2 \leq a$ n'y est donc vérifiée qu'en cas d'égalité, c'est-à-dire pour $a = 0$ et pour $a = 1$; or ces deux valeurs appartiennent déjà au deuxième cas. Donc

$$\text{les réels } a \text{ tels que } a^2 \leq a \text{ sont exactement ceux de } [0; 1]$$

6. Sur la droite graduée, ce sont les points du segment allant de 0 à 1, ces deux valeurs comprises : c'est l'intervalle $[0; 1]$. Les deux bornes en font bien partie, puisque $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$: l'inégalité y est une égalité.

COMMENTAIRES

Le résultat surprend, et c'est pour cela qu'il figure ici : élever au carré *ne rend pas plus grand*, cela ne rend plus grand qu'à partir de 1. Entre 0 et 1 le carré rapetisse, et pour les négatifs il change même de côté. Le programme demande de démontrer cette comparaison de x et de x^2 , et les paraboles du domaine F lui donneront son dessin.

II. ENCADRER UNE EXPRESSION

EXERCICE 7 · APL-A2-07



Cinq expressions

Dans tout cet exercice, x désigne un réel tel que $1 \leq x \leq 4$: chacun des encadrements encadrés ci-dessous vaut pour tout réel x vérifiant cette condition, et la quantification n'est donc pas répétée à chaque ligne.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 3, CELLE OÙ LE COEFFICIENT EST NÉGATIF

On sait que $1 \leq x \leq 4$.

La multiplication. Le coefficient de x dans $C = 5 - 2x$ vaut -2 , strictement négatif : la multiplication renverse le sens, et l'encadrement se relit de droite à gauche.

$$1 \leq x \leq 4 \quad \text{donne} \quad -8 \leq -2x \leq -2.$$

L'addition. Ajoutons 5 aux trois membres, ce qui ne change aucun sens :

$$-3 \leq 5 - 2x \leq 3.$$

Vérification. Pour $x = 1$, $C = 5 - 2 = 3$: c'est la borne *supérieure*. Pour $x = 4$, $C = 5 - 8 = -3$: c'est la borne *inférieure*. Les deux valeurs extrêmes de x ont échangé leurs rôles, comme le renversement l'annonçait.

Donc $-3 \leq C \leq 3$ pour tout réel x de $[1; 4]$

MÉTHODE Toujours le même enchaînement : multiplier, en renversant si le coefficient est strictement négatif, puis ajouter la

constante. La vérification par les deux valeurs extrêmes n'est pas facultative.

1. $3 \leq 3x \leq 12$, donc $5 \leq A \leq 14$

4. $4 \leq 4x \leq 16$, donc $-5 \leq D \leq 7$

2. $-4 \leq -x \leq -1$, donc $3 \leq B \leq 6$

5. $-12 \leq -3x \leq -3$, donc $-13 \leq E \leq -4$

Les vérifications tombent juste. Pour $x = 1$: $A = 5$, $B = 6$, $D = -5$, $E = -4$. Pour $x = 4$: $A = 14$, $B = 3$, $D = 7$, $E = -13$. Dans les trois expressions à coefficient négatif, les bornes ont échangé leurs rôles.

COMMENTAIRES

Multiplier un encadrement par un nombre strictement négatif sans renverser le sens est l'erreur la plus coûteuse du chapitre : elle produit un encadrement absurde et survit rarement à la vérification par les valeurs extrêmes, d'où la règle de conduite, **on vérifie toujours**. L'amplitude se lit aussi : multipliée par la valeur absolue du coefficient, et inchangée par l'addition, elle vaut 3 pour x , puis 9, 3, 6, 12 et 9.

EXERCICE 8 · APL-A2-08



Le rectangle mesuré

MÉTHODE L'écart de mesure se lit comme une distance : la valeur vraie est à moins de 0,05 de la valeur affichée. Le périmètre est une somme, l'aire est un produit, et les deux ne se comportent pas de la même façon.

1. $8,25 \leq L \leq 8,35$ et $5,55 \leq \ell \leq 5,65$

2. En additionnant les deux encadrements, de même sens : $13,80 \leq L + \ell \leq 14,00$, puis en multipliant par 2, strictement positif : $27,6 \leq 2(L + \ell) \leq 28,0$ centimètres.

3. Les six nombres en jeu sont positifs : la règle admise s'applique avec $u = 8,25$, $v = 8,35$, $u' = 5,55$ et $v' = 5,65$.

$$8,25 \times 5,55 = 45,7875 \quad \text{et} \quad 8,35 \times 5,65 = 47,1775.$$

$45,7875 \leq L\ell \leq 47,1775$ centimètres carrés.

4. Amplitude du périmètre : $28,0 - 27,6 = 0,4$ cm. Amplitude de l'aire : $47,1775 - 45,7875 = 1,39$ cm²

5. Le périmètre mesuré vaut $2 \times (8,3 + 5,6) = 27,8$ cm, et l'aire mesurée $8,3 \times 5,6 = 46,48$ cm². Les deux fractions cherchées valent

$$\frac{0,4}{27,8} \approx 0,0144 \quad \text{et} \quad \frac{1,39}{46,48} \approx 0,0299,$$

soit environ 1,4 % pour le périmètre et 3,0 % pour l'aire.

le périmètre est deux fois mieux connu que l'aire

COMMENTAIRES

Le rapprochement de la question 5 est le vrai contenu de l'exercice, et il se chiffre exactement : la longueur est connue à 1,2 % près, la largeur à 1,8 % près, et leur somme, 3,0 %, est précisément l'imprécision relative de l'aire.

Voilà la règle à emporter. Pour une **somme**, ce sont les amplitudes qui s'ajoutent ; pour un **produit**, ce sont les imprécisions *relatives*. Une aire est donc toujours moins bien connue que le périmètre du même rectangle, et un volume l'est encore moins. Quant à la règle admise en question 3, elle n'est pas un cadeau : l'exercice 11 la démontre.

Le plein d'essence

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 3, CELLE QUI PEUT RENDRE L'ENCADREMENT FAUX

Un encadrement reste vrai si on l'**élargit**, jamais si on le resserre. Chacune des deux bornes se traite donc séparément, et dans un sens imposé.

La borne inférieure. Elle ne doit pas augmenter, sous peine de passer au-dessus de valeurs que le coût peut réellement prendre. On retient donc sa **troncature** au centime :

$$22,29 \leq 22,2912.$$

La borne supérieure. Elle ne doit pas diminuer, pour la raison symétrique. Sa troncature vaudrait 27,08, qui est *inférieure* à 27,084 : elle est donc interdite. On retient le décimal à deux décimales immédiatement supérieur :

$$27,084 \leq 27,09.$$

En rassemblant, et en notant C le coût du trajet en euros :

$$22,29 \leq C \leq 27,09$$

On remarquera que l'arrondi de 27,084 vaut 27,08 : c'est exactement la valeur interdite. Ici, arrondir les deux bornes rendrait l'encadrement **faux**.

MÉTHODE Le trajet vaut 2,4 fois cent kilomètres ; le coût est le produit du volume par le prix, tous deux positifs, donc la règle admise à l'exercice 8 s'applique.

1. En multipliant $5,4 \leq c \leq 6,1$ par 2,4, strictement positif : $12,96 \leq V \leq 14,64$ litres.
2. $12,96 \times 1,72 = 22,2912$ et $14,64 \times 1,85 = 27,084$, donc $22,2912 \leq C \leq 27,084$ euros.

COMMENTAIRES

Retenir la consigne sous cette forme : **la borne du bas descend, la borne du haut monte**. Arrondir sans réfléchir marche une fois sur deux, et l'erreur ne se voit pas, puisque l'encadrement obtenu a toujours l'air d'un encadrement. Quant à l'amplitude de 4,79 euros sur un trajet d'environ vingt-cinq euros, elle est la conséquence directe de la question 5 de l'exercice 8 : les imprécisions relatives de la consommation et du prix se sont ajoutées.

L'inverse renverse

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 2, LE RÉSULTAT GÉNÉRAL ET SON EXTENSION

Le cas des positifs. Soient u et v deux réels tels que $0 < u \leq v$. Calculons la différence des inverses au dénominateur commun :

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{v - u}{uv}.$$

Le numérateur $v - u$ est positif, par hypothèse. Le dénominateur uv est strictement positif, comme

produit de deux nombres strictement positifs. Le quotient est donc positif, ce qui signifie exactement

$$\frac{1}{v} \leq \frac{1}{u} \text{ pour tous réels } u \text{ et } v \text{ tels que } 0 < u \leq v$$

Le cas des négatifs. Supposons maintenant u et v strictement négatifs, avec toujours $u \leq v$. Le calcul ne change pas d'une virgule, et les deux arguments non plus : le numérateur $v - u$ est encore positif, et le dénominateur uv est encore strictement positif, cette fois comme produit de deux nombres strictement négatifs.

