



CORRIGÉ • F1. GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Corrigé des trente exercices de l'Atelier

Ce corrigé se lit **la feuille en main** : les énoncés n'y sont pas recopiés. Une quinzaine de questions sont rédigées comme une copie idéale, à imiter jusqu'à la ponctuation ; les autres donnent la stratégie, le calcul et le résultat. Une recherche d'antécédents sans sa **phrase** de conclusion, un ensemble de définition écrit sans ses trois lignes, et un point déclaré sur une courbe sans que son abscisse ait été confrontée au domaine, ne sont pas des réponses.

RÉDACTION MODÈLE : la copie idéale, à imiter · MÉTHODE : la stratégie en une ligne, puis le calcul · COMMENTAIRES : ce que la solution enseigne

I. LE PROCÉDÉ, ET CE QU'IL N'EST PAS

EXERCICE 1 · THE-F1-01

★★ ■

Est-ce une fonction ?

MÉTHODE Une correspondance est une fonction lorsqu'elle associe à chaque objet de départ **un seul** objet d'arrivée. Pour l'accorder, il faut le vérifier pour tous ; pour la refuser, un seul objet de départ qui en reçoive deux suffit.

1. Un élève a une seule date de naissance : **c'est une fonction.**
2. Deux élèves sont nés le même jour : cette date reçoit deux élèves. **Ce n'est pas une fonction.**
3. $x \mapsto -x + 4$: **c'est une fonction.**
4. Le nombre 4 reçoit 2 et -2 , dont les carrés valent tous deux 4. **Ce n'est pas une fonction.**
5. Une commune est dans un seul département : **c'est une fonction.**
6. Un jour a une seule température maximale : **c'est une fonction.**

les correspondances 1, 3, 5 et 6 sont des fonctions

La question finale. C'est la correspondance 6. Les numéros 1 et 5 ne sont pas données par une formule non plus, mais elles sont *consultables* : un registre les contient déjà. La température maximale d'un jour, elle, ne se déduit d'aucun calcul : il faut avoir relevé le thermomètre. On peut pourtant en calculer une image, au sens où l'on peut en lire une : c'est ce que fait quiconque ouvre les archives de la station météorologique.

la correspondance 6 est la seule dont les valeurs se relèvent au lieu de se prévoir

COMMENTAIRES

La correspondance 4 est celle qui coûte le plus cher, parce qu'elle ressemble à une fonction : elle a une règle, elle a l'air d'un calcul. Ce qui lui manque, c'est l'**unicité**, et l'article défini du cours le disait déjà : on parle de l'image, jamais d'une image.

EXERCICE 2 · THE-F1-02

★★ ■

f ou $f(x)$?

MÉTHODE Un seul partage, appliqué huit fois : f est le **procédé**, $f(x)$ est un **nombre**. Toute phrase qui traite l'un comme l'autre est fautive.

n°	verdict	correction ou justification
1	fautive	« Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 1$. »
2	correcte	$f(3)$ est bien un nombre
3	fautive	« la courbe de f » : une courbe représente le procédé, pas un nombre
4	fautive	$f(2)$ est un nombre, l'image de 2 par f
5	correcte	c'est la lecture même de la notation
6	fautive	f est une fonction ; c'est $f(x)$ qui est un réel
7	correcte	c'est la définition de l'antécédent ... à une condition près
8	correcte	c'est l'asymétrie du cours : plusieurs antécédents sont permis

RÉDACTION MODÈLE – LA RELANCE, CELLE OÙ LA DÉFINITION SE RÉVÈLE INCOMPLÈTE

La phrase 7 dit que -2 est un antécédent de 7 dès que $f(-2) = 7$.

Si f est définie sur $[0 ; 10]$, le nombre -2 n'appartient pas à l'ensemble de définition : l'écriture $f(-2)$ ne désigne aucun nombre, et la phrase perd son sens.

Il faut donc y ajouter la condition d'appartenance. Un antécédent de 7 par f est un réel a **de l'ensemble de définition** tel que $f(a) = 7$.

pour tous réels a et k : a est un antécédent de k par f lorsque $a \in \mathcal{D}_f$ et $f(a) = k$

COMMENTAIRES

Cette condition-là est celle qu'on oublie toute l'année. Elle reviendra à l'exercice 6 (une solution qu'il faut écarter), à l'exercice 18 (un point qui a la bonne ordonnée et la mauvaise abscisse), à l'exercice 21 (une équation qui a des solutions dont le domaine ne veut pas) et à l'exercice 26 (un nombre qui n'a aucun antécédent alors que le calcul semble en donner un). Quatre exercices, un seul oubli.

L'échelle de Beaufort

MÉTHODE Une fonction donnée par un tableau se lit comme une autre : dans un sens on cherche la tranche qui contient le nombre de départ, dans l'autre on cherche toutes les tranches qui donnent la valeur d'arrivée.

1. 15 appartient à $[12 ; 20[$, et 30 à $[29 ; 39[$.

le degré de 15 km/h est 2, celui de 30 km/h est 4

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 2, CELLE OÙ LES ANTÉCÉDENTS SONT EN NOMBRE INFINI

Le degré 2 est associé à toutes les vitesses de la tranche $[12 ; 20[$, et à elles seules.

Cette tranche est un intervalle de réels : elle contient 12, 12,5, 13, mais aussi 12,0001, et il y en a une infinité.

Le cours annonçait qu'un nombre peut avoir aucun, un, plusieurs antécédents, et parfois une infinité. C'est ce dernier cas.

les antécédents de 2 sont les vitesses de $[12 ; 20[$, et il y en a une infinité

3. Le tableau s'arrête au degré 4.

le degré 7 n'a aucun antécédent dans ce tableau

4. Oui. À chaque vitesse du tableau correspond un degré, et un seul : aucune vitesse ne tombe dans deux tranches. C'est exactement la définition du cours, et elle n'exige aucune formule.

5. Les cinq tranches se recollent sans trou ni recouvrement, de 0 à 39 exclu.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 39\} = [0 ; 39[$$

COMMENTAIRES

L'échelle de Beaufort est une fonction en escalier : elle est constante par morceaux, et c'est précisément ce qui lui donne une infinité d'antécédents pour chacune de ses valeurs. Beaufort l'a construite en 1805 non pas sur des vitesses, qu'on ne savait pas mesurer en mer, mais sur *ce que le vent fait à la voile* : les vitesses ont été ajoutées bien plus tard. Le tableau est donc, historiquement, la fonction elle-même.

Un procédé, deux ensembles de départ

MÉTHODE Le calcul est le même, les ensembles de départ ne le sont pas. Chaque question se traite deux fois : une fois dans les entiers de 1 à 10, une fois dans les réels strictement positifs.

