



CORRIGÉ · A3. ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

Corrigé des trente exercices de l'Atelier

Ce corrigé se lit **la feuille en main** : les énoncés n'y sont pas recopiés. Seize questions sont rédigées comme une copie idéale, à imiter jusqu'à la ponctuation ; les autres donnent la stratégie, le calcul et le résultat. Une résolution sans son ensemble S , une valeur interdite écrite après coup, et un résultat sans phrase de réponse, ne sont pas des réponses.

RÉDACTION MODÈLE : la copie idéale, à imiter · MÉTHODE : la stratégie en une ligne, puis le calcul · COMMENTAIRES : ce que la solution enseigne

I. CE QUE DIT LE SIGNE

EXERCICE 1 · APL-A3-01



Tester avant de résoudre

MÉTHODE Tester, c'est remplacer x par le nombre proposé et regarder si la phrase obtenue est vraie. Un test réussi prouve qu'un nombre est solution ; des tests qui échouent ne prouvent rien sur les autres nombres.

1. $7 \times 2 + 4 = 18$: l'égalité est vraie.

le nombre 2 est solution de l'équation

2. Pour $x = -1$: $3 - 2 \times (-1) = 5$, et $5 \geq 6$ est faux : -1 n'est pas solution. Pour $x = -2$: $3 - 2 \times (-2) = 7$, et $7 \geq 6$ est vrai.

-1 n'est pas solution ; -2 est solution

3. $(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$: l'égalité est vraie.

$\sqrt{2}$ est solution de l'équation

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 4, CELLE OÙ TESTER NE SUFFIT PLUS

Pour $x = 0$: le membre de gauche vaut $4 \times (-1) = -4$, le membre de droite vaut -1 . L'égalité est fautive : 0 n'est pas solution.

Pour $x = 100$: à gauche, $4 \times 99 = 396$; à droite, 399. L'égalité est fausse : 100 n'est pas solution. Deux échecs ne prouvent rien sur les autres réels : il y en a une infinité, et tester ne les épuiserait jamais. Seule une résolution peut trancher. Développons :

$$4(x - 1) = 4x - 1 \iff 4x - 4 = 4x - 1 \iff -4 = -1.$$

Cette dernière égalité est fausse, quel que soit le réel x : aucun réel n'est solution.

Donc $S = \emptyset$

COMMENTAIRES

La question 4 est le cœur de l'exercice : l'élève qui a testé 0 et 100 *sente* que l'équation n'a pas de solution, mais un sentiment n'est pas une preuve, et l'énoncé demande d'**affirmer**. La résolution, elle, couvre tous les réels d'un coup : c'est exactement ce que les tests ne savent pas faire. Noter la forme de la conclusion : $S = \emptyset$ est un résultat complet, pas un constat d'échec.

EXERCICE 2 · THE-A3-02



$\iff$, $\implies$ ou $\impliedby$?

RÉDACTION MODÈLE – COUPLE 1, CELUI QUI N'A QU'UN SEUL SENS

Si $x = -2$, alors $x^2 = (-2)^2 = 4$: le sens $\implies$ est vrai.

Le sens réciproque est faux : le réel 2 vérifie $x^2 = 4$, mais $2 \neq -2$. Ce contre-exemple interdit d'écrire $\impliedby$, donc aussi $\iff$.

On écrit donc : $\boxed{\text{pour tout réel } x, x = -2 \implies x^2 = 4}$

MÉTHODE Un sens s'accorde s'il est vrai pour tout réel ; un sens se refuse avec UN contre-exemple. Le symbole $\iff$ exige les deux sens.

2. $2x = 8 \iff x = 4$: diviser les deux membres par 2 est un geste légal, et le multiplier les rejoue en sens inverse. Les deux sens sont vrais.

3. $x \geq 3 \implies x \geq 1$: tout réel supérieur ou égal à 3 dépasse 1. La réciproque est fausse : 2 vérifie $x \geq 1$ mais pas $x \geq 3$.

4. $x(x - 7) = 0 \iff x = 7$: si $x = 7$, le second facteur est nul, donc le produit aussi. Le sens direct est faux : 0 vérifie $x(x - 7) = 0$ mais $0 \neq 7$.

Deux équations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions, c'est-à-dire précisément lorsque le symbole $\iff$ est légitime entre elles.

$\boxed{\text{seul le couple 2 est un couple d'équations équivalentes}}$

COMMENTAIRES

Les trois refus reposent sur trois contre-exemples : 2, 2 encore, 0. C'est la **méthode** du chapitre : on n'argumente jamais contre une implication, on exhibe un réel qui la met en défaut. Le couple 4 est le plus utile pour la suite : une équation produit a *plusieurs* solutions, et c'est pour cela que la flèche ne remonte pas vers une seule d'entre elles. Le paragraphe 2 du cours en fera un théorème.

Réciproques et contraposées

RÉDACTION MODÈLE – L'EXERCICE ENTIER : A, B, ET LE SYMBOLE QUI N'EN DÉCOULE QUE POUR B

Réciproque de A : « si $x^2 = 16$, alors $x = -4$ ». Elle est fausse : le réel 4 vérifie $4^2 = 16$ et pourtant $4 \neq -4$.

Réciproque de B : « si $x = 5$, alors $2x - 1 = 9$ ». Elle est vraie : si $x = 5$, alors $2 \times 5 - 1 = 9$.

Contraposée de A : « si $x^2 \neq 16$, alors $x \neq -4$ ». Elle est vraie : ce n'est pas une implication nouvelle, c'est une autre façon d'écrire A elle-même. En effet, si l'on avait $x = -4$, alors on aurait $x^2 = 16$; donc dès que $x^2 \neq 16$, il est impossible que x vaille -4 .

Le symbole $\iff$ exige une implication vraie *et* une réciproque vraie. C'est le cas de B, pas de A : A garde sa flèche simple.

Donc $\text{pour tout réel } x, 2x - 1 = 9 \iff x = 5$

COMMENTAIRES

La confusion à éviter est entre **réciproque** (on échange les deux phrases : sa vérité est une question nouvelle) et **contraposée** (on nie les deux phrases et on échange : sa vérité est *automatique*, c'est la même implication). Une implication vraie peut avoir une réciproque fausse, jamais une contraposée fausse. Le couple A illustre le premier cas, et c'est le même phénomène qu'à l'exercice 2 : $x^2 = 16$ a deux solutions, la flèche ne sait pas laquelle choisir.