La conclusion est donc identique : $\frac{1}{v} \leq \frac{1}{u}$.

Ce qui compte n'est pas le signe de u et de v pris séparément, c'est que leur **produit** soit strictement positif, autrement dit qu'ils soient du même côté de zéro.

MÉTHODE Une fois le résultat général acquis, les questions 1 et 3 en sont deux lectures, et la question 4 examine ce qui se passe quand l'hypothèse tombe.

1. $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$, strictement positif, donc $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$. Comme $2 \leq x \leq 5$ avec des bornes strictement positives, on obtient

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} \text{ pour tout réel } x \text{ tel que } 2 \leq x \leq 5$$

3. Ici $-4 \leq x \leq -1$: les trois nombres sont strictement négatifs et du même côté de zéro, le résultat s'applique donc. Les inverses des bornes valent $\frac{1}{-4} = -0,25$ et $\frac{1}{-1} = -1$, et le sens se renverse :

$$-1 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{4}$$

Vérification pour $x = -2$: $\frac{1}{x} = -0,5$, bien pris entre -1 et $-0,25$.

4. Non, et l'obstacle vient avant le calcul : la valeur $x = 0$ est permise par l'encadrement $-2 \leq x \leq 3$, et l'écriture $\frac{1}{x}$ n'a alors aucun sens.

Même en l'écartant, aucun encadrement n'est possible. Pour $x = 0,001$, l'inverse vaut 1000 ; pour $x = 0,000001$, il vaut un million. En prenant x strictement positif assez proche de zéro, on rend $\frac{1}{x}$ aussi grand qu'on veut, et aucune borne supérieure ne peut tenir. Du côté négatif, le même essai le rend aussi négatif qu'on veut.

$$\text{on ne peut pas encadrer } \frac{1}{x} \text{ lorsque l'intervalle contient zéro}$$

COMMENTAIRES

L'hypothèse de la règle n'est pas décorative, et c'est la question 4 qui le montre : un intervalle qui *contient* zéro casse tout, d'abord parce que l'écriture perd son sens, ensuite parce que l'inverse devient sans borne des deux côtés.

Sur l'encadrement obtenu en 3, un réflexe utile : les bornes de $\frac{1}{x}$ sont les inverses des bornes de x , mais **échangées**. Inverser sans échanger produit $-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq -1$, absurdité que le contrôle de l'exercice 4 démasque aussitôt.

La règle du produit, démontrée

RÉDACTION MODÈLE – QUESTIONS 1 À 3, LA CHAÎNE COMPLÈTE

Première inégalité. Multiplions l'inégalité $u \leq x$ par le nombre y . Or y est positif, puisque $0 \leq u' \leq y$. Multiplier les deux membres par un nombre strictement positif conserve le sens ; et si y est nul, les deux produits valent 0 et l'inégalité large reste vraie. Dans tous les cas,

$$uy \leq xy.$$

L'hypothèse utilisée est donc la **positivité de y** , et elle seule.

Deuxième inégalité. Multiplions cette fois l'inégalité $u' \leq y$ par le nombre u , qui est positif par hypothèse. Le même argument donne

$$uu' \leq uy.$$

Le chaînage. Nous disposons de $uu' \leq uy$ et de $uy \leq xy$. Ces deux inégalités s'enchaînent : les nombres $uy - uu'$ et $xy - uy$ sont positifs, donc leur somme $xy - uu'$ l'est aussi, ce qui signifie exactement

$$uu' \leq xy$$

MÉTHODE La seconde moitié est le miroir de la première : on remonte de xy vers vv' par deux multiplications et un chaînage.

4. Multiplions $x \leq v$ par y , positif : $xy \leq vy$. Multiplions ensuite $y \leq v'$ par v , positif puisque $0 \leq u \leq x \leq v$: $vy \leq vv'$. En enchaînant les deux, $xy \leq vv'$.
En réunissant avec la question 3 :

$$uu' \leq xy \leq vv' \text{ pour tous réels vérifiant les deux encadrements de l'énoncé}$$

5. Prenons $-3 \leq x \leq 1$ et $-3 \leq y \leq 1$, c'est-à-dire $u = u' = -3$ et $v = v' = 1$, puis $x = y = -3$.

Alors $xy = 9$ tandis que $vv' = 1 \times 1 = 1$. L'inégalité $xy \leq vv'$ s'écrit $9 \leq 1$, ce qui est faux : l'hypothèse de positivité est indispensable

COMMENTAIRES

Ce que l'exercice enseigne dépasse le résultat. Multiplier deux encadrements ne se fait *jamais* en une ligne : on ne multiplie que **deux membres d'une même inégalité**, par un nombre dont on connaît le signe, et la démonstration passe donc par un produit intermédiaire, uy , qui sert de relais. Le contre-exemple de la question 5 dit où la chose casse : deux nombres négatifs ont un produit positif. Quant au chaînage employé deux fois ici, il ne figure pas dans le cours et ne demande qu'une ligne, celle de la question 3.

III. ÉCRIRE UN INTERVALLE

EXERCICE 12 · APL-A2-12



Aller et retour

MÉTHODE Repérer les deux bornes et laquelle est la plus petite, décider pour chacune si elle est comprise, tourner le crochet en conséquence, puis relire.

Partie A.

- | | | |
|----------------------|----------------------|--------------------|
| 1. $] -5 ; 0[$ | 3. $] 0 ; +\infty[$ | 5. $] 2 ; 9]$ |
| 2. $[12 ; +\infty[$ | 4. $] -\infty ; -1[$ | 6. $[-0,5 ; 0,5]$ |

Partie B.

- | | |
|---|--|
| 7. Les réels supérieurs ou égaux à -3 et strictement inférieurs à 8 . | 10. Les réels strictement compris entre 0 et 1 . |
| 8. Les réels strictement inférieurs à 4 . | 11. Les réels strictement supérieurs à -1 et inférieurs ou égaux à 5 . |
| 9. Les réels supérieurs ou égaux à 7 . | 12. Un seul réel convient, et c'est 6 . |

Partie C. On sait que $-3 \leq x \leq 5$.

13. $1 \leq x + 4 \leq 9$, donc $x + 4 \in [1 ; 9]$
14. $-10 \leq -2x \leq 6$, puis $-9 \leq -2x + 1 \leq 7$, donc $-2x + 1 \in [-9 ; 7]$
15. $-1,5 \leq \frac{x}{2} \leq 2,5$, donc $\frac{x}{2} \in [-1,5 ; 2,5]$

COMMENTAIRES

Aux items 2 et 3, le mot compte : « au moins égal à » inclut la borne, « strictement positif » l'exclut, et 0 est un nombre positif. Aux items 2, 3, 4, 8 et 9, le crochet du côté de l'infini est **toujours** ouvert. L'item 12 n'est pas une farce : $[a ; b]$ avec $a = b$ ne contient que ce réel-là, et l'exercice 23 y reviendra. En partie C, les encadrements larges donnent des crochets fermés ; l'item 15 mérite un mot, car diviser par 2 , c'est multiplier par $\frac{1}{2}$, strictement positif : le sens est conservé et l'amplitude, divisée par deux, passe de 8 à 4 , seul cas de l'exercice où l'encadrement s'améliore en traversant le calcul.

EXERCICE 13 · APL-A2-13



Appartenir ou non

MÉTHODE Pour une racine carrée, comparer les carrés, ce qui est licite entre nombres positifs. Pour une fraction, comparer par le signe d'une différence, ou multiplier les deux membres par le dénominateur, qui est strictement positif.