- $a(4) = 16$ et $A(4) = 16$.
- L'aire 25 vient du côté 5, qui est à la fois un entier de 1 à 10 et un réel strictement positif : **un antécédent par chacune**.
- L'aire 30 viendrait du côté $\sqrt{30} \approx 5,48$, qui n'est pas un entier : **aucun antécédent par a , un seul par**

A.

4. L'aire 121 vient du côté 11, entier mais supérieur à 10 : **un antécédent par A , aucun par a .**

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 5, CELLE OÙ L'ON PROUVE QU'IL N'Y A RIEN À TROUVER

Soit S une aire strictement positive. Posons $c = \sqrt{S}$.

Comme S est strictement positif, c l'est aussi : c appartient donc à $]0; +\infty[$, qui est l'ensemble de définition de A .

Et $A(c) = c^2 = S$ par définition de la racine carrée.

Donc c est un antécédent de S par A . Comme S était quelconque, aucune aire strictement positive n'échappe à la règle.

non : toute aire strictement positive possède un antécédent par A

6. Non. Deux fonctions sont la même lorsqu'elles ont le même ensemble de définition **et** la même image en chaque point. Ici le calcul coïncide, mais les ensembles de départ diffèrent : ce sont deux fonctions différentes.

COMMENTAIRES

La question 5 est d'un autre genre que les précédentes, et c'est pour cela qu'elle est rédigée. Les questions 2 à 4 demandaient d'*exhiber* : il suffit d'un exemple. La question 5 demande de prouver qu'aucun exemple n'existe, et un exemple ne suffit plus. Il a fallu prendre S quelconque et fabriquer son antécédent : c'est le premier raisonnement de l'année qui porte sur *tous* les nombres à la fois.

II. IMAGES ET ANTÉCÉDENTS, PAR LE CALCUL

EXERCICE 5 · APL-F1-05



Gammes d'images

MÉTHODE Remplacer x par le nombre, *entre parenthèses*, et calculer en respectant les priorités. Les parenthèses ne sont pas une politesse : elles décident du signe.

$$f(3) = 15 - 7 = 8$$

$$f(-2) = -10 - 7 = -17$$

$$g(-1) = 1 - 3 = -2$$

$$g(0,5) = 0,25 + 1,5 = 1,75$$

$$h(-4) = 0^2 = 0$$

$$h(1) = 5^2 = 25$$

$$k(0) = \frac{2}{1} = 2$$

$$k(-3) = \frac{2}{-2} = -1$$

$$m(2) = -4 + 6 = 2$$

$$m(-3) = -9 + 6 = -3$$

Le signe sur le carré d'un nombre négatif. C'est $m(-3)$. L'écriture $-x^2$ signifie $-(x^2)$: on élève d'abord au carré, on prend l'opposé ensuite. Le terme $-x^2$ vaut donc ici $-(-3)^2 = -9$, et non $+9$, d'où $m(-3) = -9 + 6 = -3$. L'erreur consiste à faire entrer le signe moins dans le carré, ce qui donnerait $9 + 6 = 15$.

Les quatre types d'équation

MÉTHODE Écrire l'équation $f(x) = k$, reconnaître son type, résoudre avec les gestes d'A3, écarter ce qui n'est pas dans le domaine, conclure par une phrase.

1. $4x - 5 = 19$ donne $4x = 24$, donc $x = 6$.

le nombre 19 a un seul antécédent par f , et c'est 6

2. $(2x + 7)(x - 1) = 0$: un produit est nul lorsque l'un au moins de ses facteurs l'est, donc $x = -\frac{7}{2}$ ou $x = 1$.

le nombre 0 a deux antécédents par p : $-3,5$ et 1

3. Un quotient est nul lorsque son numérateur l'est et que son dénominateur ne l'est pas : $5x - 15 = 0$ donne $x = 3$, et $3 \neq -4$.

le nombre 0 a un seul antécédent par q , et c'est 3

4. $x^2 = 16$ a deux solutions opposées.

le nombre 16 a deux antécédents par r : -4 et 4

5. $x^2 = -3$: un carré n'est jamais négatif.

le nombre -3 n'a aucun antécédent par r

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 6, CELLE OÙ UNE SOLUTION DOIT ÊTRE ÉCARTÉE

On écrit l'équation : $x^2 = 1$.

C'est une équation du type $x^2 = a$ avec a strictement positif : elle a deux solutions opposées, $x = 1$ et $x = -1$.

On examine maintenant le domaine. La fonction t est définie sur $[0 ; 2]$: le nombre 1 y appartient, le nombre -1 n'y appartient pas. Il faut donc écarter -1 .

le nombre 1 a un seul antécédent par t , et c'est 1

COMMENTAIRES

L'équation avait deux solutions, la fonction n'a qu'un antécédent : les deux mots ne comptent pas la même chose. Résoudre est un geste d'algèbre, chercher un antécédent est un geste de fonction, et le second se termine là où le premier avait fini, par un examen du domaine. C'est l'étape 4 de la méthode M2, celle qu'on saute.

Zéro, un, plusieurs

MÉTHODE Une seule fonction, quatre nombres : c'est l'équation $x^2 = k - 2$ qui change de nature à chaque fois.

1. $x^2 = 0$: le nombre 2 a un seul antécédent par u , et c'est 0.
2. $x^2 = 4$: le nombre 6 a deux antécédents par u , -2 et 2 .
3. $x^2 = -1$: le nombre 1 n'a aucun antécédent par u .
4. $x^2 = 9$: le nombre 11 a deux antécédents par u , -3 et 3 .

5. Un carré est toujours positif ou nul, donc $u(x) = x^2 + 2$ est toujours supérieur ou égal à 2 : aucune image ne descend en dessous de 2. Et 2 est bien atteint, puisque $u(0) = 2$.

L'image d'une expression littérale

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1, CELLE OÙ L'ON REMPLACE UNE LETTRE PAR UNE LETTRE

Remplacer x par $a + 1$, c'est écrire $a + 1$ **entre parenthèses** partout où x figurait :

$$f(a + 1) = (a + 1)^2 - 5(a + 1).$$

On développe le carré avec l'identité d'A1, et le produit par distributivité :

$$f(a + 1) = a^2 + 2a + 1 - 5a - 5.$$

On réduit :

pour tout réel a : $f(a + 1) = a^2 - 3a - 4$

MÉTHODE Les questions 2 et 3 sont le même geste, sur $-a$ puis sur $2a$. Les parenthèses décident encore : $(-a)^2 = a^2$, et $(2a)^2 = 4a^2$.

2. $f(-a) = (-a)^2 - 5(-a) = a^2 + 5a$.
3. $f(2a) = (2a)^2 - 5(2a) = 4a^2 - 10a$.
4. Pour $a = 2$: $f(3) = 9 - 15 = -6$ et $a^2 - 3a - 4 = 4 - 6 - 4 = -6$; $f(-2) = 4 + 10 = 14$ et $a^2 + 5a = 4 + 10 = 14$; $f(4) = 16 - 20 = -4$ et $4a^2 - 10a = 16 - 20 = -4$. Les trois contrôles concordent.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 5, CELLE OÙ UN CONTRE-EXEMPLE SUFFIT

Prenons $a = 2$.