II. LES DEUX GESTES, MONTÉE RAPIDE

Gammes éclair

MÉTHODE Les deux gestes légaux du cours, et rien d'autre : ajouter un même nombre aux deux membres, multiplier les deux membres par un même nombre non nul. Le modèle intégral de rédaction est l'exemple déroulé du cours § 1.3.

$$1. 6x + 7 = 25 \iff 6x = 18 \iff x = 3$$

$$S = \{3\}$$

$$3. 4x + 9 = x - 6 \iff 3x = -15 \iff x = -5$$

$$S = \{-5\}$$

$$2. 8 - x = 15 \iff -x = 7 \iff x = -7$$

$$S = \{-7\}$$

$$4. 2(x - 3) = 5x \iff 2x - 6 = 5x \iff -6 = 3x \iff x = -2$$

$$S = \{-2\}$$

COMMENTAIRES

Quatre gammes, un message : à l'item 4, regrouper les x à droite ($-6 = 3x$) évite la division par un négatif que le regroupement à gauche aurait imposée. On peut toujours choisir le côté où le coefficient de x reste positif. Et la conclusion par S n'est pas une politesse : c'est elle que le chapitre évalue.

Fractions des deux côtés

MÉTHODE Multiplier les deux membres par un multiple commun des dénominateurs, en multipliant TOUS les termes ; les gestes légaux finissent, la vérification rattrape les étourderies.

1. Multiplions les deux membres par 4 : $3x - 1 = 2(x + 3) \iff 3x - 1 = 2x + 6 \iff x = 7$, donc $S = \{7\}$

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 2, CELLE OÙ UN TERME N'A PAS DE DÉNOMINATEUR

Le nombre 12 est un multiple commun des trois dénominateurs 4, 3 et 6. Multiplions les deux membres par 12 : chaque terme est multiplié, y compris le 1.

$$\frac{x}{4} - \frac{2}{3} = \frac{x}{6} + 1 \iff \frac{12x}{4} - \frac{24}{3} = \frac{12x}{6} + 12 \iff 3x - 8 = 2x + 12.$$

Ajoutons $-2x$ puis 8 aux deux membres :

$$3x - 8 = 2x + 12 \iff x - 8 = 12 \iff x = 20.$$

Vérification dans l'équation de départ : $\frac{20}{4} - \frac{2}{3} = 5 - \frac{2}{3} = \frac{13}{3}$, et $\frac{20}{6} + 1 = \frac{10}{3} + \frac{3}{3} = \frac{13}{3}$.

Donc $S = \{20\}$

3. Multiplions les deux membres par 8 : $3x + 2 = 4x - 8 \iff 10 = x$, donc $S = \{10\}$

COMMENTAIRES

L'erreur qui coûte, à la question 2, est de multiplier les termes à *dénominateur* et d'oublier les autres : le 1 du membre de droite doit devenir 12. La rédaction modèle multiplie **tous** les termes, et le montre. La vérification finale n'est pas décorative : avec des fractions, c'est elle qui rattrape une étourderie de dénominateur, et elle réactive le calcul fractionnaire d'A1.

Le développement qui s'effondre

MÉTHODE Développer les deux membres, chacun avec son identité d'A1 quand elle s'applique ; les x^2 se neutralisent, les gestes légaux finissent.

1. $(x + 2)(x - 5) = x^2 - 3x - 10$, donc l'équation équivaut à

$$-3x - 10 = 8 \iff -3x = 18 \iff x = -6, \quad S = \{-6\}$$

2. $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$ (identité du carré d'une différence), donc l'équation équivaut à

$$-8x + 16 = -8 \iff -8x = -24 \iff x = 3, \quad S = \{3\}$$

3. $(2x + 1)(2x - 1) = 4x^2 - 1$ (différence de deux carrés), donc l'équation équivaut à

$$-1 = x - 13 \iff x = 12, \quad \boxed{S = \{12\}}$$

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 4, CELLE OÙ IL NE RESTE PLUS RIEN

Développons chaque membre avec son identité. À gauche, le carré d'une somme :

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$

À droite, un double développement :

$$(x - 2)(x + 8) = x^2 + 8x - 2x - 16 = x^2 + 6x - 16.$$

L'équation équivaut donc à

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 6x - 16 \iff 9 = -16.$$

Cette égalité est fausse, quel que soit le réel x : les x^2 se sont neutralisés, puis les $6x$ aussi, et il ne reste qu'une égalité entre deux nombres qui ne sont pas égaux.

Donc $\boxed{S = \emptyset}$

COMMENTAIRES

Quatre équations qui *ressemblent* à du second degré, et quatre résolutions de premier degré : c'est le développement qui décide du degré réel, pas l'apparence. La question 4 pousse l'effondrement jusqu'au bout : après les x^2 , les $6x$ disparaissent aussi, et l'équation avoue qu'elle n'était qu'une égalité fausse déguisée. Même famille que la question 4 de l'exercice 1, mais découverte par le calcul et non par le test.

EXERCICE 7 · THE-A3-07



Chasse à l'erreur

MÉTHODE Pour chaque copie : tester la valeur annoncée dans l'équation de DEPART, puis remonter à la ligne où l'égalité des ensembles de solutions se brise.

Copie A. Conclusion fausse : $4 \times 6 + 6 = 30 \neq 18$. La faute est à la ligne $4x = 18 + 6$: ajouter -6 aux deux membres donne $4x = 18 - 6$. Le terme qui change de membre change de signe. Correction : $4x + 6 = 18 \iff 4x = 12 \iff x = 3$, donc $\boxed{S = \{3\}}$

Copie B. Conclusion fausse : $\frac{11}{2} + 3 = 8,5 \neq 7$. La faute est à la ligne $x + 3 = 14$: en multipliant les deux membres par 2, chaque terme est multiplié, et 3 devait devenir 6. Correction : $\frac{x}{2} + 3 = 7 \iff x + 6 = 14 \iff x = 8$, donc $\boxed{S = \{8\}}$

Copie C. Conclusion fausse : $7 \times \frac{7}{5} - 4 = \frac{29}{5}$ et $2 \times \frac{7}{5} + 11 = \frac{69}{5}$, deux nombres différents. La faute est à la ligne $5x = 7$: ajouter 4 aux deux membres donne $11 + 4 = 15$ à droite, pas $11 - 4 = 7$. Correction : $7x - 4 = 2x + 11 \iff 5x = 15 \iff x = 3$, donc $\boxed{S = \{3\}}$

RÉDACTION MODÈLE – COPIE D, CELLE QUI CONCLUT TROP VITE

La ligne $0 = 0$ est correcte : en développant, $3(x - 2) = 3x - 6$ donne bien $3x - 6 = 3x - 6$, égalité vraie quel que soit le réel x .

C'est la conclusion qui est fausse. Une égalité vraie pour tout réel signifie que *tout* réel est solution : l'équation est une identité. L'ensemble $S = \{0\}$ affirme au contraire que 0 est la seule solution, ce que dément par exemple $x = 1 : 3 \times (-1) = -3$ et $3 - 6 = -3$, l'égalité tient.