1. $2,6^2 = 6,76 < 7$ et $2,7^2 = 7,29 > 7$, donc $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$: **oui**
2. $2,64^2 = 6,9696 < 7$ et $2,65^2 = 7,0225 > 7$, donc $2,64 < \sqrt{7} < 2,65$: **oui**
3. $3,141 \times 113 = 354,933 < 355$ et $3,142 \times 113 = 355,046 > 355$. En divisant par 113 , strictement positif, le sens est conservé : $3,141 < \frac{355}{113} < 3,142$, donc **oui**

4. $3,6^2 = 12,96 < 13$ et $3,7^2 = 13,69 > 13$, donc $3,6 < \sqrt{13} < 3,7$. En multipliant par -1 , le sens se renverse : $-3,7 < -\sqrt{13} < -3,6$, donc
5. $\frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{100 - 99}{300} = \frac{1}{300} > 0$ et $\frac{34}{100} - \frac{1}{3} = \frac{102 - 100}{300} = \frac{2}{300} > 0$, donc
6. La borne 0 est *exclue* de $]0; 1]$, donc
7. La question 1 a montré que $2,6 < \sqrt{7}$: le nombre n'appartient pas à $[2; 2,6]$. La question 2 a montré que $2,64 < \sqrt{7} < 2,65$: il appartient à $]2,64; 2,65[$. Or appartenir à une réunion, c'est appartenir à l'un **au moins** des deux ensembles :
8. L'intersection est l'ensemble des réels appartenant aux **deux** intervalles : $]0; 1] \cap [0; 1[=]0; 1[$, chaque borne étant exclue de l'un des deux. Comme 0 n'appartient pas à $]0; 1[$:

COMMENTAIRES

La question 4 est la seule à demander deux gestes : on encadre $\sqrt{13}$, puis on passe aux opposés, et c'est ce passage qui échange les rôles des deux bornes. Écrire directement $-3,6 < -\sqrt{13} < -3,7$ produit un encadrement absurde. Les items 7 et 8 fixent le vocabulaire du cours : le « ou » de la réunion se contente d'un seul des deux ensembles, le « et » de l'intersection les exige tous les deux, et c'est toute la différence entre leurs deux réponses.

EXERCICE 14 · APL-A2-14



Réunir, croiser, simplifier

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 2, CELLE OÙ LES DEUX INFINIS SE RÉPONDENT

Représentons les deux intervalles en bandes superposées sur une droite graduée : la bande de $I =]-\infty; 2]$ couvre tout jusqu'à 2 compris, celle de $J = [-1; +\infty[$ couvre tout depuis -1 compris. La zone couverte par les deux bandes à la fois va de -1 , compris dans les deux, à 2, compris dans les deux. La zone couverte par au moins une bande est la droite tout entière : tout réel est soit inférieur ou égal à 2, soit supérieur ou égal à -1 , et ceux de l'intersection sont les deux à la fois.

$$I \cap J = [-1; 2] \quad \text{et} \quad I \cup J =]-\infty; +\infty[$$

MÉTHODE Toujours le même dessin : deux bandes superposées, l'intersection est la zone couverte deux fois, la réunion la zone couverte au moins une fois, et chaque borne s'examine séparément.

1. $I \cap J = [1; 4]$ et $I \cup J = [-2; 6]$
3. Aucun réel n'appartient aux deux intervalles à la fois : l'intersection est **vide**. La réunion, elle, ne se simplifie pas : l'ensemble $[0; 1[\cup]3; 5]$ est troué entre 1 et 3, aucun jeu de crochets ne peut l'écrire d'un seul tenant, et on le laisse tel quel.

Partie B.

4. Les deux intervalles se chevauchent sur $[3; 5]$: $[1; 5] \cup [3; 8] = [1; 8]$
5. $[0; 4] \cap [2; 7[= [2; 4]$
6. Tout réel est dans l'un ou l'autre : $] -\infty; 3] \cup [1; +\infty[=] -\infty; +\infty[$
7. Le seul réel commun est 6 : $[2; 6] \cap [6; 9] = [6; 6]$, l'intervalle réduit à un réel rencontré à l'exercice 12.
8. La borne 3, exclue du premier morceau, est comprise dans le second : la réunion ne saute aucun réel entre 1 et 7. $]1; 3[\cup [3; 7] =]1; 7]$

COMMENTAIRES

L'erreur qui guette est la confusion des deux symboles : écrire $[1; 5] \cup [3; 8] = [3; 5]$, c'est avoir calculé l'intersection en croyant réunir. Le dessin des bandes rend cette confusion impossible, et c'est pourquoi la méthode du cours commence par lui. Seconde leçon, au 3 et au 8 : une réunion ne se recolle en un seul intervalle que si les morceaux se touchent ou se chevauchent, et la borne charnière décide de tout.

EXERCICE 15 · APL-A2-15

★★★ ■

D'une inégalité à l'autre

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 2, LE « OU » QUI FABRIQUE DEUX MORCEAUX

Les réels vérifiant $x \leq 2$ forment l'intervalle $]-\infty; 2]$. Ceux vérifiant $x > 5$ forment l'intervalle $]5; +\infty[$.

Le mot « ou » réunit : un réel convient dès qu'il satisfait l'une au moins des deux conditions.

l'ensemble cherché est $]-\infty; 2] \cup]5; +\infty[$

Aucune écriture plus simple n'existe : un réel comme 3 ne satisfait aucune des deux conditions, l'ensemble est donc troué entre 2 et 5, et le symbole $\cup$ est fait pour cela.

MÉTHODE Le « et » croise les conditions, le « ou » les réunit ; une droite graduée par item, et chaque borne s'examine séparément.

1. Les deux conditions se croisent : $]-1; 3]$

3. Tout réel strictement négatif est déjà inférieur ou égal à 4 : la première condition est **contenue** dans la seconde, et le « ou » n'ajoute rien. $]-\infty; 4]$

4. Un réel inférieur ou égal à 4 ne peut pas être supérieur ou égal à 6 : aucun réel ne satisfait les deux conditions à la fois. $\text{l'ensemble est vide}$

Partie B.

5. $x < 0$ ou $x \geq 2$

6. Les bandes superposées donnent $[-3; 1] \cap]0; 5] =]0; 1]$, donc $0 < x \leq 1$

COMMENTAIRES

Le « ou » des mathématiques n'additionne pas les exigences, il les *offre* : plus on ajoute de conditions par « ou », plus l'ensemble grossit, quand le « et » le rétrécit. L'item 3 le montre par l'absorption, l'item 4 par le vide, et l'item 6 rappelle qu'avant de traduire, on simplifie. Ce jeu de traductions est exactement celui que les inéquations d'A3 demanderont dans l'autre sens.

Quatre contraintes, un seul intervalle

MÉTHODE Traduire chaque contrainte séparément, sans chercher à les combiner ; deux d'entre elles ne bornent que d'un côté. Le décompte final ne se fait pas par soustraction seule : les deux bornes sont comprises.

1. Notons n le nombre de personnes. La *capacité réglementaire* impose $n \leq 120$ et ne dit rien par en bas, soit $n \in]-\infty ; 120]$. Le *contrat* impose $n \geq 45$ et ne dit rien par en haut, soit $n \in [45 ; +\infty[$. Les *tables* offrent au plus $13 \times 8 = 104$ couverts, soit $n \in]-\infty ; 104]$. Le *budget* impose $18n \leq 1800$; en divisant les deux membres par 18, strictement positif, il vient $n \in]-\infty ; 100]$.

2. Appartenir aux quatre intervalles à la fois, c'est appartenir à leur intersection :

$$n \in]-\infty ; 120] \cap [45 ; +\infty[\cap]-\infty ; 104] \cap]-\infty ; 100]$$

3. Le nombre n doit être supérieur ou égal à 45, et inférieur ou égal au plus petit des trois nombres 120, 104 et 100.

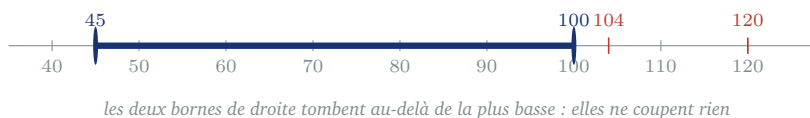
$$n \in [45 ; 100]$$

4. Les entiers de 45 à 100 sont au nombre de $100 - 45 + 1 = 56$

5. Tout nombre inférieur ou égal à 100 est automatiquement inférieur à 104 et à 120 : ces deux bornes sont moins exigeantes que le budget.

le budget rend inutiles la capacité et les tables

Sur le support de travail, on colorie chaque couloir depuis le bord de l'axe jusqu'à la borne de sa contrainte : vers la gauche pour la capacité, les tables et le budget, vers la droite pour le contrat. Le dernier couloir ne retient que la portion coloriée dans les quatre autres à la fois, de 45 à 100.