D'un côté, $f(a + 1) = f(3) = 9 - 15 = -6$.

De l'autre, $f(a) + f(1) = f(2) + f(1) = (4 - 10) + (1 - 5) = -6 - 4 = -10$.

Or $-6 \neq -10$: l'égalité annoncée est fautive pour $a = 2$, donc elle est fautive.

$f(a + 1) \neq f(a) + f(1)$ en général : le contre-exemple $a = 2$ suffit

COMMENTAIRES

Une fonction n'est pas une machine qui distribue. L'erreur $f(a+b) = f(a) + f(b)$ est la plus tenace de toute la scolarité : elle reviendra sur les racines carrées, sur les logarithmes, sur les dérivées. Le remède est toujours le même, et il coûte deux lignes : prendre un nombre, calculer les deux membres, comparer.

EXERCICE 9 · THE-F1-09

★★★ ◆

Chasse à l'erreur : le bon résultat, le mauvais chemin

RÉDACTION MODÈLE – QUESTIONS 1 À 3, CELLES OÙ UNE RÉPONSE JUSTE NE PROUVE RIEN

Le résultat est juste. On vérifie : $f(2) = 5 \times 2 - 8 = 2$, donc 2 est bien un antécédent de 2 par f .

Le raisonnement ne l'est pas. L'élève a calculé $f(2)$, c'est-à-dire l'image de 2. Or on lui demandait les antécédents de 2, ce qui est la question inverse. Il a fait le bon calcul pour une autre question.

La coïncidence s'explique. Le nombre 2 est le seul réel égal à sa propre image par f : en effet, $5x - 8 = x$ équivaut à $4x = 8$, donc à $x = 2$. C'est parce que l'énoncé portait sur ce nombre-là, et sur lui seul, que l'erreur de méthode est passée inaperçue.

La recherche correcte. On écrit l'équation $f(x) = 2$, c'est-à-dire $5x - 8 = 2$. C'est une équation du premier degré : $5x = 10$, donc $x = 2$. Ce nombre appartient à $\mathbb{R}$, il n'y a rien à écarter.

le nombre 2 a un seul antécédent par f , et c'est 2

4. Le raisonnement de l'élève donnerait $f(5) = 25 - 8 = 17$, et il annoncerait 17. La recherche correcte résout $5x - 8 = 5$, soit $5x = 13$, donc $x = 2,6$.

le nombre 5 a un seul antécédent par f , et c'est 2,6

5. Il faut lire si le nombre donné est celui **de départ**, auquel cas on calcule une image en remplaçant, ou celui **d'arrivée**, auquel cas on cherche des antécédents en résolvant.

COMMENTAIRES

C'est l'exercice le plus important de la feuille, et il ne contient aucun calcul difficile. Une réponse juste obtenue par un raisonnement faux est plus dangereuse qu'une réponse fausse : elle ne prévient pas. La question 4 est là pour cela, et elle est impitoyable : le même élève, avec la même méthode, se trompe de plus de quatorze unités.

EXERCICE 10 · APR-F1-10

★★★★ ◆

Qui partage l'image de 1 ?

MÉTHODE Chaque question revient à résoudre $(x-3)^2 = k$, avec k calculé d'abord. Une équation du type $X^2 = a$, lorsque a est strictement positif, se traite en revenant à $X = \sqrt{a}$ ou $X = -\sqrt{a}$; les cas $a = 0$ et $a < 0$ se traitent à part, et c'est tout l'objet de la question 5.

1. $f(1) = (1-3)^2 = 4$.

2. $(x-3)^2 = 4$ donne $x-3 = 2$ ou $x-3 = -2$, donc $x = 5$ ou $x = 1$.

deux réels ont l'image 4 : 1 et 5

3. $f(3) = 0$, et $(x-3)^2 = 0$ donne $x = 3$ seulement.

4. $f(0) = 9$, et $(x-3)^2 = 9$ donne $x = 6$ ou $x = 0$.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 5, CELLE OÙ IL FAUT DISCUTER

On cherche les antécédents de k , c'est-à-dire les réels x tels que $(x-3)^2 = k$.

Un carré est toujours positif ou nul. Trois cas se présentent donc.

Si $k < 0$, l'égalité est impossible : le nombre k n'a aucun antécédent.

Si $k = 0$, l'égalité s'écrit $(x-3)^2 = 0$, donc $x-3 = 0$: le nombre 0 a un seul antécédent, 3.

Si $k > 0$, l'égalité donne $x-3 = \sqrt{k}$ ou $x-3 = -\sqrt{k}$, et ces deux nombres sont distincts puisque $\sqrt{k} \neq 0$: le nombre k a deux antécédents, $3 - \sqrt{k}$ et $3 + \sqrt{k}$.

$k < 0$: aucun $k = 0$: un seul $k > 0$: deux

6. C'est le réel 3. Son image, 0, est la seule à n'avoir qu'un antécédent : tous les autres nombres atteints en ont deux, et se partagent donc leur image avec un autre réel.

COMMENTAIRES

La discussion selon k est le premier raisonnement de l'année où l'on ne calcule pas : on classe. Les questions 2 à 4 étaient les trois cas déguisés en exemples, et la question 5 ne fait que leur retirer leur déguisement. C'est aussi la première fois que $\sqrt{k}$ apparaît avec k inconnu : l'écriture n'a de sens que dans le cas $k > 0$, et c'est bien pourquoi la discussion précède le calcul.

III. L'ENSEMBLE DE DÉFINITION

EXERCICE 11 · APL-F1-11



Du français à la compréhension

MÉTHODE Trois écritures, toujours dans cet ordre : poser la condition entre accolades, la traiter, l'expliciter en intervalle.

Les trois lignes se suivent, aucune ne se saute.

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\} =]6; +\infty[$

2. $\{x \in \mathbb{R} \mid 5x - 3 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{5}\right\} = \left[\frac{3}{5}; +\infty[$

3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

4. $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \text{ et } x \leq 0\} =]-5; 0]$

5. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0\} = \{0\}$

COMMENTAIRES

Le dernier ensemble n'est pas un intervalle : c'est un ensemble à un seul élément, et il s'écrit avec des accolades.

On le retrouvera à l'exercice 16, où il faudra le fabriquer exprès.

EXERCICE 12 · APL-F1-12



Lire une écriture par compréhension

MÉTHODE Lire la barre verticale « tels que », traduire la condition en français, puis placer les bornes sur une droite graduée pour choisir les crochets.