La conclusion correcte est : $S = \mathbb{R}$

COMMENTAIRES

Trois fautes de geste (A, B, C) et une faute de **lecture** (D) : la ligne $0 = 0$ n'est pas un résultat nul, c'est la meilleure nouvelle possible, tout réel convient. Sa jumelle est la ligne $-4 = -1$ de l'exercice 1, qui était la pire. Ces deux lignes sans x se lisent de la même façon : vraie partout, ou fausse partout. Le test de la valeur annoncée, lui, démasque A, B et C en une ligne chacune : c'est l'outil le moins cher du chapitre.

EXERCICE 8 · APR-A3-08

★★★★★ ☆

Selon la valeur de m

MÉTHODE Un paramètre se traite par DISJONCTION DE CAS : le geste « diviser par m » n'est légal que si m n'est pas nul, et le cas exclu se traite à part.

1. Pour $m = 2 : 2x = 6 \iff x = 3$, donc $S = \{3\}$. Pour $m = -3 : -3x = 6 \iff x = -2$, donc $S = \{-2\}$. Pour $m = 0$: l'équation devient $0 = 6$, fausse quel que soit x , donc $S = \emptyset$.

2. Pour tout réel m non nul, diviser les deux membres par m est légal : $mx = 6 \iff x = \frac{6}{m}$, et $S = \left\{ \frac{6}{m} \right\}$. Pour $m = 0$, l'équation s'écrit $0 = 6$: elle n'a aucune solution, et $S = \emptyset$.

$$\text{pour tout réel } m \neq 0, S = \left\{ \frac{6}{m} \right\}; \text{ pour } m = 0, S = \emptyset$$

3. $mx + 2 = 3x \iff mx - 3x = -2 \iff (m - 3)x = -2$. Si $m \neq 3$, on divise par $m - 3$, qui n'est pas nul : $x = \frac{-2}{m - 3} = \frac{2}{3 - m}$. Si $m = 3$, l'équation s'écrit $0 = -2$, fausse quel que soit x .

$$\text{pour tout réel } m \neq 3, S = \left\{ \frac{2}{3 - m} \right\}; \text{ pour } m = 3, S = \emptyset$$

4. Pour que tout réel soit solution, il faudrait que $(m - 3)x = -2$ soit vraie quel que soit x , donc en particulier pour $x = 0$: cela donnerait $0 = -2$, qui est faux.

$$\text{aucune valeur de } m \text{ ne donne } S = \mathbb{R}$$

COMMENTAIRES

La question 1 est la rampe : trois valeurs de m , trois équations ordinaires, et le cas $m = 0$ qui annonce la fracture. La discussion générale ne fait que ranger ces observations en deux cas, et le vocabulaire est celui de l'exercice 7 : une équation sans x est vraie partout ou fausse partout. La question 4 se règle par un seul réel bien choisi, $x = 0$: pour réfuter « pour tout », un contre-exemple suffit, comme à l'exercice 2.

III. L'ORDRE SOUS CONTRÔLE

EXERCICE 9 · THE-A3-09

★★ ■

Vrai ou faux, l'ordre

MÉTHODE Une règle du cours pour le vrai, un contre-exemple pour le faux : le régime de l'exercice 2, appliqué à l'ordre.

- FAUX** pour $x = 0$: $x \leq 2$ est vrai, mais $-3 \times 0 = 0$ et $0 \leq -6$ est faux. Multiplier par -3 **renverse** : de $x \leq 2$ on déduit $-3x \geq -6$.
- VRAI** ajouter 7 aux deux membres conserve l'ordre (règle d'A2) : $x > 4$ donne $x + 7 > 11$.
- VRAI** l'inéquation $2x + 7 \leq 2x + 1$ équivaut à $7 \leq 1$, fausse quel que soit x : son ensemble de solutions est vide.
- VRAI** $-x < -3 \iff x > 3$ (multiplication par -1 , qui renverse), et $2x > 6 \iff x > 3$: même ensemble de solutions, donc inéquations équivalentes.
- FAUX** pour $a = 1$ et $b = -2$: $1 > -2$, mais $a^2 = 1$, $b^2 = 4$ et $1 > 4$ est faux. Élever au carré ne conserve pas l'ordre des réels de signes quelconques.

COMMENTAIRES

Les affirmations 3 et 4 recyclent les acquis de la partie II : une inéquation sans x restant se lit comme une équation sans x , et l'équivalence de deux inéquations se teste par leurs ensembles de solutions. L'affirmation 5 est le piège durable : la tentation d'élever au carré « des deux côtés » reviendra avec les racines, et le contre-exemple $(1; -2)$ mérite d'être retenu tel quel.

EXERCICE 10 · APL-A3-10

★★ ■

Double détente

MÉTHODE Développer d'abord, regrouper ensuite, renverser si l'on divise par un négatif ; le modèle intégral, sentinelles comprises, est l'exemple déroulé du cours § 1.4.

- $5 - 2(x + 3) \leq 9 \iff 5 - 2x - 6 \leq 9 \iff -2x - 1 \leq 9 \iff -2x \leq 10 \iff x \geq -5$ (division par -2 , l'ordre se renverse), donc $S = [-5; +\infty[$
Sentinelles : pour $x = 0 \in S$, $5 - 6 = -1 \leq 9$, vrai ; pour $x = -6 \notin S$, $5 - 2 \times (-3) = 11 \leq 9$, faux. Cohérent.
- Multiplions les deux membres par 10 : $5(x - 1) > 2(2x + 3) \iff 5x - 5 > 4x + 6 \iff x > 11$, donc $S =]11; +\infty[$
- $3(2x - 1) - 4(x + 2) < 0 \iff 6x - 3 - 4x - 8 < 0 \iff 2x - 11 < 0 \iff x < \frac{11}{2}$, donc $S = \left] -\infty; \frac{11}{2} \right[$

COMMENTAIRES

Le renversement ne se produit qu'à l'item 1, parce qu'on y divise par -2 : aux items 2 et 3, le regroupement a laissé le coefficient de x positif. Les sentinelles de l'item 1 sont le contrôle le moins cher du chapitre : une valeur dans S , une valeur hors de S , et l'intervalle est confirmé à ses deux bouts.

EXERCICE 11 · APL-A3-11

★★ ■

La moyenne visée

MÉTHODE La moyenne des quatre notes s'écrit en fonction de x , la condition devient une inéquation, et la réponse est une phrase sur des notes.