COMMENTAIRES

Mettre des contraintes en commun, c'est calculer une intersection, et la question 2 le fait désormais écrire avec son symbole : réduire l'écriture, c'est prendre la **plus grande** des bornes inférieures et la **plus petite** des bornes supérieures, et ce geste vaudra encore pour les systèmes d'inéquations. Le décompte de la question 4, lui, cache une erreur universelle : de 45 à 100 il y a 55 intervalles d'une unité, mais 56 entiers.

IV. CERNER, TRONQUER, ARRONDIR

EXERCICE 17 · APL-A2-17



Couper ou approcher

MÉTHODE Poser la division, écrire quatre décimales, puis couper pour la troncature et regarder de quelle borne on est le plus proche pour l'arrondi.

	à 10^{-1}		à 10^{-2}		à 10^{-3}	
	tronc.	arr.	tronc.	arr.	tronc.	arr.
$\frac{7}{6} = 1,1666\dots$	1,1	1,2	1,16	1,17	1,166	1,167
$\frac{4}{7} = 0,5714\dots$	0,5	0,6	0,57	0,57	0,571	0,571
$\sqrt{6} = 2,4494\dots$	2,4	2,4	2,44	2,45	2,449	2,449
$\frac{1}{8} = 0,125$	0,1	0,1	0,12	0,13	0,125	0,125

RÉDACTION MODÈLE – LES DEUX QUESTIONS QUE POSE $\frac{1}{8}$

À 10^{-2} : l'égalité des distances. Le nombre $\frac{1}{8} = 0,125$ est pris entre les deux décimaux consécutifs 0,12 et 0,13. Or

$$0,125 - 0,12 = 0,005 \quad \text{et} \quad 0,13 - 0,125 = 0,005.$$

Les deux distances sont **égales** : aucune des deux bornes n'est « la plus proche », et la définition de l'arrondi ne suffit plus à trancher. C'est une convention qui décide, et le cours l'énonce : en cas d'égalité des distances, on retient la **borne supérieure**.

Donc l'arrondi de $\frac{1}{8}$ à 10^{-2} vaut 0,13

À 10^{-3} : le nombre est lui-même décimal. Ici $\frac{1}{8} = 0,125$ possède exactement trois décimales. Il n'est donc pris *entre* aucune paire de décimaux consécutifs à trois décimales : il en est un.

Couper son écriture après la troisième décimale n'efface rien, et la borne la plus proche est le nombre lui-même, à distance nulle.

la troncature et l'arrondi de $\frac{1}{8}$ à 10^{-3} valent tous deux 0,125

COMMENTAIRES

Les deux questions sont de nature différente, et l'énoncé le disait. La première est une **convention** : rien dans les mathématiques n'oblige à monter plutôt qu'à descendre, il fallait choisir, et on a choisi. La seconde est un **fait** : quand le nombre est déjà décimal au rang demandé, les deux opérations ne le déplacent plus. À retenir aussi de la ligne de $\sqrt{6}$: troncature et arrondi y coïncident deux fois sur trois et diffèrent au rang du milieu, car ce n'est pas le rang qui décide, c'est la décimale suivante.

Deux racines, puis leur somme

MÉTHODE Comparer les carrés, ce qui est licite entre nombres positifs, puis additionner et soustraire les encadrements en passant, pour la différence, par l'opposé.

1. $3,3^2 = 10,89 < 11 < 11,56 = 3,4^2$, donc $3,3 < \sqrt{11} < 3,4$

$3,31^2 = 10,9561 < 11 < 11,0224 = 3,32^2$, donc $3,31 < \sqrt{11} < 3,32$

2. $5,4^2 = 29,16 < 30 < 30,25 = 5,5^2$, donc $5,4 < \sqrt{30} < 5,5$

$5,47^2 = 29,9209 < 30 < 30,0304 = 5,48^2$, donc $5,47 < \sqrt{30} < 5,48$

3. En additionnant les deux encadrements à 10^{-2} , qui sont de même sens : $3,31 + 5,47 = 8,78$ et $3,32 + 5,48 = 8,80$, donc $8,78 < \sqrt{11} + \sqrt{30} < 8,80$, d'amplitude $0,02$

4. L'encadrement de $\sqrt{11}$ donne, en passant aux opposés, $-3,32 < -\sqrt{11} < -3,31$. En l'additionnant à celui de $\sqrt{30}$: $5,47 - 3,32 = 2,15$ et $5,48 - 3,31 = 2,17$, donc $2,15 < \sqrt{30} - \sqrt{11} < 2,17$, d'amplitude $0,02$

5. Les deux amplitudes sont égales, et elles valent la **somme** des deux amplitudes de départ, $0,01 + 0,01$.

les imprécisions s'ajoutent, que le calcul additionne ou qu'il soustraie

COMMENTAIRES

C'est le point de l'exercice, et il déjoue une intuition tenace : on imagine volontiers qu'une soustraction *efface* une partie de l'imprécision, comme si les deux erreurs se compensaient. Elles ne le font jamais, parce qu'on ne sait pas de quel côté chacune se trompe. Le passage aux opposés le rend visible : la borne inférieure de la différence associe la plus petite valeur de $\sqrt{30}$ à la plus grande de $\sqrt{11}$, et ces deux écarts vont dans le même sens. Vérification de bon sens : $\sqrt{11} \approx 3,3166$ et $\sqrt{30} \approx 5,4772$, donc la somme vaut environ 8,794 et la différence environ 2,161, toutes deux dans les encadrements obtenus.

Combien de décimales ?

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 3, CELLE QUI DISTINGUE VRAIMENT LES DEUX OPÉRATIONS

On sait seulement que $2,3975 \leq x \leq 2,4015$.

La troncature ne peut pas être donnée. La troncature à 10^{-2} vaut 2,39 pour tous les nombres compris entre 2,39 et 2,40, et 2,40 à partir de 2,40. Or notre encadrement contient des nombres des deux sortes :

$$x = 2,3975 \text{ donnerait } 2,39, \quad x = 2,4015 \text{ donnerait } 2,40.$$

La troncature n'est donc pas déterminée par l'encadrement.

L'arrondi, si. L'arrondi à 10^{-2} vaut 2,40 pour tous les nombres situés à moins de 0,005 de 2,40, c'est-à-dire pour tous les nombres compris entre 2,395 et 2,405, la première borne comprise et la seconde exclue.

Or notre encadrement tout entier tient à l'intérieur de cette plage :

$$2,395 < 2,3975 \quad \text{et} \quad 2,4015 < 2,405.$$

Toutes les valeurs permises de x ont donc le même arrondi.

l'arrondi de x à 10^{-2} vaut 2,40, et sa troncature n'est pas déterminée

D'où vient la différence. La troncature change de valeur en 2,40, et notre encadrement est justement à cheval sur ce nombre. L'arrondi, lui, change de valeur en 2,395 et en 2,405, c'est-à-dire aux *milieux* : nos données en sont loin.

MÉTHODE L'amplitude d'un encadrement à 10^{-n} près vaut exactement 10^{-n} : c'est la définition du cours.

1. À 10^{-3} près, l'amplitude vaut 0,001 ; à 10^{-5} près, elle vaut 0,00001
2. Un millimètre vaut 0,001 mètre, donc un encadrement à 10^{-3} près suffit

COMMENTAIRES

La leçon est plus large que l'exercice. L'arrondi est **plus robuste** que la troncature : il tient encore quand la donnée est un peu floue, parce que ses points de rupture tombent loin des valeurs usuelles, aux milieux. La troncature, elle, rompt exactement là où l'on travaille le plus souvent, aux nombres ronds. C'est déjà la morale de la Bourse de Vancouver, sous un autre jour, et l'exercice 29 la chiffrera.

EXERCICE 20 · APL-A2-20

★★★ ■

Ce que devient l'imprécision

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1, CELLE OÙ UNE BORNE EST EXCLUE

Dire que a vaut 4,2 arrondi au dixième, c'est dire que 4,2 est celui des décimaux à une décimale qui est le plus proche de a .

La borne inférieure. Le nombre 4,15 est à égale distance de 4,1 et de 4,2. La convention du cours retient alors la borne supérieure, soit 4,2 : la valeur 4,15 s'arrondit donc bien en 4,2, et elle est **comprise**.

La borne supérieure. Le nombre 4,25 est à égale distance de 4,2 et de 4,3. La même convention retient cette fois 4,3 : la valeur 4,25 ne s'arrondit pas en 4,2, et elle est **exclue**.