- « les réels inférieurs ou égaux à 6 » = $]-\infty; 6]$
- « les réels différents de 0 et de 5 » = $]-\infty; 0[\cup]0; 5[\cup]5; +\infty[$
- $7 - x > 0$ équivaut à $x < 7$: $]-\infty; 7[$
- « les réels supérieurs ou égaux à -1 et strictement inférieurs à 4 » = $[-1; 4[$
- aucun réel n'est à la fois supérieur à 2 et inférieur à 1 : l'ensemble est $\emptyset$

EXERCICE 13 · APL-F1-13



Les deux obstacles

MÉTHODE Repérer les obstacles, poser la condition par compréhension, la traiter, écrire en réunion s'il y a des trous. Un dénominateur exige non nul, un radical exige positif ou nul.

- $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 9 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\} = [-3; +\infty[$
- $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 7 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -7\} =]-\infty; -7[\cup]-7; +\infty[$
- Le dénominateur est un produit : nier le « ou » de son annulation donne un « et ».

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x+4) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \text{ et } x \neq -4\} \\ &=]-\infty; -4[\cup]-4; 1[\cup]1; +\infty[.\end{aligned}$$

- $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid 6 - 2x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\} =]-\infty; 3]$
- Deux obstacles, donc deux conditions à poser ensemble.

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \geq 0 \text{ et } x - 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \text{ et } x \neq 2\} \\ &= [-1; 2[\cup]2; +\infty[.\end{aligned}$$

- Aucun obstacle : $x^2 \geq 0$ pour tout réel x , donc $x^2 + 1 \geq 1$, et le dénominateur ne s'annule jamais. La condition ne rejette rien : $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$

Les deux surprises. C'est la 5 qui porte les deux obstacles à la fois, et la 6 qui n'en porte aucun : son dénominateur *ressemble* à un obstacle, mais un carré augmenté de 1 ne peut pas s'annuler.

La boîte sans couvercle

MÉTHODE Le monde impose le domaine avant tout calcul. Ici trois longueurs doivent être strictement positives, et c'est la plus exigeante des trois conditions qui l'emporte.

1. Le fond mesure $30 - 2x$ sur $20 - 2x$, et la hauteur de la boîte vaut x .
2. $V(x) = x(30 - 2x)(20 - 2x)$.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTIONS 3 ET 4, CELLES OÙ LE DOMAINE SE LIT SUR L'OBJET

Trois longueurs doivent être strictement positives : la hauteur x , et les deux dimensions du fond.

$$x > 0, \quad 30 - 2x > 0, \quad 20 - 2x > 0.$$

On pose l'ensemble de définition par compréhension, puis on traite les trois conditions l'une après l'autre :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_V &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ et } 30 - 2x > 0 \text{ et } 20 - 2x > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \text{ et } x < 15 \text{ et } x < 10\} \\ &=]0; 10[. \end{aligned}$$

Un carré de côté nul ne se découpe pas, et un côté de 10 cm ferait disparaître le fond : l'intervalle est ouvert aux deux bouts.

5. C'est la condition $20 - 2x > 0$, qui donne $x < 10$. La condition $30 - 2x > 0$ donne $x < 15$: tout nombre inférieur à 10 est déjà inférieur à 15, elle n'apporte donc rien. C'est le plus petit des deux côtés qui décide.
6. $V(3) = 3 \times 24 \times 14 = 1008$, soit 1008 cm^3 . Pour $V(11)$: le nombre 11 n'appartient pas à $\mathcal{D}_V$, la boîte n'existe pas, et l'écriture $V(11)$ ne désigne aucun nombre.

COMMENTAIRES

La formule $x(30 - 2x)(20 - 2x)$ donnerait pourtant un résultat pour $x = 11$: elle vaut $11 \times 8 \times (-2) = -176$. Un volume négatif : la formule calcule, mais elle ne sait pas que la boîte a cessé d'exister. C'est le domaine qui le sait, et c'est pourquoi on l'écrit avant.

Chasse à l'erreur : la condition qui ne dit rien

1. La bascule est à la deuxième ligne : le « ou » de l'annulation aurait dû devenir un « et ».

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 2, CELLE OÙ LA CONDITION FAUTIVE SE RETOURNE CONTRE ELLE-MÊME

Testons le nombre -7 dans la condition écrite par l'élève.

Il est vrai que $-7 \neq 2$. La condition « $x \neq 2$ ou $x \neq -7$ » est donc **satisfaite** par -7 , puisqu'il suffit qu'une des deux exigences le soit.

Or pour $x = -7$, le dénominateur vaut $(-7 - 2) \times (-7 + 7) = (-9) \times 0 = 0$. La condition de l'élève laisse donc passer un nombre qui annule le dénominateur.

Pire : cette condition est vraie pour **tout** réel. Comme 2 et -7 sont différents, aucun nombre ne peut être égal aux deux à la fois, donc tout réel diffère d'au moins l'un des deux.

la condition de l'élève est vraie pour tout réel : elle ne dit rien

3. Les trois lignes correctes :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_f &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2)(x+7) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2 \text{ et } x \neq -7\} \\ &=]-\infty; -7[\cup]-7; 2[\cup]2; +\infty[.\end{aligned}$$

4. La deuxième copie a oublié le morceau du milieu, $] -7; 2[$. Deux valeurs interdites coupent la droite en **trois** intervalles, pas en deux.

COMMENTAIRES

Nier un « ou » donne un « et » : c'est le seul point de logique du chapitre, et il se rejoue chaque fois qu'un dénominateur est factorisé. La deuxième copie montre que l'erreur peut survivre à la logique : elle avait la bonne condition et s'est trompée en comptant les morceaux. Deux fautes, deux endroits, un seul remède : dessiner la droite graduée et placer les trous.

EXERCICE 16 · APR-F1-16

★★★★★

Fabriquer un domaine

MÉTHODE On renverse le rituel : au lieu de lire une condition dans une expression, on écrit une expression qui produise la condition voulue. Un dénominateur exclut, un radical exige.

1. Trois nombres distincts découpent la droite en **quatre** intervalles ; pour tout entier naturel n , n nombres distincts en $n+1$ intervalles.

2. Il faut exclure -5 et 2 : $\frac{1}{(x+5)(x-2)}$ convient.

3. Il faut exiger $x \geq 3$: $\sqrt{x-3}$ convient.

4. Il faut exiger $x \geq 3$ et exclure 7 : $\frac{\sqrt{x-3}}{x-7}$ convient, et son ensemble de définition s'écrit $[3; 7[\cup]7; +\infty[$.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 5, CELLE OÙ DEUX CONDITIONS SE REFERENT L'UNE SUR L'AUTRE

On cherche une expression dont l'ensemble de définition ne contienne qu'un seul nombre, disons 3. Il faut donc une condition qui n'admette que 3. Une seule inégalité **du premier degré** ne suffira pas : elle laisse toujours passer un intervalle entier. Il en faut deux, qui se referment.

Considérons $\sqrt{x-3} + \sqrt{3-x}$.