1. La moyenne vaut $\frac{8 + 12 + 9 + x}{4} = \frac{29 + x}{4}$. La condition s'écrit :

$$\frac{29 + x}{4} \geq 12 \iff 29 + x \geq 48 \iff x \geq 19.$$

il lui faut au moins 19 sur 20

2. $\frac{29 + x}{4} \geq 10 \iff 29 + x \geq 40 \iff x \geq 11$: au moins 11 sur 20

3. $\frac{29 + x}{4} \geq 13 \iff x \geq 23$. Or une note ne dépasse pas 20 : aucune note possible ne vérifie $x \geq 23$. C'est la comparaison $23 > 20$, au bout de la résolution, qui révèle l'impossibilité.

aucune note ne peut donner une moyenne de 13

COMMENTAIRES

Le seuil de la question 1 surprend : 19 sur 20 pour viser 12 de moyenne, c'est le prix de trois notes basses divisées par quatre. La question 3 montre une inéquation dont la solution mathématique existe ($[23; +\infty[$ n'est pas vide) mais dont la solution du problème n'existe pas : la confrontation au contexte fait partie de la résolution, comme au paragraphe 1.5 du cours.

EXERCICE 12 · APL-A3-12

★★★ ■

Les carrés qui se neutralisent

MÉTHODE Développer chaque membre avec son identité d'A1 : les x^2 se neutralisent, l'inéquation redevient du premier degré ; renverser si l'on divise par un négatif.

$$1. (x + 1)^2 \geq (x - 2)^2 \iff x^2 + 2x + 1 \geq x^2 - 4x + 4 \iff 2x + 1 \geq -4x + 4 \iff 6x \geq 3 \iff x \geq \frac{1}{2},$$

donc $S = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 2, CELLE QUI FINIT PAR UN RENVERSEMENT

Développons chaque membre avec l'identité du carré :

$$(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9 \quad \text{et} \quad (2x + 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25.$$

Les deux membres contiennent $4x^2$: l'inéquation équivaut à

$$-12x + 9 < 20x + 25.$$

Ajoutons $-20x$ puis -9 aux deux membres :

$$-32x + 9 < 25 \iff -32x < 16.$$

Divisons les deux membres par -32 , qui est strictement négatif : l'ordre se renverse.

$$x > -\frac{16}{32} = -\frac{1}{2}.$$

Donc $S = \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$

3. $(x-6)(x+6) = x^2 - 36$ (différence de deux carrés) et $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$, donc l'inéquation équivaut à $-36 \leq -6x + 9 \iff 6x \leq 45 \iff x \leq \frac{15}{2}$, donc $S = \left] -\infty; \frac{15}{2} \right]$

COMMENTAIRES

Aucune étude de signe nulle part : ces inéquations n'ont jamais été du second degré, elles en portaient le costume. Le point technique vit à la question 2 : après le spectacle des carrés qui s'annulent, la division finale par -32 exige le renversement d'A2, et c'est là que les copies se départagent. Regrouper les x de l'autre côté ($9 - 25 < 32x$) évite le renversement et donne le même ensemble : deux chemins, une seule réponse.

EXERCICE 13 · SYN-A3-13



Deux conditions à la fois

MÉTHODE Une double inéquation est deux conditions reliées par le connecteur « et » : chaque geste s'applique aux trois membres, et l'ensemble des solutions est une intersection.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1, LES GESTES AUX TROIS MEMBRES

Ajoutons -1 aux trois membres :

$$-3 < 2x + 1 \leq 7 \iff -4 < 2x \leq 6.$$

Divisons les trois membres par 2, qui est strictement positif : l'ordre est conservé.

$$-2 < x \leq 3.$$

Donc $S =] -2; 3]$

2. Les entiers relatifs de $] -2; 3]$ sont $\boxed{-1, 0, 1, 2, 3}$ (-2 est exclu, 3 est inclus).

3. La double inéquation dit : $2x + 1 > -3$ et $2x + 1 \leq 7$, c'est-à-dire $x > -2$ et $x \leq 3$. En intervalles :

$$S =] -2; +\infty[\cap] -\infty; 3] =] -2; 3],$$

ce qui est bien l'ensemble de la question 1.

4. $3x - 1 \geq 5 \iff x \geq 2$, et $3x - 1 < 2 \iff x < 1$. Aucun réel ne vérifie à la fois $x \geq 2$ et $x < 1$: $S = \emptyset$. C'était prévisible sans calcul : la double inéquation affirme en particulier $5 < 2$, en comparant ses deux membres extrêmes.

COMMENTAIRES

Le « et » est le personnage principal : une double inéquation est deux conditions simultanées, et son ensemble de solutions est une **intersection**, celle du chapitre A2. La question 4 apprend à lire une double inéquation *avant* de la résoudre : si les bornes extrêmes se contredisent, l'ensemble est vide.

IV. METTRE LE MONDE EN ÉQUATION

EXERCICE 14 · APL-A3-14

★★ ■

Le schéma en quatre temps

MÉTHODE Le schéma du cours § 1.5, dont le modèle intégral est l'exemple du cinéma : nommer l'inconnue en toutes lettres, traduire, résoudre, **CONFRONTER**.

1. Notons x le nombre d'années à attendre. Dans x années, Lina aura $14 + x$ ans et son père $41 + x$ ans. L'énoncé se traduit par :

$$41 + x = 2(14 + x) \iff 41 + x = 28 + 2x \iff 13 = x.$$

Confrontation : dans 13 ans, Lina aura 27 ans, son père $54 = 2 \times 27$ ans.

dans 13 ans

2. Notons e le prix d'un menu enfant, en euros ; un menu adulte coûte alors $e + 3$ euros. La note se traduit par :

$$3e + 2(e + 3) = 25,50 \iff 5e + 6 = 25,50 \iff 5e = 19,50 \iff e = 3,90.$$

Confrontation : $3 \times 3,90 + 2 \times 6,90 = 11,70 + 13,80 = 25,50$.

un menu enfant coûte 3,90 euros

COMMENTAIRES

Chaque étape du schéma pare une erreur réelle : nommer l'inconnue évite de résoudre pour la mauvaise grandeur (l'âge du père, le prix du menu adulte), et la confrontation finale aurait démasqué une traduction fautive. Au problème 1, l'équation vit dans le futur : les *deux* âges avancent du même x , et c'est là que se joue la mise en équation.

EXERCICE 15 · APL-A3-15

★★★ ■

Le juste tarif

MÉTHODE Deux formules, deux expressions du coût en fonction du nombre n d'entrées : l'égalité donne le point de bascule, l'inéquation donne le camp gagnant.

1. Plein tarif : $12n$ euros ; abonnement : $88 + 4n$ euros. Égalité :

$$12n = 88 + 4n \iff 8n = 88 \iff n = 11.$$

pour 11 entrées, les deux formules coûtent 132 euros

2. L'abonnement est strictement plus avantageux lorsque $88 + 4n < 12n \iff 88 < 8n \iff n > 11$. Le nombre d'entrées étant entier :

à partir de la 12^e entrée

3. Deux entrées par mois pendant dix mois : 20 entrées. Plein tarif : $12 \times 20 = 240$ euros ; abonnement : $88 + 4 \times 20 = 168$ euros.

l'abonnement, avec $240 - 168 = 72$ euros d'économie

COMMENTAIRES

Le point de bascule (question 1) et le camp gagnant (question 2) sont deux questions distinctes : une égalité, puis une inéquation stricte, dont la solution $n > 11$ se traduit en « à partir de la douzième entrée » parce que n compte des entrées, donc des entiers. La question 3 fait tourner le modèle sur un cas concret, et l'écart se chiffre.