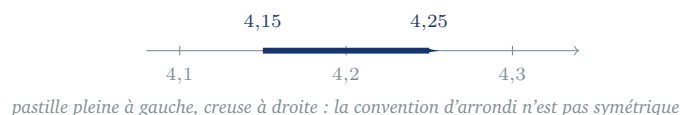
L'encadrement est donc semi-ouvert :

$$4,15 \leq a < 4,25$$

Les deux autres mesures se traitent mot pour mot de la même façon :

$$7,75 \leq b < 7,85 \quad \text{et} \quad 2,45 \leq c < 2,55$$

Sur le support de travail, on hachure donc, pour chaque axe, la moitié d'intervalle située de part et d'autre de la mesure affichée, avec une extrémité pleine à gauche et une extrémité creuse à droite : les bornes tombent entre deux graduations, à mi-chemin.



MÉTHODE Additionner les encadrements de même sens ; pour la soustraction, passer d'abord à l'opposé, ce qui échange aussi le côté où la borne est atteinte.

2. $4,15 + 7,75 + 2,45 = 14,35$ et $4,25 + 7,85 + 2,55 = 14,65$, donc $14,35 \leq a + b + c < 14,65$, d'amplitude $0,3$

3. L'encadrement de c donne, en passant aux opposés, $-2,55 < -c \leq -2,45$. En l'ajoutant aux deux autres : $9,35 < a + b - c < 9,65$, d'amplitude $0,3$

On notera que la borne inférieure est devenue stricte : c'est l'opposé de c qui a emporté avec lui son extrémité exclue.

4. La somme des trois valeurs affichées vaut bien 14,5, mais l'encadrement obtenu autorise tout nombre de 14,35 à 14,65. L'écart maximal entre la vraie valeur et 14,5 vaut donc $0,15$

Or 0,15 dépasse largement 0,05 : le dixième de la somme n'est pas garanti. Annoncer 14,5 affiche une décimale que les données ne permettent pas.

on ne peut pas annoncer 14,5 : la vraie valeur peut s'en écarter de 0,15

5. Chaque mesure apporte une amplitude de 0,1, et les amplitudes s'ajoutent : n mesures donnent une amplitude de $0,1n$. Il faut $0,1n > 1$, c'est-à-dire $n > 10$, donc 11 mesures

COMMENTAIRES

Trois mesures au dixième, et le dixième de leur somme est déjà perdu : c'est le résultat le plus utile du chapitre pour la physique et pour la technologie. Une somme n'est jamais plus précise que ses termes, et elle est toujours moins précise que chacun d'eux.

La question 3 réserve une finesse rare : les crochets voyagent. En passant à l'opposé, la borne exclue de c devient la borne exclue inférieure de $a + b - c$. Le sens de l'inégalité n'est pas la seule chose que le renversement retourne.

EXERCICE 21 · THE-A2-21

★★★★ ♦

Les carrés, version stricte

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1, L'ÉQUIVALENCE STRICTE ET SON CAS PARTICULIER

Soient u et v deux réels positifs. La différence de leurs carrés se factorise :

$$v^2 - u^2 = (v - u)(v + u).$$

Premier sens. Supposons $u < v$. Alors $v - u$ est strictement positif. De plus v est strictement positif, puisqu'il dépasse u qui est positif ; donc $v + u$ est strictement positif, comme somme d'un nombre strictement positif et d'un nombre positif.

Le produit de deux nombres strictement positifs est strictement positif, donc $v^2 - u^2 > 0$, c'est-à-dire $u^2 < v^2$.

Second sens. Supposons $u^2 < v^2$, c'est-à-dire $(v - u)(v + u) > 0$.

Le cas où $u + v$ est nul. Comme u et v sont positifs et de somme nulle, ils sont tous deux nuls. Mais alors $(v - u)(v + u) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Ce cas ne peut donc pas se produire.

Le cas restant. Le nombre $v + u$ est donc strictement positif. Un produit strictement positif dont l'un des facteurs est strictement positif a son autre facteur strictement positif : donc $v - u > 0$, c'est-à-dire $u < v$.

Les deux sens étant établis,

pour deux réels positifs u et v , dire $u < v$ revient à dire $u^2 < v^2$

MÉTHODE Pour la question 3, chercher d'abord un contre-exemple ; il indiquera de lui-même l'énoncé de remplacement.

2. La positivité sert exactement deux fois, et les deux endroits sont différents. Dans le premier sens, elle assure que $v + u$ est strictement positif, ce qui permet de conclure sur le signe du produit. Dans le second sens, elle permet d'écarter le cas $u + v = 0$, sans quoi $v + u$ pourrait être strictement négatif et le raisonnement s'inverser.

3. Non. Avec $u = -3$ et $v = -1$, on a bien $u < v$, alors que $u^2 = 9$ et $v^2 = 1$: c'est $v^2 < u^2$.

L'énoncé de remplacement est le suivant : pour deux réels négatifs u et v , dire $u < v$ revient à dire $v^2 < u^2$.

La démonstration est la même, au signe près. Supposons $u < v \leq 0$. Alors $v - u > 0$, et u est strictement négatif tandis que v est négatif, donc $v + u$ est strictement négatif. Le produit $(v - u)(v + u)$ est donc strictement négatif, c'est-à-dire $v^2 < u^2$.

Réciproquement, supposons $v^2 < u^2$, toujours avec u et v négatifs. Alors le produit $(v - u)(v + u)$ est strictement négatif, donc aucun des deux facteurs n'est nul. En particulier $u + v \neq 0$, et comme u et v sont tous deux négatifs, $u + v$ est strictement négatif. Le produit étant négatif et l'un des facteurs négatif, l'autre est strictement positif : $v - u > 0$, c'est-à-dire $u < v$.

chez les négatifs, la comparaison des carrés se fait dans l'ordre inverse

COMMENTAIRES

Le cas $u + v = 0$ n'est pas une coquetterie de rédaction. Sans lui, le second sens est *incomplet* : on divise, en pensée, par un nombre dont on n'a pas vérifié qu'il est non nul, exactement comme la clause de positivité de la règle des inverses à l'exercice 10. Réunis, les deux énoncés disent au fond une chose simple : élever au carré conserve l'ordre à droite de zéro et le renverse à gauche, et la fonction carré en donnera la courbe.

V. DISTANCES ET RUBANS

EXERCICE 22 · APL-A2-22



Valeurs absolues et distances

MÉTHODE Une valeur absolue est une distance à l'origine ; $|x - a|$ est la distance entre les points d'abscisses x et a , et l'ordre d'écriture ne change rien. En partie C, toujours le signe d'abord, et il se justifie : pour les racines, on compare les carrés, ce qui est licite entre nombres positifs.

Partie A.

1. $\boxed{|-9| = 9}$

2. $\boxed{|0| = 0}$

3. $\boxed{|3 - 11| = 8}$

4. $\boxed{|11 - 3| = 8}$

Partie B.

5. $|-7 - (-2)| = |-5|$, donc $\boxed{5}$

6. $|0 - (-6,5)| = |6,5|$, donc $\boxed{6,5}$

7. $\left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{1}{6}\right|$, donc $\boxed{\frac{1}{6}}$

Partie C.**RÉDACTION MODÈLE – QUESTIONS 9 ET 11, LES DEUX QUI DÉCIDENT DU SIGNE AUTREMENT**

Question 9. Déterminons le signe de $1 - \sqrt{2}$. Les deux nombres 1 et $\sqrt{2}$ sont positifs : nous pouvons comparer leurs carrés, qui valent 1 et 2. Comme $1 < 2$, on en déduit $1 < \sqrt{2}$, donc $1 - \sqrt{2}$ est strictement négatif.

Nous sommes dans le second cas de la méthode : il faut changer le signe de l'expression tout entière.

$$\boxed{|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1}$$

Question 11. L'expression $-3 - \sqrt{2}$ est une somme de deux nombres strictement négatifs, -3 et $-\sqrt{2}$: elle est strictement négative, sans qu'aucun calcul soit nécessaire.