Le premier radical exige $x-3 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq 3$. Le second exige $3-x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 3$.

Les deux ensemble n'admettent que $x = 3$.

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ et } x \leq 3\} = \{3\}$$

6. Oui, avec le même procédé, mais deux exigences incompatibles : $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x}$ exige $x \geq 2$ et $x \leq 1$. Aucun réel ne le peut, donc $\mathcal{D} = \emptyset$.

COMMENTAIRES

Une fonction dont l'ensemble de définition est vide n'a aucune image, aucun antécédent, et sa courbe ne contient aucun point : c'est un objet parfaitement légitime et parfaitement inutile. Le fabriquer exprès a pourtant une vertu, celle de montrer que l'ensemble de définition n'est pas un détail administratif : c'est lui qui décide si la fonction existe.

IV. LE COUPLE, LE POINT, LA COURBE

EXERCICE 17 · APL-F1-17



Couple ou paire ?

MÉTHODE Un couple retient l'ordre, une paire ne le retient pas. Accolades pour la paire, parenthèses pour le couple.

1. Les couples $(4; -1)$ et $(-1; 4)$ ne sont **pas** égaux : leurs abscisses diffèrent. Les paires $\{4; -1\}$ et $\{-1; 4\}$, elles, sont égales : ce sont les mêmes deux nombres.
2. Deux couples sont égaux lorsque les abscisses coïncident et les ordonnées aussi : $x + 1 = 5$ donne $x = 4$, et $3 = y - 2$ donne $y = 5$.
3. Placement dans le repère.
4. $A(2; -3)$ et $C(0; -3)$ ont la même ordonnée -3 ; $B(-3; 2)$ et $D(-3; 0)$ ont la même abscisse -3 .
5. Non. À chaque point du plan correspond un seul couple de coordonnées, et réciproquement.

EXERCICE 18 · APL-F1-18



Le point est-il sur la courbe ?

MÉTHODE Deux conditions, dans cet ordre : l'abscisse est-elle dans l'ensemble de définition ? l'image vaut-elle l'ordonnée ? Chaque conclusion nomme celle qui a tranché.

1. Sur $\mathbb{R}$, la première condition est toujours remplie.

point	$f(a)$	ordonnée	verdict, et ce qui l'a tranché
$A(0; 0)$	0	0	appartient : l'ordonnée coïncide
$B(2; -2)$	-2	-2	appartient : l'ordonnée coïncide
$C(-1; 2)$	4	2	n'appartient pas : l'ordonnée a tranché
$D(3; 0)$	0	0	appartient : l'ordonnée coïncide
$E(4; 4)$	4	4	appartient : l'ordonnée coïncide

2. Sur $[0; 3]$, la première condition n'est plus automatique. Les abscisses -1 et 4 n'y appartiennent pas.

point	abscisse dans $[0; 3]$?	verdict
$A(0; 0)$	oui	appartient
$B(2; -2)$	oui	appartient
$C(-1; 2)$	non	n'appartient pas : le domaine a tranché
$D(3; 0)$	oui	appartient
$E(4; 4)$	non	n'appartient pas : le domaine a tranché

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 3, CELLE OÙ IL FAUT DISTINGUER LE VERDICT DE LA RAISON

Comparons les deux tableaux point par point.

Le point E change de verdict. Sur $\mathbb{R}$ il appartenait à la courbe, puisque $f(4) = 4$; sur $[0; 3]$ il n'y appartient plus, car 4 n'est pas dans l'ensemble de définition. C'est la seule réponse qui bascule.

Le point C change de raison, pas de verdict. Dans les deux cas il n'appartient pas à la courbe. Mais sur $\mathbb{R}$ c'est l'ordonnée qui l'écartait, $f(-1)$ valant 4 et non 2 ; sur $[0; 3]$ c'est le domaine, et la question de l'ordonnée ne se pose même plus.

Les trois autres points ne changent ni de verdict ni de raison.

E change de verdict	C change seulement de raison
-----------------------	--------------------------------

COMMENTAIRES

Le cas de C est le plus instructif, et c'est celui qu'on ne remarque pas. Deux copies peuvent écrire la même conclusion et n'avoir pas fait le même travail : l'une a calculé une image, l'autre a regardé un domaine. C'est pourquoi l'énoncé exige que chaque conclusion **nomme sa condition** : sans cela, on ne peut pas distinguer une réponse comprise d'une réponse devinée.

EXERCICE 19 · APL-F1-19



Construire la courbe point par point

MÉTHODE Un tableau, neuf couples, neuf points, puis un trait qui les relie. Le pas d'un demi double le nombre de points et rend le tracé plus sûr.

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	6	2,5	0	-1,5	-2	-1,5	0	2,5	6

2. Les neuf couples : $(-1; 6)$, $(-0,5; 2,5)$, $(0; 0)$, $(0,5; -1,5)$, $(1; -2)$, $(1,5; -1,5)$, $(2; 0)$, $(2,5; 2,5)$, $(3; 6)$.

3. Placement et tracé.

4. $f(0,25) = 2 \times 0,0625 - 4 \times 0,25 = 0,125 - 1 = -0,875$, et 0,25 appartient bien à $[-1; 3]$: le point appartient à $\mathcal{C}_f$.

5. La courbe compte une **infinité** de points, un par réel de $[-1; 3]$. Le tracé n'en montre que neuf, et le trait ne fait que les relier. Un pas d'un quart en donnerait dix-sept : le tracé serait plus sûr, mais toujours pas complet.

Un paramètre dans le point

MÉTHODE Si l'inconnue est l'ordonnée, on calcule une image. Si elle est l'abscisse, on résout une équation.

1. $m = f(3) = 18 - 5 = 13$. Une valeur.
2. $2m^2 - 5 = 3$ donne $m^2 = 4$: $m = -2$ ou $m = 2$. Deux valeurs.
3. $2m^2 - 5 = -5$ donne $m^2 = 0$: $m = 0$. Une valeur.
4. $2m^2 - 5 = -7$ donne $m^2 = -1$: impossible. Aucune valeur.

La phrase. Dans le premier cas on cherche l'image de 3, et une image est unique. Dans les trois autres on cherche les **antécédents** d'un nombre, et un nombre peut en avoir zéro, un ou plusieurs.

Les points d'ordonnée donnée

MÉTHODE Un point de C_g d'ordonnée k a pour abscisse un antécédent de k . La question compte donc des antécédents, et le domaine $[-4; 4]$ a voix au chapitre.

1. $x^2 - 6 = 3$ donne $x^2 = 9$, donc $x = -3$ ou $x = 3$. Les deux appartiennent à $[-4; 4]$: **deux points**, $(-3; 3)$ et $(3; 3)$.
2. $x^2 = 0$ donne $x = 0$: **un seul point**, $(0; -6)$.
3. $x^2 = -4$: impossible. **Aucun point**.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 4, CELLE OÙ L'ÉQUATION A DES SOLUTIONS DONT LE DOMAINE NE VEUT PAS

On cherche les points d'ordonnée 11, c'est-à-dire les antécédents de 11 par g .