EXERCICE 16 · APL-A3-16

★★★ ■

Le carré agrandi

MÉTHODE Les aires s'expriment, leur différence est donnée, et l'identité du carré d'une somme fait s'effondrer l'équation au premier degré, comme à l'exercice 6.

1. Avant : l'aire vaut x^2 . Après : le côté vaut $x + 3$, l'aire vaut $(x + 3)^2$. Le gain d'aire est la différence, d'où l'équation $(x + 3)^2 - x^2 = 51$.

2. $(x + 3)^2 - x^2 = x^2 + 6x + 9 - x^2 = 6x + 9$, donc

$$6x + 9 = 51 \iff 6x = 42 \iff x = 7.$$

3. Le jardin initial a 7 m de côté, l'agrandi 10 m. Vérification sur les aires : $100 - 49 = 51 \text{ m}^2$.

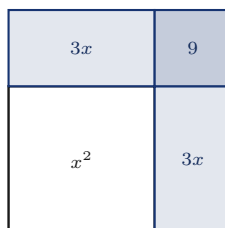
jardins de 7 m et 10 m de côté

4. Même équation avec 33 : $6x + 9 = 33 \iff 6x = 24 \iff x = 4$.

le jardin du voisin avait 4 m de côté

COMMENTAIRES

Le gain $6x + 9$ se voit sur la figure de l'Atelier : la bande gagnée se découpe en deux rectangles $3 \times x$ et un coin 3×3 .



C'est l'identité $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ dessinée : deux bandes $3x$ et un carré 9. L'algèbre et la géométrie racontent le même agrandissement, et la question 4 réutilise l'équation toute montée, en ne changeant que le second membre.

EXERCICE 17 · APL-A3-17



Isoler la lettre qui compte

MÉTHODE Isoler une lettre, c'est résoudre en traitant les autres lettres comme des nombres ; chaque multiplication ou division exige un « non nul », que l'énoncé fournit.

1. Ajoutons -32 aux deux membres, puis divisons par $1,8$, non nul :

$$F = 1,8C + 32 \iff F - 32 = 1,8C \iff C = \frac{F - 32}{1,8}.$$

Pour $F = 98,6$: $C = \frac{66,6}{1,8} = 37$.

la température normale est 37 degrés Celsius

2. Multiplions les deux membres par 2, divisons par h non nul, puis ajoutons $-B$:

$$A = \frac{(B+b)h}{2} \iff 2A = (B+b)h \iff \frac{2A}{h} = B+b \iff b = \frac{2A}{h} - B.$$

Pour $A = 21$, $h = 6$, $B = 4$: $b = \frac{42}{6} - 4 = 3$.

la petite base mesure 3 cm

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 3, LA LETTRE AU DÉNOMINATEUR

La lettre t est au dénominateur : commençons par l'en faire sortir. Le réel t n'est pas nul : multiplions les deux membres par t .

$$v = \frac{d}{t} \iff vt = d.$$

Le réel v n'est pas nul : divisons les deux membres par v .

$$vt = d \iff t = \frac{d}{v}.$$

Pour $d = 650$ et $v = 130$: $t = \frac{650}{130} = 5$.

le trajet dure 5 heures

COMMENTAIRES

Trois formules, trois lettres délogées, et à chaque fois la même discipline : un geste n'est légal que si le nombre par lequel on multiplie ou divise est **non nul**, et l'énoncé fournit cette garantie $(1,8, h, t, v)$. La question 3 prépare l'automatisme $\frac{a}{x} = b$ de la partie V : sortir une lettre du dénominateur, c'est toujours multiplier les deux membres par elle.

EXERCICE 18 · SYN-A3-18

★★★★ ♦

La rencontre

MÉTHODE Une seule inconnue, le temps ; les deux distances s'expriment, leur somme est la donnée. Puis la même modélisation sert l'inéquation.

- En t heures, Marius parcourt $12t$ km et Bilal $20t$ km. Ils se rencontrent quand, à eux deux, ils ont couvert les 96 km : $12t + 20t = 96$.
- $32t = 96 \iff t = 3$. La rencontre a lieu 3 heures après 9 h, et Marius a parcouru $12 \times 3 = 36$ km.

à midi, à 36 km d'Aubrac

- Avant la rencontre, la distance restante est $96 - 32t$. La condition s'écrit :

$$96 - 32t < 16 \iff -32t < -80 \iff t > \frac{80}{32} = 2,5$$

(division par -32 , l'ordre se renverse). Soit 2 h 30 après le départ, et jusqu'à la rencontre de midi :

entre 11 h 30 et midi

- Confrontation : $36 + 20 \times 3 = 36 + 60 = 96$ km. Les deux distances épuisent exactement la véloroute.

COMMENTAIRES

La vitesse de rapprochement, 32 km/h, est la somme des deux vitesses : c'est elle qui transforme deux mouvements en une seule équation. L'énoncé borne la question 3 à l'avant de la rencontre, et ce n'est pas une coquetterie : après midi, les deux cyclistes se sont croisés et s'éloignent, et l'expression $96 - 32t$ ne mesure plus rien. Une expression a un domaine de validité, comme une formule.

V. PRODUIT NUL, QUOTIENT NUL

EXERCICE 19 · APL-A3-19

★★ ■

Gammes éclair

MÉTHODE *Produit nul : l'un au moins des facteurs est nul (théorème du cours § 2.1, dont l'exemple déroulé est le modèle).*

Quotient nul : valeur interdite d'abord, numérateur nul ensuite.

1. $2x - 7 = 0$ ou $x + 9 = 0$, donc $S = \left\{ -9; \frac{7}{2} \right\}$

2. $x = 0$ ou $6x + 5 = 0$, donc $S = \left\{ -\frac{5}{6}; 0 \right\}$

3. $1 - 4x = 0$ ou $x + 7 = 0$, donc $S = \left\{ -7; \frac{1}{4} \right\}$

4. Valeur interdite : -8 . Le numérateur s'annule pour $x = -\frac{3}{2}$, qui n'est pas interdite. Donc $S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$

5. Valeur interdite : $-\frac{1}{2}$. Le numérateur s'annule pour $x = 9$, qui n'est pas interdite. Donc $S = \{9\}$

COMMENTAIRES

Deux familles, deux disciplines : le produit livre ses solutions facteur par facteur et S en compte deux ; le quotient exige son rituel, l'interdite d'abord, et son dénominateur ne fournit jamais de solution, il en confisque. Les ensembles s'écrivent en rangeant les solutions par ordre croissant.