Nous sommes de nouveau dans le second cas : il faut changer le signe de l'expression **tout entière**, et non de son seul premier terme.

$$|-3 - \sqrt{2}| = -(-3 - \sqrt{2}) = 3 + \sqrt{2}.$$

Vérification. Le résultat obtenu est bien positif, comme doit l'être toute valeur absolue, et il vaut environ 4,41.

$$\boxed{|-3 - \sqrt{2}| = 3 + \sqrt{2}}$$

8. $\pi > 3$, donc $\boxed{|\pi - 3| = \pi - 3}$

10. $6 < 7$ donne $\sqrt{6} < \sqrt{7}$, donc $\boxed{|\sqrt{6} - \sqrt{7}| = \sqrt{7} - \sqrt{6}}$

COMMENTAIRES

Les items 3 et 4 donnent le même résultat, et c'est la propriété du cours : une distance ne dépend pas de l'ordre dans lequel on écrit les deux nombres. L'exercice 24 la démontrera. L'item 5 piège par l'écriture : il faut $-7 - (-2)$, avec ses deux signes, et non $-7 - 2$, faute de quoi la distance est comptée deux fois trop grande. En partie C, la question 11 est celle où l'erreur est presque irrésistible : on lit $-3 - \sqrt{2}$, on voit un signe moins devant le 3, et l'on écrit $3 - \sqrt{2}$. C'est faux, et le contrôle le dit tout de suite : $3 - \sqrt{2}$ vaut environ 1,59, alors que la distance de $-3 - \sqrt{2}$ à l'origine dépasse 4. **Le signe moins se distribue sur toute l'expression**, parenthèses comprises ; le signe se *justifie*, il ne se devine jamais.

Rubans dans les deux sens

MÉTHODE Dans un sens, lire le centre et le rayon et écrire les deux bornes ; dans l'autre, le centre est la moyenne des bornes et le rayon la moitié de leur différence. La vérification consiste à retrouver le rayon comme distance de chaque borne au centre.

Partie A.

1. Centre 7, rayon 2 : $[5; 9]$

2. On récrit $|x + 3| = |x - (-3)|$: le centre vaut -3 et le rayon 1,5, donc $[-4,5; -1,5]$

3. Centre 0,5, rayon 0,25 : $[0,25; 0,75]$

Partie B.

4. Centre $\frac{1+11}{2} = 6$, rayon $\frac{11-1}{2} = 5$, donc $|x - 6| \leq 5$

5. Centre $\frac{-8+(-2)}{2} = -5$, rayon $\frac{-2-(-8)}{2} = 3$, donc $|x + 5| \leq 3$

6. Centre $\frac{2,4+3,6}{2} = 3$, rayon $\frac{3,6-2,4}{2} = 0,6$, donc $|x - 3| \leq 0,6$

Partie C. Quel que soit le réel x , le nombre $|x - a|$ est positif : l'inégalité $|x - a| \leq 0$ ne peut donc être satisfaite que si $|x - a| = 0$. Or une valeur absolue est nulle lorsque son contenu l'est, et dans ce seul cas.

le seul réel vérifiant $|x - a| \leq 0$ est $x = a$

COMMENTAIRES

La question 2 est celle qui coûte le plus de points de toute la partie V, et son remède tient en une ligne : **une valeur absolue ne montre son centre que sous forme de différence**. On récrit donc $|x + 3|$ en $|x - (-3)|$ avant toute chose, et le centre -3 se lit alors sans effort. Le lire 3 déplace le ruban de six unités. La partie C n'est pas davantage une curiosité : le ruban de rayon nul est réduit à son centre, et cela prolonge exactement l'intervalle $[6; 6]$ rencontré à l'exercice 12.

Deux symétries et un produit

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1, LA DISJONCTION DES CAS

Soit x un réel. Trois cas se présentent, et ils recouvrent toutes les possibilités.

Cas x strictement positif. Alors $|x| = x$ par définition. Par ailleurs $-x$ est strictement négatif, donc $|-x| = -(-x) = x$. Les deux valeurs coïncident.

Cas x nul. Alors $-x$ est nul lui aussi, et les deux valeurs absolues valent 0.

Cas x strictement négatif. Alors $|x| = -x$ par définition. Par ailleurs $-x$ est strictement positif, donc $|-x| = -x$. Les deux valeurs coïncident de nouveau.

Les trois cas donnent la même conclusion, donc

$$|-x| = |x| \text{ pour tout réel } x$$

MÉTHODE Les trois questions suivantes se ramènent à la première ou reprennent sa méthode, la disjonction des cas.

2. Le nombre $a - x$ est l'opposé de $x - a$. En appliquant la question 1 au réel $x - a$:

$$|a - x| = |-(x - a)| = |x - a|.$$

Donc $|x - a| = |a - x|$ quels que soient les réels x et a

3. Si x est positif, $|x| = x$ est positif. Si x est strictement négatif, $|x| = -x$ est strictement positif. Dans les deux cas, $|x|$ est positif pour tout réel x

Pour la nullité : si x est nul, $|x| = 0$. Réciproquement, si $|x| = 0$, le second cas ci-dessus est exclu puisqu'il donne une valeur strictement positive ; on est donc dans le premier, où $|x| = x$, d'où $x = 0$.

4. Si x ou y est nul, les deux membres valent 0. Sinon, quatre cas :

signes de x et y	signe de xy	la valeur absolue $ xy $	le produit $ x \times y $
$x > 0$ et $y > 0$	positif	xy	$x \times y = xy$
$x > 0$ et $y < 0$	négatif	$-xy$	$x \times (-y) = -xy$
$x < 0$ et $y > 0$	négatif	$-xy$	$(-x) \times y = -xy$
$x < 0$ et $y < 0$	positif	xy	$(-x) \times (-y) = xy$

Les deux dernières colonnes coïncident ligne à ligne, donc

$$|xy| = |x| \times |y| \text{ quels que soient les réels } x \text{ et } y$$

COMMENTAIRES

La disjonction des cas est l'outil de tout le paragraphe 3, et le cours l'a déjà employée pour établir que $\sqrt{a^2} = |a|$. Sa règle d'emploi est une règle de discipline : les cas doivent **recouvrir** toutes les situations, sans trou. C'est pour cela que le cas $x = 0$ est traité, ici, à part.

La question 4 mérite un regard de côté : la valeur absolue se comporte parfaitement avec le *produit*, et pas du tout avec la *somme*. C'est tout l'objet du défi laissé en marge du cours, comparer $|a + b|$ à $|a| + |b|$.

EXERCICE 25 · SYN-A2-25

★★★★★ ♦

Le diapason

MÉTHODE Toute tolérance s'écrit comme un ruban : centre la valeur visée, rayon l'écart toléré. La question 5 croise ce ruban avec un second, celui de l'affichage.

1. $|f - 440| \leq 0,5$

2. $f \in [439,5 ; 440,5]$

3. $|439,6 - 440| = 0,4$ et $|440,4 - 440| = 0,4$, tous deux inférieurs à 0,5 ; $|440,55 - 440| = 0,55$, qui dépasse 0,5. Donc les deux premiers sont conformes, le troisième ne l'est pas

4. Centre $\frac{439,7 + 440,3}{2} = 440$, rayon $\frac{440,3 - 439,7}{2} = 0,3$, donc la garantie s'écrit $|f - 440| \leq 0,3$

Le rayon 0,3 est plus petit que 0,5 : le ruban de l'atelier est contenu dans celui de la norme. La garantie est donc plus exigeante que la norme

5. L'affichage 440,5 signifie que la fréquence, arrondie au dixième, vaut 440,5. Par la convention du cours, cela donne

$$440,45 \leq f < 440,55.$$

La conformité exige $f \leq 440,5$. Les deux conditions sont compatibles : toute fréquence comprise entre 440,45 et 440,5 les satisfait à la fois, par exemple 440,48. Mais elles ne s'impliquent pas : 440,52 s'affiche aussi 440,5 et n'est pas conforme.

un diapason affiché à 440,5 peut être conforme, sans que l'affichage le prouve

6. Un réel f échappe à la condition $|f - 440| \leq 0,5$ lorsque sa distance à 440 dépasse strictement 0,5 : soit $f < 439,5$, soit $f > 440,5$. C'est tout ce qui se trouve *hors* du ruban, un morceau de chaque côté.

$$f \in]-\infty; 439,5[\cup]440,5; +\infty[$$

COMMENTAIRES

La question 5 fait se croiser les deux idées du chapitre, et c'est pour cela qu'elle clôt la partie. La tolérance est un ruban autour de la valeur visée ; l'affichage arrondi est un second ruban, autour de la valeur lue. Décider de la conformité, c'est regarder si le second tient dans le premier, et ici il déborde. La conséquence est pratique : pour trancher, il faut un appareil plus précis que la tolérance qu'on contrôle. Un accordeur au dixième ne peut pas vérifier une norme au demi-hertz près sur ses cas limites, et c'est le problème quotidien de tout atelier de métrologie. La question 6, enfin, retourne le ruban comme un gant : l'intérieur d'un ruban est un intervalle, son extérieur est une **réunion** de deux intervalles non bornés, et les inégalités strictes y répondent aux inégalités larges.

