



CORRIGÉ • P1. INFORMATION CHIFFRÉE

Corrigé des quinze exercices de l'Atelier

Ce corrigé se lit la **feuille en main** : les énoncés n'y sont pas recopiés. Huit questions sont rédigées comme une copie idéale, à imiter jusqu'à la ponctuation ; les autres donnent la stratégie, le calcul et le résultat. Un pourcentage sans son référent, un taux sans son signe, et un résultat sans phrase de réponse, ne sont pas des réponses.

RÉDACTION MODÈLE : la copie idéale, à imiter • MÉTHODE : la stratégie en une ligne, puis le calcul • COMMENTAIRES : ce que la solution enseigne

I. LA PARTIE ET LE TOUT

EXERCICE 1 • APL-P1-01



Les trois inconnues

MÉTHODE La même relation, $\text{partie} = \text{proportion} \times \text{tout}$, lue trois fois : la quantité cachée change, le geste qui l'isole aussi. On nomme l'inconnue **AVANT** de calculer, on contrôle après.

1. L'inconnue est la **proportion** : $p = \frac{155}{620} = 0,25$. Contrôle : 0,25 est bien entre 0 et 1. Un quart des élèves du collège étudie le latin, soit 25 %.
2. L'inconnue est la **partie** : $0,18 \times 350 = 63$. Le tarif réduit représente 63 billets.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 3, CELLE OÙ LE TOUT SE CACHE

L'inconnue. Cette fois, ni la partie (91 bulletins) ni la proportion (65 %) ne manquent : c'est le **tout**, le nombre N de votants.

La relation. La partie est la proportion multipliée par le tout : $91 = 0,65 \times N$.

L'isolement. On divise les deux membres par 0,65, non nul : $N = \frac{91}{0,65} = 140$.

Le contrôle et la phrase. La partie ne dépasse pas le tout ($91 \leq 140$), et 65 % de 140 redonne bien 91.

Ce vote a réuni 140 votants.

COMMENTAIRES

Le geste de la question 3 est celui que les copies ratent : quand le tout manque, le réflexe fautif est de calculer $0,65 \times 91$, c'est-à-dire de prendre une part de la partie. Poser la relation *avant* de toucher aux nombres rend l'erreur impossible : c'est l'étape 2 de la méthode M1, et elle n'est pas décorative.

EXERCICE 2 · APL-P1-02



Le contrôle de vraisemblance

MÉTHODE Deux règles font tout le tri : une proportion vit entre 0 et 1, une partie ne dépasse jamais son tout. Ce qui ne viole aucune des deux se vérifie par le calcul.

- 1. Impossible** : une proportion ne dépasse jamais 100 % · il faudrait plus d'élèves équipés qu'il n'y a d'élèves.
- 2. Exacte** : $\frac{47}{212} \approx 0,222$, soit environ 22 % comme annoncé.
- 3. Impossible** : 260 demi-pensionnaires formeraient une partie plus grande que le tout (240 élèves).
- 4. Fausse mais réparable** : $\frac{42}{168} = 0,25$. La phrase juste est « 42 élèves sur 168 sont internes, soit 25 % ».

COMMENTAIRES

Ce tri est l'étape 4 de M1 devenue exercice : borner une proportion entre 0 et 1 et comparer la partie au tout coûte cinq secondes et intercepte les deux tiers des erreurs de copie avant qu'elles coûtent des points. L'item 2 rappelle qu'un contrôle peut aussi *confirmer* : vérifier n'est pas chercher la faute, c'est trancher.

EXERCICE 3 · APL-P1-03



Deux clubs, deux tous

MÉTHODE Deux questions, deux mesures : la proportion compare des parts, l'effectif compte des personnes. Elles n'ont aucune raison de désigner le même club.

- 1. Proportions** : 75 % contre 42 % · le **badminton** l'emporte. Effectifs : les échecs comptent $0,42 \times 50 = 21$ filles, le badminton $0,75 \times 24 = 18$ · les **échecs** l'emportent. Les deux réponses désignent deux clubs différents, et aucune n'est fausse : elles ne répondent pas à la même question.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 2, L'ADDITION QUI N'AVAIT PAS DE SENS

Pourquoi la phrase de la mairie n'a aucun sens. Les deux pourcentages ne comptent pas sur le même tout : 42 % parle des 50 membres du club d'échecs, 75 % des 24 membres du badminton. Additionner ces deux nombres, c'est ajouter des parts de tous différents : le résultat, 117 %, n'est le pourcentage de rien.