EXERCICE 20 · APL-A3-20

★★ ■

Trouver le diviseur

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1, L'AUTOMATISME RÉDIGÉ UNE FOIS POUR TOUTES

La valeur interdite est 0 : un dénominateur ne peut pas être nul.

Pour x non nul, multiplions les deux membres par x :

$$\frac{12}{x} = 3 \iff 12 = 3x \iff x = 4.$$

Le candidat 4 n'est pas la valeur interdite : c'est une solution.

Donc $S = \{4\}$

MÉTHODE *Le même rituel à chaque fois : valeur interdite, multiplication des deux membres par x , division finale, confrontation du candidat à la valeur interdite.*

2. Valeur interdite : 0 ; pour x non nul, $7 = -2x \iff x = -\frac{7}{2}$, qui n'est pas interdite : $S = \left\{ -\frac{7}{2} \right\}$

3. Valeur interdite : 0 ; pour x non nul, $-15 = 5x \iff x = -3$, non interdite : $S = \{-3\}$

4. Valeur interdite : 0 ; pour x non nul, $8 = 0,5x \iff x = 16$, non interdite : $S = \{16\}$

5. Valeur interdite : 0 ; pour x non nul, multiplier les deux membres par x donne $6 = 0 \times x$, c'est-à-dire $6 = 0$: égalité fausse quel que soit le réel x , et $S = \emptyset$

COMMENTAIRES

La question 5 est la sentinelle de l'exercice : un quotient nul exige un numérateur nul, et 6 ne le sera jamais, quelle que soit la valeur de x . L'élève qui applique le rituel sans réfléchir obtient $6 = 0$, égalité fausse, et doit conclure $S = \emptyset$: le rituel protège même de ce piège-là, à condition de lire ce qu'il produit.

EXERCICE 21 · APL-A3-21

★★★ ■

La différence de deux carrés

MÉTHODE Tout à gauche, l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, le produit nul.

$$1. x^2 - 81 = 0 \iff (x - 9)(x + 9) = 0 \iff x = 9 \text{ ou } x = -9, \text{ donc } S = \{-9; 9\}$$

$$2. 9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = (3x - 2)(3x + 2) = 0, \text{ donc } S = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$$

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 3, QUAND a ET b SONT DES BINÔMES

Posons $a = 3x - 1$ et $b = x + 5$: l'équation s'écrit $a^2 - b^2 = 0$. Appliquons l'identité de A1 :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Calculons les deux facteurs :

$$a - b = (3x - 1) - (x + 5) = 2x - 6 \quad \text{et} \quad a + b = (3x - 1) + (x + 5) = 4x + 4.$$

L'équation équivaut donc à $(2x - 6)(4x + 4) = 0$, produit nul :

$$2x - 6 = 0 \text{ ou } 4x + 4 = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = 3 \text{ ou } x = -1.$$

Donc $S = \{-1; 3\}$

$$4. 7 = (\sqrt{7})^2, \text{ donc } x^2 - 7 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = 0, \text{ et } S = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$$

COMMENTAIRES

La question 3 est le saut d'abstraction de l'exercice : a et b ne sont plus des monômes mais des expressions, et l'identité s'applique *telle quelle*, à condition de parenthéser la soustraction $(3x - 1) - (x + 5)$, où vit l'erreur de signe classique. La question 4 étend la famille $x^2 = k$ au cas où k n'est pas un carré parfait : les racines carrées d'A1 fournissent les deux solutions, et le cours n'avait montré que $x^2 = 49$.

EXERCICE 22 · THE-A3-22

★★★ ◆

Chasse à l'erreur, le retour

MÉTHODE Le régime de l'exercice 7 : tester d'abord, diagnostiquer ensuite. Les quatre fautes sont celles du détour par zéro.

Copie A. Conclusion fausse. La faute est le « et » : le théorème du produit nul dit « l'un **au moins** des facteurs est nul », c'est un « ou ». Chaque facteur fournit sa solution : $(x - 2)(x + 5) = 0 \iff x = 2$ ou $x = -5$, donc $S = \{-5; 2\}$

Copie B. Conclusion fausse : 6 annule le dénominateur, la copie n'a jamais écrit la valeur interdite. Pour $x \neq 6$, le quotient est nul si et seulement si $3x + 1 = 0$, soit $x = -\frac{1}{3}$, qui n'est pas interdite : $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

Copie C. Conclusion fausse : le réel $\frac{1}{2}$ vérifie l'équation, car 4 divisé par $\frac{1}{2}$ vaut 8 ; S n'est donc pas vide. La faute : le geste « multiplier par x » n'a été appliqué qu'au membre de gauche ; un geste légal s'applique aux **deux** membres. Correction : pour $x \neq 0$, $4 = 8x \iff x = \frac{1}{2}$, donc $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Copie D. Conclusion **incomplète** : 10 est bien solution, mais diviser par x suppose x non nul, et efface la solution 0 (c'est le tour de magie de l'activité). Correction : $x^2 - 10x = 0 \iff x(x - 10) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 10$, donc $S = \{0; 10\}$

COMMENTAIRES

Quatre copies, quatre morales : le « ou » n'est pas un « et » (A) ; la valeur interdite s'écrit *avant* de calculer, jamais après (B) ; un geste ne s'applique jamais à un seul membre (C) ; on ne divise pas par ce qui peut être nul (D). La copie D est la seule dont la réponse contient du vrai : « incomplète » n'est pas « fausse », et la distinction, introduite par la consigne, est exactement ce que l'ensemble S sait dire et qu'un nombre seul ne sait pas.

EXERCICE 23 · APL-A3-23

★★★★ ■

Le carré parfait

MÉTHODE Reconnaître $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$, et se souvenir qu'un carré est nul si et seulement si ce qu'on élève au carré est nul.

1. $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$, et un carré est nul si et seulement si sa base est nulle :

$$(x - 5)^2 = 0 \iff x - 5 = 0 \iff x = 5.$$

L'équation a une **seule** solution : $S = \{5\}$

2. $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2 = 0 \iff 2x + 3 = 0$, donc $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 3, L'ARGUMENT DE SIGNE EN DEUX LIGNES

Pour tout réel x , le carré x^2 est positif ou nul, donc $x^2 + 9 \geq 9$.

Le membre de gauche ne prend jamais la valeur 0 : l'équation n'a aucune solution, et $S = \emptyset$

4. Soit a un réel non nul et b un réel. Un carré est nul si et seulement si sa base est nulle :

$$(ax + b)^2 = 0 \iff ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a},$$

la division par a étant légale.

pour tout réel a non nul et tout réel b , l'équation a exactement une solution

COMMENTAIRES

Trois visages du carré : le carré parfait qui fond en un seul facteur (une solution *unique*, là où le produit nul en donne d'habitude deux) ; la somme $x^2 + 9$ qu'aucune identité ne factorise, et qu'un argument de **signe** règle en deux lignes ; et le cas général de la question 4, qui range tout cela dans une phrase quantifiée. L'élève qui cherche à factoriser $x^2 + 9$ cherche un outil qui n'existe pas : savoir changer d'argument fait partie de la panoplie.