VI. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 26 · APR-A2-26

★★★ ◆

Les cales de Johansson

MÉTHODE Compter le nombre de pas, puis y ajouter un : le comptage des longueurs est le même que celui des exercices 16 et 20. La question 5 demande de compter des empilements, et non des blocs.

1. Pour aller de 0,5 à 300 millimètres, on parcourt 299,5 millimètres par pas de 0,01 millimètre, soit $299,5 \div 0,01 = 29\,950$ pas. Une chaîne de 29 950 pas relie une longueur de plus, la première ne coûtant aucun pas :

le jeu compose 29 951 longueurs différentes

2. 0,01 millimètre, soit un centième de millimètre.

3. La cote 47,382 n'est pas un multiple du centième : elle tombe entre deux longueurs composables consécutives.

$$47,38 < 47,382 < 47,39$$

4. La longueur composable la plus proche est 47,38, à 0,002 millimètre de la cote voulue, contre 0,008 pour 47,39.

Dans le pire des cas, la cote tombe au milieu de deux longueurs composables : l'écart vaut alors la moitié du pas.

l'atelier ne s'écarte jamais de plus de 0,005 millimètre

5. On n'utilise pas les blocs un par un : on les **empile**, et c'est le nombre d'empilements qui compte, non le

nombre de blocs. Le jeu est organisé par tranches, chacune réglant un rang de l'écriture décimale : une tranche pour les centièmes et les dixièmes, une pour les unités, une pour les dizaines. Chaque bloc éteint un rang de la cote.

Ainsi la cote de la question 3 s'obtient en trois blocs :

$$47,38 = 40 + 6 + 1,38.$$

cent deux blocs suffisent parce qu'on les combine, et non parce qu'on les compte

COMMENTAIRES

L'erreur de la question 1 a un nom, l'erreur du poteau de clôture : cent mètres de clôture avec un poteau tous les dix mètres, ce sont onze poteaux et non dix. Le remède est un contrôle sur un cas minuscule, de 0,50 à 0,52, où il y a deux pas et trois longueurs.

La question 4 dit à elle seule pourquoi ce jeu a changé l'industrie : une cote quelconque est atteinte à cinq millièmes de millimètre près, avec cent deux morceaux d'acier et aucun instrument de mesure. Ce n'est pas une mesure, c'est un **étalon** : on ne lit pas la longueur, on la compose.

EXERCICE 27 · SYN-A2-27



Combien de décimales de π ?

RÉDACTION MODÈLE – QUESTIONS 1 ET 3, MAJORER, PUIS INVERSER LA QUESTION

L'erreur sur la circonférence. La circonférence d'un cercle de rayon R vaut $2\pi R$. En remplaçant π par un nombre p , l'erreur commise vaut

$$|2pR - 2\pi R| = 2R \times |p - \pi|,$$

en sortant le facteur positif $2R$ de la valeur absolue, ce qu'autorise la propriété $|xy| = |x| \times |y|$ démontrée à la question 4 de l'exercice 24. Une erreur sur π est donc multipliée par $2R$, et par rien d'autre.

Voyager 1. Ici $R = 2,6 \times 10^{10}$ kilomètres et $|p - \pi| < 10^{-15}$. Donc l'erreur est majorée par

$$2 \times 2,6 \times 10^{10} \times 10^{-15} = 5,2 \times 10^{-5} \text{ kilomètre.}$$

Un kilomètre valant 100 000 centimètres, cela fait $5,2 \times 10^{-5} \times 10^5$ centimètres.

l'erreur sur la circonférence ne dépasse pas 5,2 centimètres

L'univers observable. La question s'inverse : on se donne l'erreur tolérée et l'on cherche le nombre de décimales.

Avec n décimales de π , l'écart $|p - \pi|$ ne dépasse pas 10^{-n} . L'erreur sur la circonférence est donc majorée par

$$2 \times 4,4 \times 10^{23} \times 10^{-n} = 8,8 \times 10^{23-n} \text{ kilomètres.}$$

On veut que ce nombre reste inférieur à 10^{-13} kilomètre, le diamètre d'un atome d'hydrogène.

Essayons les valeurs de n :

pour $n = 36$, la majoration vaut $8,8 \times 10^{-13}$, qui dépasse 10^{-13} ;

pour $n = 37$, elle vaut $8,8 \times 10^{-14}$, qui est bien inférieur à 10^{-13} .

37 décimales de π suffisent, et 36 ne suffisent pas

MÉTHODE Pour la question 2, refaire le même calcul sur un diamètre, puis comparer la majoration obtenue à l'erreur réellement commise.

2. La circonférence d'un cercle de diamètre D vaut πD : l'erreur y est multipliée par D et non par $2R$. Avec $D = 6,4 \times 10^{10}$ kilomètres, elle est majorée par

$$6,4 \times 10^{10} \times 10^{-15} = 6,4 \times 10^{-5} \text{ kilomètre, soit } \boxed{6,4 \text{ centimètres}}$$

Le laboratoire annonce environ 1,5 centimètre, soit un peu plus de quatre fois moins. L'écart vient de ce que nous avons **majoré**. En retenant 15 décimales, on ne commet pas une erreur de 10^{-15} : on en commet une bien plus petite. Les décimales suivantes de π commencent par 238... , si bien que l'erreur réelle vaut environ $2,4 \times 10^{-16}$, soit à peu près le quart de notre majoration. En reprenant le calcul avec cette valeur, on retombe sur 1,5 centimètre.

la majoration est vraie, mais quatre fois trop généreuse

4. Notre calcul donne 37, et non 40 : trois décimales de trop, pour le plus grand cercle qui ait un sens physique et à la précision d'un atome.

COMMENTAIRES

Une majoration n'est pas une valeur : elle dit « pas plus que », et jamais « exactement », et c'est toute la différence entre les questions 1 et 2. Elle reste vraie quand elle est généreuse, ce qui est même sa qualité principale : elle ne demande à connaître ni la seizième décimale de π , ni aucune des suivantes.

Le résultat de la question 3 vaut d'être médité. Trente-sept décimales suffisent à mesurer l'univers entier à l'atome près ; toutes celles qu'on calcule au-delà, et l'on en connaît des dizaines de milliers de milliards, ne mesurent plus rien.

EXERCICE 28 · APR-A2-28

★★★★ ☆

Archimède et les quatre-vingt-seize côtés

MÉTHODE Les questions 1 et 2 sont géométriques, les quatre suivantes sont un exercice d'encadrement : ce qu'un encadrement garantit se lit sur son amplitude et sur ses deux écritures décimales.

1. Chaque côté du polygone inscrit est un segment joignant deux points du cercle, tandis que l'arc de cercle qui relie ces deux mêmes points fait un détour : le segment est plus court. En additionnant sur les n côtés, $p_n < \pi$.

Le polygone circonscrit, lui, contient le cercle tout entier. Archimède admet, comme un principe, qu'un contour convexe qui en entoure un autre est le plus long des deux : d'où $\pi < P_n$.

$$p_n < \pi < P_n \text{ pour tout nombre de côtés } n \geq 3$$

2. Le cercle a pour diamètre 1, donc pour rayon $\frac{1}{2}$. Le côté de l'hexagone régulier inscrit est égal à ce rayon, et l'hexagone a six côtés :

$$p_6 = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

Dès l'hexagone, Archimède sait donc que $\pi > 3$.

3. $\frac{22}{7} - \frac{223}{71} = \frac{22 \times 71 - 223 \times 7}{7 \times 71} = \frac{1562 - 1561}{497}$, donc l'amplitude vaut $\frac{1}{497}$

4. Posons les deux divisions : $\frac{223}{71} = 3,1408\dots$ et $\frac{22}{7} = 3,1428\dots$. Les deux écritures commencent par 3,14, puis divergent à la troisième décimale, 0 contre 2.

les deux bornes ont deux décimales en commun, 1 et 4

5. L'encadrement donne $3,14 < \pi < 3,15$, donc la troncature de π à 10^{-2} vaut 3,14. Pour l'arrondi, le milieu de $[3,14; 3,15]$ est 3,145, et notre encadrement tient tout entier au-dessous : $\pi < 3,1429 < 3,145$. Le nombre π est donc plus proche de 3,14.

la troncature et l'arrondi de π à 10^{-2} valent tous deux 3,14

6. Non. L'amplitude $\frac{1}{497}$ vaut environ 0,0020, soit le double de 10^{-3} : un encadrement d'amplitude supérieure à 10^{-3} ne peut pas fixer la troisième décimale. On le voit sur les deux bornes, 3,1408 et 3,1428, entre lesquelles la troisième décimale prend les valeurs 0, 1 et 2.

l'encadrement ne garantit pas la troisième décimale

COMMENTAIRES

La question 6 est le vrai enseignement, et elle prolonge l'exercice 19 : **ce qu'un encadrement garantit se mesure à son amplitude**. Il faut une amplitude d'au plus 10^{-n} pour espérer fixer la n -ième décimale, et ici on est deux fois trop large.