On écrit l'équation : $x^2 - 6 = 11$, donc $x^2 = 17$.

Cette équation a **deux solutions**, $x = \sqrt{17}$ et $x = -\sqrt{17}$.

Il reste à les confronter au domaine. Comme $4^2 = 16$ et que $16 < 17$, le nombre $\sqrt{17}$ est strictement supérieur à 4 ; de même $-\sqrt{17}$ est strictement inférieur à -4 . Aucune des deux solutions n'appartient à $[-4; 4]$.

aucun point de C_g n'a pour ordonnée 11, bien que l'équation ait deux solutions

5. Un seul point, $(2; -2)$: c'est l'unicité de l'image. Mais la réponse dépend de l'abscisse choisie, et il faut distinguer deux cas : si l'abscisse appartient à $[-4; 4]$, il y a exactement un point ; sinon, il n'y en a aucun.

COMMENTAIRES

La question 4 est le miroir exact de la question 3, et c'est ce qui la rend redoutable. Dans les deux cas la réponse est « aucun point », mais pour deux raisons opposées : à la question 3 l'algèbre refuse, à la question 4 elle accepte et c'est le domaine qui refuse. Un élève qui écrit « impossible » aux deux n'a compris qu'une moitié du chapitre.

V. LIRE UNE COURBE

EXERCICE 22 · APL-F1-22

★★ ■

Images et antécédents sur un tracé

MÉTHODE Pour une image : partir de l'abscisse, rejoindre la courbe, lire l'ordonnée. Pour des antécédents : partir de l'ordonnée, balayer d'un bout à l'autre du domaine, relever *toutes* les rencontres.

1. $h(-3) = 1,5$, $h(2) = -2$, $h(4) = -1$.

2. L'horizontale de hauteur 1 rencontre la courbe **deux fois** : en $x = -4$, qui est le bord gauche du tracé, et en un point d'abscisse voisine de $-2,4$.

le nombre 1 a deux antécédents par h : -4 et environ $-2,4$

3. L'horizontale de hauteur -2 rencontre la courbe **trois fois** : en un point d'abscisse voisine de $0,4$, puis en $x = 2$ et en $x = 5$.

le nombre -2 a trois antécédents par h : environ $0,4$, puis 2 et 5

4. La courbe ne monte jamais au-delà d'une hauteur voisine de $1,5$.

le nombre $2,5$ n'a aucun antécédent par h

5. $\mathcal{D}_h = [-4; 5]$

6. Une lecture est **sûre** lorsque l'abscisse est un nombre entier : la verticale à suivre est alors une ligne du quadrillage, et l'on voit sans hésitation si la courbe la coupe sur une graduation, comme pour $h(2) = -2$ et $h(4) = -1$, ou exactement à mi-carreau, comme pour $h(-3) = 1,5$. Les abscisses -4 , 2 et 5 des questions 2 et 3 sont sûres pour la même raison.

Une lecture est **approchée** lorsque la rencontre ne tombe sur aucune verticale du quadrillage : c'est le cas des deux antécédents voisins de $-2,4$ et de $0,4$, dont on ne peut affirmer que le premier chiffre.

EXERCICE 23 · APL-F1-23

★★ ■

Sûre ou approchée ?

x	-4	-2	0	2	4
$h(x)$	1	$0,5$	$-1,5$	-2	-1

2. Les cinq lectures sont **sûres**, parce que les cinq abscisses sont entières : on suit à chaque fois une verticale du quadrillage. Trois d'entre elles tombent sur une graduation (1 , -2 , -1), deux tombent exactement à mi-carreau ($0,5$ et $-1,5$), ce qui se voit tout aussi bien.

3. Ici l'abscisse $2,5$ n'est **pas** entière : il n'y a aucune verticale du quadrillage à suivre, et il faudrait interpoler dans les deux directions à la fois. C'est ce qui distingue cette lecture des cinq précédentes.

La courbe passe par $(2; -2)$ et par $(3; -1,5)$. Entre les deux, on ne peut rien lire de plus précis que « la valeur est comprise entre -2 et $-1,5$ ». La lecture ne permet donc **ni de confirmer ni d'infirmer**

l'affirmation : elle permet seulement d'affirmer l'encadrement.

$$-2 < h(2,5) < -1,5, \text{ et c'est tout ce que le tracé garantit}$$

COMMENTAIRES

La valeur exacte est en fait $-1,75$, et le camarade avait raison. Cela ne change rien à la réponse : *avoir raison et pouvoir le montrer* sont deux choses, et un tracé ne montre pas les centièmes. Pour trancher il faudrait une expression de h , que cet exercice ne donne pas, et c'est justement ce qui distingue une lecture d'un calcul.

EXERCICE 24 · THE-F1-24

★★★ ■

Ce que la courbe ne dit pas

MÉTHODE Sur un domaine troué, chaque question a deux réponses possibles : celle que la courbe donne, et « la question ne se pose pas ». Il faut d'abord regarder si le nombre est dans le domaine.

1. Oui : -3 appartient au premier morceau, et $f(-3) = 0$.
2. Non : 0 n'appartient pas à l'ensemble de définition. L'écriture $f(0)$ ne désigne aucun nombre.
3. C'est faux, et de deux façons. Entre -1 et 1 la fonction n'est pas définie : elle ne vaut pas 0 , elle ne vaut rien. Un trou n'est pas un zéro.
4. Non plus. Le trou est une information : il dit qu'entre -1 et 1 il n'y a rien à dessiner, parce qu'aucun point $(x; f(x))$ n'existe pour ces abscisses.
5. Le nombre $3,5$ n'a aucun antécédent. La réponse tient à la **forme de la courbe**, qui ne monte jamais jusqu'à cette hauteur, et non au domaine : c'est le cas inverse de celui des questions 2 et 3.

COMMENTAIRES

Les questions 3 et 4 sont les deux erreurs symétriques que fait un élève devant un domaine troué : l'une remplit le trou avec un zéro, l'autre le nie. Toutes deux viennent du même réflexe, celui de croire qu'une courbe doit être continue parce qu'on la dessine d'un trait. Le disque du camion, au début de ce chapitre, disait déjà le contraire.

EXERCICE 25 · SYN-F1-25

★★★ ♦

Domaine et hauteurs

1. La condition comporte un « ou » parce que le domaine a deux morceaux :

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq -1 \text{ ou } 1 \leq x \leq 6\} = [-5; -1] \cup [1; 6].$$

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 2, CELLE OÙ L'ON DOIT TRIER SES PROPRES LECTURES

On trace l'horizontale de hauteur 1 et on la suit d'un bout à l'autre des **deux** morceaux.