EXERCICE 24 · APL-A3-24

★★★★ ♦

Ne jamais diviser par l'inconnu

MÉTHODE On ne divise jamais par une expression qui peut s'annuler : tout ramener à zéro, factoriser par le facteur commun, conclure par le produit nul.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTIONS 1 ET 2, LE POURQUOI PUIS LE COMMENT

Question 1. Le geste « diviser les deux membres par $2x - 3$ » n'est légal que si $2x - 3$ n'est pas nul. Or $2x - 3$ s'annule pour $x = \frac{3}{2}$, et ce réel est justement solution de l'équation : pour $x = \frac{3}{2}$, les deux membres valent 0. En divisant, l'élève suppose sans le dire que $x \neq \frac{3}{2}$, et perd cette solution.

Question 2. Ramenons tout dans le membre de gauche, puis factorisons par le facteur commun $2x - 3$:

$$(2x - 3)(x + 1) - (2x - 3)(3x - 7) = 0 \iff (2x - 3)[(x + 1) - (3x - 7)] = 0.$$

Calculons le second facteur : $(x + 1) - (3x - 7) = -2x + 8$.

L'équation équivaut à $(2x - 3)(-2x + 8) = 0$, produit nul :

$$2x - 3 = 0 \text{ ou } -2x + 8 = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = 4.$$

Donc $S = \left\{ \frac{3}{2}; 4 \right\}$

3. Même précaution : ne pas diviser par x . Tout à gauche, facteur commun x :

$$9x^2 - 2x = 0 \iff x(9x - 2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{9},$$

donc $S = \left\{ 0; \frac{2}{9} \right\}$

COMMENTAIRES

C'est la version adulte du tour de magie de l'activité : le facteur commun n'est plus un x nu mais un binôme, et la solution qu'on perdrait en divisant, $\frac{3}{2}$, ne saute plus aux yeux. La parade est toujours la même, et elle est mécanique : tout ramener à zéro, factoriser, ne jamais simplifier par une expression qui contient l'inconnue. Simplifier et factoriser sont deux gestes différents ; seul le second est sans danger.

EXERCICE 25 · APL-A3-25

★★★★ ◆

Quotients à numérateur factorisable

MÉTHODE La valeur interdite d'abord, la factorisation du numérateur ensuite, et chaque candidat passe le filtre de l'interdite avant d'entrer dans S .

1. Valeur interdite : 4. Pour $x \neq 4$, le quotient est nul si et seulement si $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4) = 0$, soit $x = 4$ ou $x = -4$. Le candidat 4 est interdit, le candidat -4 survit : $S = \{-4\}$

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 2, CELLE OÙ IL NE SURVIT PERSONNE

Cherchons la valeur interdite : $2x - 10 = 0 \iff x = 5$. Le réel 5 est interdit.

Pour $x \neq 5$, le quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul. Or $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$, carré parfait : le numérateur ne s'annule que pour $x = 5$.

L'unique candidat est précisément la valeur interdite : aucun réel ne convient.

Donc $S = \emptyset$

3. Valeur interdite : $-\frac{1}{3}$. Numérateur : $9x^2 - 1 = (3x - 1)(3x + 1) = 0$, soit $x = \frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{1}{3}$. Le second candidat est interdit : $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

COMMENTAIRES

Le rituel du quotient prend ici tout son sens : la valeur interdite, écrite *d'abord*, devient un filtre que les candidats du numérateur doivent passer un par un. À la question 2, le filtre confisque l'unique candidat, et $S = \emptyset$ est une réponse complète, ni un échec ni une anomalie : le corrigé de l'exercice 1 l'avait déjà dit, l'ensemble vide se conclut comme les autres.

EXERCICE 26 · SYN-A3-26

★★★★ ◆

Le panachage

MÉTHODE Sept portes, sept méthodes déjà modélisées : l'exercice teste le CHOIX, la résolution suit. On nomme la porte, puis on résout.

1. Premier degré. $5x - 10 = 2x + 11 \iff 3x = 21 \iff x = 7$, donc $S = \{7\}$

2. Développement qui s'effondre. $x^2 + 12x + 36 = x^2 + 12 \iff 12x = -24 \iff x = -2$, donc $S = \{-2\}$

3. Différence de deux carrés. $25x^2 - 16 = (5x - 4)(5x + 4) = 0$, donc $S = \left\{-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right\}$

4. *Produit nul direct.* $7 - x = 0$ ou $2x + 9 = 0$, donc $S = \left\{-\frac{9}{2}; 7\right\}$

5. *Quotient nul.* Valeur interdite : -6 . Numérateur : $x^2 - 36 = (x - 6)(x + 6) = 0$, candidats 6 et -6 ; le second est interdit, donc $S = \{6\}$

6. *Argument de signe.* Pour tout réel x , $x^2 + 4 \geq 4 > 0$: le membre de gauche n'est jamais nul, donc $S = \emptyset$

7. *Automatisme* $\frac{a}{x} = b$. Valeur interdite : 0 . Pour x non nul, $3 = -12x \iff x = -\frac{1}{4}$, qui n'est pas interdite, donc $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

COMMENTAIRES

La difficulté n'est dans aucune des sept résolutions : elle est dans le vestibule. Nommer la porte avant d'entrer, comme le fait ce corrigé en italique, est une habitude qui rapporte : elle transforme un exercice de flair en exercice de classification, et la classification, elle, s'apprend. Les items 5 et 6 sont les plus discriminants : l'un exige le filtre de la valeur interdite, l'autre exige de renoncer à factoriser.

VI. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 27 · SYN-A3-27

★★★ ♦

L'építaphe de Diophante

MÉTHODE Une seule inconnue, la vie entière ; les épisodes successifs s'additionnent, et un multiple commun des dénominateurs solde l'équation d'un coup.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTIONS 1 ET 2, LA VIE MISE EN FRACTIONS PUIS L'ÉQUATION SOLDÉE

Question 1. Notons x la durée de la vie de Diophante, en années. Chaque épisode de l'építaphe est une fraction de cette vie : la jeunesse dure $\frac{x}{6}$, la barbe pousse pendant $\frac{x}{12}$, le mariage attend encore $\frac{x}{7}$, le fils naît 5 ans plus tard, vit $\frac{x}{2}$, et le deuil dure 4 ans. Ces durées, mises bout à bout, remplissent la vie entière :

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

Question 2. Le nombre 84 est un multiple commun de 6, 12, 7 et 2. Multiplions les deux membres par 84 : chaque terme est multiplié.

$$14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x \iff 75x + 756 = 84x \iff 756 = 9x \iff x = 84.$$

Donc Diophante a vécu 84 ans

3. La jeunesse s'achève à $\frac{84}{6} = 14$ ans ; la barbe est faite à $14 + 7 = 21$ ans ; le mariage a lieu à $21 + 12 = 33$ ans ; le fils naît quand Diophante a 38 ans, vit $\frac{84}{2} = 42$ ans, et meurt quand son père en a 80 ; quatre ans plus tard, Diophante meurt à 84 ans. Chaque fraction de 84 est bien un nombre entier d'années : 14, 7, 12 et 42.