Une remarque sur ce que l'exercice fait dire à Archimède : il n'écrit ni π , ni décimales, ni arrondi, il encadre un rapport par deux fractions. Les questions 4 à 6 disent ce que son encadrement *permet*, dans notre écriture à nous, et c'est la seule manière honnête de traduire un résultat vieux de vingt-trois siècles. Il lui aura fallu quatre doublements, de six côtés à quatre-vingt-seize, pour gagner deux décimales : le procédé marche, et il est d'une lenteur redoutable.

EXERCICE 29 · THE-A2-29

★★★★ ♦

La Bourse de Vancouver

MÉTHODE Estimer, c'est multiplier trois nombres : l'erreur moyenne d'une opération, le nombre d'opérations par jour, le nombre de jours. La question 4 compare le résultat à la réalité, et diagnostique.

1. La troncature au millième supprime tout ce qui suit la troisième décimale, et ce reste est compris entre 0 et 0,001, cette dernière valeur exclue. L'écart est donc majoré par 0,001

L'arrondi, lui, retient la plus proche des deux bornes, donc l'écart ne dépasse jamais la moitié de l'amplitude : 0,0005

2. $3000 \times 0,0005 = 1,5$ point par jour

3. Vingt-deux mois de vingt et un jours ouvrés font $22 \times 21 = 462$ jours, donc une perte estimée de

$$462 \times 1,5 = \boxed{693 \text{ points}}$$

4. L'indice affichait environ 525 alors qu'il aurait dû valoir environ 1100 : la dérive réellement constatée vaut donc environ $1100 - 525 = 575$ points. Notre estimation en donne 693, soit environ 20 % de plus. Nos trois entrées sont des chiffres ronds, choisis pour la commodité du calcul, et aucun des trois n'est mesuré. Il suffit qu'un seul soit trop généreux d'environ un sixième pour ramener l'estimation au voisinage de 575 : avec 2500 opérations par jour au lieu de 3000, on obtient $462 \times 2500 \times 0,0005 = 577,5$ points, et dix-huit jours ouvrés par mois donneraient le même effet.

l'écart vient de la grossièreté des trois entrées, non d'une erreur de méthode

5. Un arrondi se trompe alternativement en trop et en trop peu. Si les erreurs se répartissent également dans les deux sens, elles se compensent au fur et à mesure, et rien ne s'accumule : la dérive attendue est nulle.

avec un arrondi, l'indice n'aurait pratiquement pas dérivé

COMMENTAIRES

Le contraste chiffré vaut mieux qu'un discours. Sur les $462 \times 3000 = 1\,386\,000$ opérations de la période, l'erreur individuelle ne dépasse jamais un millième d'un côté, un demi-millième de l'autre : c'est le **signe** qui fait toute la différence. Une erreur minuscule mais systématique s'additionne 1 386 000 fois ; une erreur deux fois plus petite mais équilibrée reste sur place.

La question 4 est un exercice de jugement autant que de calcul. Une estimation qui tombe à 20 % d'une réalité qu'on n'a pas mesurée, à partir de trois nombres ronds, est un **succès** et non un échec : ce qu'elle devait établir, c'est qu'une troncature au millième peut faire perdre la moitié d'un indice en deux ans, et elle l'établit.

EXERCICE 30 · APR-A2-30

★★★★★ ☆

La médiane de l'horloger

MÉTHODE Les questions 2 et 3 sont un calcul littéral de fractions ; les trois dernières font tourner la méthode et en tirent une comparaison.

1. La médiane de $\frac{1}{2}$ et de $\frac{2}{3}$ vaut $\frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}$. Les deux différences

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{10-9}{15} = \frac{1}{15}$$

sont strictement positives, donc $\boxed{\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}}$

2. Au dénominateur commun $b(b+d)$, licite car b et $b+d$ sont strictement positifs :

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+c) - a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ab+bc-ab-ad}{b(b+d)} = \frac{bc-ad}{b(b+d)}.$$

L'hypothèse $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ signifie que $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bd}$ est strictement positive ; comme bd l'est, le numérateur $bc-ad$ l'est aussi. Le dénominateur $b(b+d)$ est strictement positif comme produit de deux nombres

strictement positifs, donc le quotient l'est également :

$$\boxed{\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \text{ dès que } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}}$$

3. Le même calcul, mené de l'autre côté :

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{c(b+d) - d(a+c)}{d(b+d)} = \frac{bc + cd - ad - cd}{d(b+d)} = \frac{bc - ad}{d(b+d)}.$$

Les deux numérateurs sont **identiques** : c'est le même nombre $bc - ad$ qui gouverne les deux écarts. Comme $d(b+d)$ est strictement positif, la médiane est aussi strictement inférieure à $\frac{c}{d}$.

la médiane de deux fractions est toujours strictement comprise entre elles

Seuls les dénominateurs distinguent les deux écarts, $b(b+d)$ d'un côté et $d(b+d)$ de l'autre : la médiane ne tombe donc pas au milieu, elle se rapproche de celle des deux fractions dont le dénominateur est le plus grand.

4. On part de $\frac{1}{1} < 1,4142 < \frac{2}{1}$, et à chaque étape la médiane remplace la borne située du même côté qu'elle.

Étape	Médiane	Comparaison à 1,4142	Nouvel encadrement
départ			$\frac{1}{1} < 1,4142 < \frac{2}{1}$
1	$\frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2} = 1,5$	plus grande	$\frac{1}{1} < 1,4142 < \frac{3}{2}$
2	$\frac{1+3}{1+2} = \frac{4}{3} \approx 1,333$	plus petite	$\frac{4}{3} < 1,4142 < \frac{3}{2}$
3	$\frac{4+3}{3+2} = \frac{7}{5} = 1,4$	plus petite	$\frac{7}{5} < 1,4142 < \frac{3}{2}$
4	$\frac{7+3}{5+2} = \frac{10}{7} \approx 1,4286$	plus grande	$\frac{7}{5} < 1,4142 < \frac{10}{7}$
5	$\frac{7+10}{5+7} = \frac{17}{12} \approx 1,4167$	plus grande	$\frac{7}{5} < 1,4142 < \frac{17}{12}$

C'est cette colonne de droite que l'on reporte sur le support de travail : à chaque ligne, deux points pour les bornes et un troisième pour la médiane qui vient d'en remplacer une, la cible 1,4142 restant toujours entre les deux.

5. L'encadrement obtenu est $\boxed{\frac{7}{5} < 1,4142 < \frac{17}{12}}$, et son amplitude vaut

$$\frac{17}{12} - \frac{7}{5} = \frac{85 - 84}{60} = \boxed{\frac{1}{60}}$$

6. Les deux nombres $\frac{17}{12}$ et $\sqrt{2}$ sont positifs : comparons leurs carrés.

$$\left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{289}{144} \quad \text{et} \quad (\sqrt{2})^2 = 2 = \frac{288}{144}.$$

Comme $\frac{288}{144} < \frac{289}{144}$, la comparaison des carrés entre nombres positifs donne $\boxed{\sqrt{2} < \frac{17}{12}}$

COMMENTAIRES

La question 3 porte le plus joli résultat de l'exercice, et il tient dans une coïncidence : les deux écarts ont le même numérateur. La médiane partage donc l'intervalle en deux morceaux dont le rapport ne dépend que des

dénominateurs, et un horloger y lit directement le nombre de dents à donner à chaque roue.

La méthode enferme 1,4142 dans un intervalle d'amplitude $\frac{1}{60}$ en cinq étapes menées de tête, sans une seule division. Ce qu'un horloger de 1861 cherchait n'était pas une valeur décimale, mais un **rapport d'entiers** qu'il pût tailler dans le laiton : douze dents contre dix-sept, et la pendule marche.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les prolongements de ces cinq histoires, les réponses des exemples jumelés du cours et les quiz de révision vous attendent sur le compagnon numérique, avec la réponse au défi du cours : comparer $|a + b|$ à $|a| + |b|$.