Sur le morceau de gauche, elle rencontre la courbe deux fois : en $x = -4$, où le tracé passe exactement par une intersection du quadrillage, et en un point situé entre -3 et -2 , dont l'abscisse vaut environ $-2,3$.

Sur le morceau de droite, elle la rencontre encore deux fois : en $x = 2$, également sur une intersection du quadrillage, et en un point situé entre 4 et 5 , d'abscisse voisine de $4,3$.

Le nombre 1 a donc **quatre** antécédents. Deux de ces lectures sont sûres, -4 et 2 , parce que la courbe y passe par un point du quadrillage ; les deux autres ne sont qu'approchées, parce que la courbe y coupe l'horizontale entre deux graduations.

quatre antécédents : -4 et 2 (sûrs), environ $-2,3$ et $4,3$ (approchés)

3. La hauteur 3 n'est atteinte qu'une fois, en $x = -1$; la hauteur -2 n'est atteinte qu'une fois également, en $x = 6$. Les deux lectures sont sûres, les deux abscisses étant entières.

le nombre 3 a un seul antécédent par f , -1 ; le nombre -2 en a un seul aussi, 6

4. Ce sont les deux extrémités du tracé : -1 ferme le premier morceau, 6 ferme le second. La hauteur 3 est la plus haute que la courbe atteigne, et -2 la plus basse : ici, chacune de ces deux hauteurs n'est touchée qu'une fois, au bout d'un morceau, là où la courbe s'arrête au lieu de redescendre.

EXERCICE 26 · SYN-F1-26

★★★★ ♦

Le point qui manque

MÉTHODE Simplifier une écriture ne change pas l'ensemble de définition : celui-ci se lit sur l'expression de départ, et une fois pour toutes.

1. $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

2. L'identité d'A1 donne $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Donc, pour tout réel x différent de 1 :

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

3. $f(-3) = -2$, $f(0) = 1$, $f(2) = 3$, $f(5) = 6$.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 4, CELLE OÙ LA SIMPLIFICATION TEND UN PIÈGE

Le test d'appartenance a deux conditions, et la première est celle de l'abscisse.

L'abscisse du point A vaut 1. Or 1 n'appartient pas à $\mathcal{D}_f$: la première condition échoue, et le verdict est déjà rendu.

Il est vrai que l'écriture simplifiée $x + 1$ donnerait 2 pour $x = 1$, ce qui est bien l'ordonnée du point. Mais cette écriture n'est valable que pour x différent de 1 : elle ne dit rien en 1, où f n'est pas définie.

le point $A(1; 2)$ n'appartient pas à $\mathcal{C}_f$: son abscisse n'est pas dans le domaine

5. Au-dessus de 1, il ne faut **rien** dessiner : pas même un point vide. Les points obtenus sont alignés, et le tracé est cet alignement privé d'un seul point.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 6, CELLE OÙ LE CALCUL PROPOSE UNE SOLUTION QUE LE DOMAINE REFUSE

On cherche les antécédents de 2, c'est-à-dire les réels x de $\mathcal{D}_f$ tels que $f(x) = 2$.

Pour x différent de 1, l'égalité $f(x) = 2$ s'écrit $x + 1 = 2$, donc $x = 1$.

Mais 1 n'appartient pas à $\mathcal{D}_f$: cette solution doit être écartée, et il n'en reste aucune.

le nombre 2 n'a aucun antécédent par f

7. Soit k un réel différent de 2. L'équation $x + 1 = k$ donne $x = k - 1$, qui est différent de 1 puisque k est différent de 2 : ce nombre appartient donc à $\mathcal{D}_f$, et c'est un antécédent de k . Tout réel autre que 2 possède ainsi un antécédent.

2 est le seul nombre sans antécédent par f

COMMENTAIRES

Le trou du domaine se voit sur la courbe, où il manque un point ; le nombre 2, lui, est le trou de *l'autre côté*, celui des images. Un point manque à l'horizontale, un nombre manque à la verticale, et c'est le même point qui manque : celui de coordonnées $(1 ; 2)$. C'est la première fois du chapitre que l'asymétrie image/antécédent se lit comme une symétrie.

VI. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 27 · APL-F1-27

★★ ■

Oresme, dresser une hauteur

MÉTHODE La fonction est définie sur les huit positions, et sur elles seules : on lit une image en montant, des antécédents en balayant les huit hauteurs.

- | | |
|---|--|
| <p>1. Au-dessus de 3 : l'intensité 5. Au-dessus de 6 : l'intensité 4.</p> <p>2. L'intensité 2 est dressée au-dessus de 1 et de 7 : deux antécédents.</p> | <p>3. L'intensité 6 est dressée au-dessus de 4 et de 5 : deux antécédents.</p> <p>4. L'intensité 7 n'est jamais atteinte : aucun antécédent.</p> |
|---|--|

5. Il a déjà l'essentiel : une ligne de référence pour ce qui s'étend, une hauteur dressée au-dessus de chaque position pour l'intensité, et l'idée que cette hauteur *représente* une quantité. C'est exactement le geste que l'on fait en plaçant le point $(x ; f(x))$. Ce qui lui manque n'est pas l'idée, ce sont les mots et les graduations.

COMMENTAIRES

Oresme écrit vers 1350, soit trois siècles avant Descartes et quatre avant Euler. Il n'a ni axe des ordonnées, ni unité, ni le mot fonction : il a la *configuration*, et il s'en sert pour comparer des mouvements. Une idée peut donc être en usage pendant des siècles avant d'avoir un nom, et c'est le nom, souvent, qui arrive en dernier.

Le pouls sur le papier

MÉTHODE Le tracé est une fonction du temps : chaque instant a une hauteur et une seule, et l'on y lit images et antécédents comme sur n'importe quelle courbe.

1. La bande porte **quatre** battements sur ces trois secondes.
2. À l'instant 1,5 s, la hauteur vaut 4 mm.
3. La hauteur 12 mm est atteinte **quatre** fois, une par battement, aux instants voisins de 0,2 s, 0,95 s, 1,7 s et 2,45 s. Ces lectures sont approchées : les pics ne tombent pas sur les graduations.
4. Le stylet est à un seul endroit à la fois : à chaque instant il ne peut écrire qu'une seule hauteur. C'est exactement la condition d'unicité de l'image, et elle garantit que toute verticale ne rencontre le tracé qu'une fois.
5. Le disque du chronotachygraphe, celui de l'activité qui a ouvert ce chapitre : personne ne calcule rien, la machine écrit.
6. La fonction est définie sur $[0 ; 3]$, en secondes. Si l'appareil s'était arrêté une seconde, la bande n'aurait rien écrit sur cet intervalle : le domaine aurait un trou, et l'on n'aurait le droit de rien conclure sur le pouls du patient pendant ce temps. La bande ne dirait pas que le cœur s'est arrêté ; elle dirait que l'appareil s'est arrêté.