COMMENTAIRES

La mise en équation repose sur une lecture : les épisodes sont *successifs* et remplissent la vie entière, c'est ce qui autorise à les additionner. Le choix de 84 comme multiplicateur n'a rien de magique : il suffit d'un multiple commun des dénominateurs, et le plus paresseux qui marche est le bon. L'épigramme est calibrée pour que tout tombe juste, et la question 3 le vérifie : c'est la confrontation du schéma en quatre temps, appliquée à une tombe vieille de quinze siècles.

EXERCICE 28 · APL-A3-28

★★★ ■

Les partages de Bagdad

MÉTHODE Le schéma en quatre temps de l'exercice 14 : l'inconnue est la part du benjamin, les deux autres s'expriment en fonction d'elle.

1. Notons b la part du benjamin, en dinars. L'aîné reçoit $2b$, le cadet $b + 100$. L'héritage entier se traduit par :

$$2b + (b + 100) + b = 1\,900 \iff 4b + 100 = 1\,900 \iff 4b = 1\,800 \iff b = 450.$$

benjamin : 450 dinars, cadet : 550, aîné : 900

2. $450 + 550 + 900 = 1\,900$: les trois parts épuisent l'héritage.

3. La moitié de l'héritage vaut 950 dinars, et $900 < 950$: l'aîné a tort

COMMENTAIRES

Le choix de l'inconnue fait la facilité : en notant b la part du benjamin, les deux autres parts s'écrivent sans fraction. L'élève qui note x la part de l'aîné obtient $x + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2} + 100\right) = 1\,900$, parfaitement résoluble mais plus rugueux : quand un énoncé compare tout le monde à quelqu'un, ce quelqu'un est la bonne inconnue. La question 3 rappelle qu'un double n'est pas une moitié du tout dès qu'il y a un troisième convive.

EXERCICE 29 · APR-A3-29

★★★★ ♦

La mule et l'ânesse

MÉTHODE Chaque échange déplace un sac dans les deux directions ; la seconde promesse exprime a en fonction de m , et la première devient une équation à une seule inconnue.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTIONS 1 ET 2, L'ÉCHANGE TRADUIT PUIS LA SUBSTITUTION

Question 1. Si la mule donne un sac à l'ânesse, il se passe deux choses : la mule porte $m - 1$ sacs, et l'ânesse en porte $a + 1$. La promesse « nous porterions autant l'une que l'autre » se traduit par :

$$m - 1 = a + 1.$$

Ajoutons -1 aux deux membres : $a = m - 2$.

Question 2. Si l'ânesse donne un sac à la mule, la mule porte $m + 1$ sacs et l'ânesse $a - 1$. La promesse

« je porterais le double de ta charge » se traduit par :

$$m + 1 = 2(a - 1).$$

Remplaçons a par $m - 2$, ce que la question 1 autorise :

$$m + 1 = 2((m - 2) - 1) = 2(m - 3) = 2m - 6 \iff 7 = m.$$

Donc la mule porte 7 sacs

3. L'ânesse porte $a = 7 - 2 = 5$ sacs. Rejouons les deux échanges. Si l'ânesse donne un sac : 8 contre 4, et $8 = 2 \times 4$, la première promesse dit vrai. Si la mule donne un sac : 6 contre 6, la seconde promesse dit vrai.

la mule porte 7 sacs, l'ânesse 5

COMMENTAIRES

L'erreur qui guette est de ne faire bouger qu'une seule bête : « si tu me donnais un sac » ajoute un sac d'un côté *et* en retire un de l'autre, si bien que l'écart varie de deux. C'est pour cela que $a = m - 2$: les charges ne diffèrent que de deux sacs, alors que l'échange inverse crée un rapport du simple au double. Deux inconnues en apparence, une seule en réalité : la substitution donnée par l'énoncé est le pont, et c'est le même geste qui servira pour les systèmes, plus tard, en première.

EXERCICE 30 · APR-A3-30

★★★★★ ☆

Le lion de bronze

MÉTHODE Raisonner en parts de bassin par journée : les débits s'additionnent, le temps cherché est celui où la somme des parts atteint un bassin entier.

1. En une journée, l'œil droit verse $\frac{1}{2}$ bassin, l'œil gauche $\frac{1}{3}$, la patte $\frac{1}{4}$; la gueule, qui remplit le bassin en une demi-journée, verse 2 bassins.

2. En t jours, les quatre jets versent ensemble $t \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 2 \right)$ bassin ; le bassin est plein quand ce total vaut 1, d'où l'équation de l'énoncé.

3. Au dénominateur commun 12 : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 2 = \frac{6 + 4 + 3 + 24}{12} = \frac{37}{12}$. L'équation devient :

$$t \times \frac{37}{12} = 1 \iff t = \frac{12}{37} \text{ jour.}$$

La journée valant douze heures, cette durée vaut $\frac{12}{37} \times 12 = \frac{144}{37}$ heures, soit 3 heures et $\frac{33}{37}$ d'heure ; or $\frac{33}{37} \times 60 \approx 53,5$, soit 54 minutes à l'unité près.

le bassin se remplit en $\frac{144}{37}$ h $\approx$ 3 h 54 min

4. Exprimé en heures, le temps de remplissage vaut $\frac{144}{37} \approx 3,9$. Plus vite que la gueule seule : moins de 6 heures ; pas mieux que quatre gueules : plus de $\frac{6}{4} = 1,5$ heure. L'encadrement du bon sens, $1,5 < \frac{144}{37} < 6$, est vérifié.

COMMENTAIRES

Le piège de l'énigme est dans les unités : la gueule ne verse pas « un sixième », elle verse *deux bassins par journée*, et c'est le seul jet dont la part dépasse l'unité. Le raisonnement en débits, que le cours ne théorise pas, est le cœur de toutes les énigmes de remplissage depuis l'Antiquité : additionner des temps ne veut rien dire, additionner des parts par unité de temps veut tout dire. L'encadrement final est une habitude d'ingénieur : borner un résultat par deux évidences coûte trois lignes et rattrape la moitié des erreurs de calcul.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les réponses des exemples jumelés du cours, le défi laissé en marge du paragraphe 2 et l'histoire complète du signe égal vous attendent sur le compagnon numérique du chapitre.