COMMENTAIRES

La question 6 est celle du camion, transposée au poignet. Marey a passé sa vie à construire des machines qui écrivent, et il a été le premier à devoir se demander ce que le silence d'une machine autorise à conclure. La réponse est toujours la même, et elle tient au domaine : là où rien n'est écrit, rien n'est su.

Le cadran solaire qui retarde

MÉTHODE L'écart est une fonction du jour de l'année. Chercher les jours où le cadran est juste, c'est chercher les antécédents de zéro.

1. Au 60^e jour, l'écart vaut environ -12 minutes ; au 182^e, environ -3 minutes. Les deux lectures sont approchées.
2. La courbe traverse la ligne du zéro **quatre** fois dans l'année, vers les jours 105, 164, 244 et 359, c'est-à-dire vers le 15 avril, le 13 juin, le 1^{er} septembre et le 25 décembre.

le cadran est juste quatre jours par an

3. Il se trompe. Son raisonnement supposerait un seul aller-retour de part et d'autre du zéro, alors que la courbe en fait deux : elle passe sous le zéro en hiver, au-dessus au printemps, à nouveau au-dessous en été, puis largement au-dessus à l'automne. Quatre traversées, donc quatre jours.
4. L'écart -6 minutes est atteint **trois** fois : deux fois pendant le creux du début d'année, et une fois au plus bas du creux d'été, vers le jour 207. L'écart de 20 minutes n'est **jamais** atteint : le maximum de l'année vaut environ 16 minutes.
5. Non. L'écart d'un jour est l'**image** de ce jour ; retrouver la date à partir de l'écart, c'est chercher un

antécédent, et la question 4 vient de montrer qu'un même écart peut en avoir trois. Une image ne suffit jamais à désigner son antécédent.

6. La fonction est définie sur les 365 jours de l'année : c'est une liste de 365 nombres entiers, et non un intervalle de réels. Le tracé continu est une commodité de dessin.

COMMENTAIRES

L'équation du temps se superpose de deux effets : l'orbite de la Terre est une ellipse, et son axe est incliné. Chacun produit une oscillation, l'une annuelle, l'autre semestrielle, et leur somme donne cette courbe à deux creux et deux bosses inégales. C'est aussi la raison pour laquelle un cadran solaire bien réglé porte souvent, gravée, une courbe en forme de huit : elle sert à corriger l'écart jour par jour.

EXERCICE 30 · APR-F1-30

★★★★★ ☆

Mille ans de la même table

DÉFI – EXERCICE FACULTATIF

MÉTHODE Trois polygones inscrits, trois cordes, et à chaque fois le même outil : le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle dont on connaît deux côtés.

1. La corde d'un arc de 180 degrés joint deux points diamétralement opposés : c'est le diamètre, $\text{crd}(180) = 120$.

2. Soit $[AB]$ un côté de l'hexagone régulier inscrit, et O le centre. L'angle $\widehat{AOB}$ vaut 60 degrés, et $OA = OB = 60$: le triangle OAB est isocèle avec un angle de 60 degrés au sommet, donc équilatéral. La corde vaut donc le rayon : $\text{crd}(60) = 60$.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTIONS 3 À 5, CELLES OÙ L'ON JUGE UN CALCUL DE L'AN 150

L'arc de 90 degrés. Soit $[AB]$ un côté du carré inscrit. L'angle $\widehat{AOB}$ vaut 90 degrés, donc le triangle OAB est rectangle en O , avec $OA = OB = 60$. Le théorème de Pythagore donne

$$AB^2 = 60^2 + 60^2 = 7200, \quad \text{donc} \quad AB = \sqrt{7200} = \sqrt{3600 \times 2} = 60\sqrt{2}.$$

Une valeur approchée au dix-millième : $\text{crd}(90) \approx 84,8528$.

L'arc de 120 degrés. Soit $[AB]$ un côté du triangle équilatéral inscrit, et H le milieu de $[AB]$. L'énoncé donne $OH = 30$, moitié du rayon, et le triangle OHA est rectangle en H avec $OA = 60$. Pythagore donne

$$HA^2 = 60^2 - 30^2 = 2700, \quad \text{donc} \quad HA = \sqrt{2700} = \sqrt{900 \times 3} = 30\sqrt{3}.$$

La corde vaut le double : $\text{crd}(120) = 60\sqrt{3} \approx 103,92$.

La confrontation. L'écriture de Ptolémée vaut

$$84 + \frac{51}{60} + \frac{10}{3600} = 84 + 0,85 + 0,00277 \dots = 84,85277 \dots$$

Arrondie au dix-millième, elle donne 84,8528. Or notre valeur exacte, $60\sqrt{2}$, arrondie au dix-millième, donne elle aussi 84,8528.

les deux arrondis au dix-millième coïncident : 84,8528

6. La table donne la corde pour chaque arc de 0,5 degré à 180 degrés, de demi-degré en demi-degré : elle définit donc crd sur une **liste de 360 nombres**, et non sur un intervalle.

7. Le nombre 60 a un antécédent, l'arc de 60 degrés. Le nombre 120 en a un, l'arc de 180 degrés. Le nombre 130 n'en a aucun : une corde ne peut pas dépasser le diamètre, qui vaut 120.

8. Non. Écarter davantage les deux extrémités d'un arc, c'est écarter les deux extrémités de sa corde : les quatre valeurs déjà calculées le montrent, puisque $60 < 84,85 < 103,92 < 120$ pour les arcs de 60, 90, 120 et 180 degrés, rangés dans le même ordre. Deux arcs différents n'ont donc pas la même corde.

Cela dit, la figure ne le prouve que sur quatre exemples. Pour en être certain sur la table seule, il faudrait parcourir les 360 lignes et vérifier qu'aucune longueur n'y figure deux fois.

9. Non. Une fonction n'a pas besoin de formule pour exister : cette table n'en contient aucune, et elle a servi l'astronomie pendant près de mille ans.

COMMENTAIRES

Le calcul de Ptolémée est juste à quatre décimales après arrondi, obtenu à la main, sans notation décimale, vers l'an 150. Il n'y est pas arrivé par Pythagore seul : il a établi un théorème sur les quadrilatères inscrits dans un cercle, qui permet d'obtenir la corde d'une somme d'arcs, puis celle d'une moitié d'arc, et il a interpolé pour le demi-degré. Trois cent soixante entrées ainsi construites, et la trigonométrie du monde grec puis latin en a vécu jusqu'à ce que le sinus, venu de l'Inde puis du monde arabe, prenne sa place. Ce que l'exercice montre, lui, est plus simple et plus durable : lire une image dans une table est exactement lire une image sur une courbe.

Les réponses des douze exemples jumelés du cours et l'histoire de ceux qui ont mis cent soixante ans à admettre qu'un tableau est une fonction vous attendent sur le compagnon numérique du chapitre.