Ce qui s'additionne vraiment. Les effectifs, eux, comptent sur les mêmes unités : $21 + 18 = 39$ filles, pour $50 + 24 = 74$ membres en tout, puisque personne n'est inscrit aux deux clubs.

La proportion de la réunion. $\frac{39}{74} \approx 0,527$.

Dans la réunion des deux clubs, environ 52,7 % des membres sont des filles.

COMMENTAIRES

Le 52,7 % final est un garde-fou à lui seul : il tombe *entre* 42 % et 75 %, plus près de 42 %, parce que le club d'échecs pèse deux fois plus lourd. Une « moyenne » des proportions qui sortirait de cette fourchette, ou la somme de la mairie, échouent au contrôle de vraisemblance de l'exercice précédent.

II. LA PART D'UNE PART

EXERCICE 4 · APL-P1-04

★★ ■

L'arbre des deux tous

MÉTHODE Le mot « parmi » ouvre le second tout : les proportions s'emboîtent en se multipliant (méthode M2). Le chemin inverse remonte le produit : une division.

- $0,64 \times 0,25 = 0,16$. Les familles abonnées représentent 16 % des visiteurs du parc.
- $0,16 \times 4\,500 = 720$. Ce samedi, 720 visiteurs étaient des membres de familles abonnées.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 3, LE CHEMIN INVERSE

Ce que l'on cherche. La proportion q d'abonnés *parmi les familles* : le tout de cette proportion est le groupe des visiteurs en famille, pas le parc entier.

La relation. La part des familles abonnées dans le tout est le produit des deux proportions emboîtées : $0,56 \times q = 0,21$.

L'opération qui la résout. Une division, celle qui remonte le produit : $q = \frac{0,21}{0,56} = 0,375$.

Le contrôle et la phrase. 0,375 est entre 0 et 1, et $56 \% \times 0,375$ redonne 21 % du tout.

Dans ce parc, 37,5 % des familles sont abonnées.

COMMENTAIRES

La question 3 est le miroir de la question 1, et c'est tout son intérêt : le produit $p \times q$ du cours se remonte par division, exactement comme la relation $\text{partie} = \text{proportion} \times \text{tout}$ de M1. Un seul schéma mental suffit pour les deux paragraphes du chapitre : ce qui se construit en multipliant se remonte en divisant.

EXERCICE 5 · THE-P1-05

★★★ ◆

Additionner ou pas ?

MÉTHODE Deux vérifications avant toute addition : les pourcentages comptent-ils sur le MÊME tout ? Les deux parties sont-elles DISJOINTES ? Il faut les deux oui.

- Même tout (la classe), parties disjointes (un seul moyen de transport par élève) : l'addition est licite et mesure la réunion. $32 + 24 = 56$: 56 % des élèves viennent à vélo ou en bus.
- Touts différents (les filles, puis les garçons) : l'addition n'a aucun sens. Et l'on ne peut même pas en déduire la proportion de demi-pensionnaires du lycée : sans la répartition entre filles et garçons, elle est indécidable. On sait seulement qu'elle est comprise entre 44 % et 58 %.
- Même tout cette fois, mais rien ne dit que les parties sont disjointes : un élève peut être sportif *et* musicien. La somme $62 + 38 = 100$ est un nombre licite, mais elle ne mesure pas la réunion : ceux qui font les deux y sont comptés deux fois. Si, par exemple, 20 % des élèves font les deux, alors 80 % font l'un ou l'autre, et 20 % ne font rien : le journaliste conclut à tort.

COMMENTAIRES

Les trois items séparent les deux conditions : l'item 1 les remplit toutes deux, l'item 2 échoue sur le tout, l'item 3 échoue sur la disjonction. La question de l'item 2 reviendra en P3 avec l'outil qui lui manque, le tableau croisé ; en attendant, l'encadrement « entre 44 et 58 % » est tout ce que l'énoncé permet d'affirmer, et le dire est une réponse.

III. MESURER UNE ÉVOLUTION

EXERCICE 6 · APL-P1-06



Absolute ou relative ?

MÉTHODE Deux mesures pour un même changement : la différence compte des unités, le taux rapporte à la valeur de départ. Chacune répond à une question différente.

1. Village : variation absolue +500 habitants, taux $\frac{500}{2000} = 0,25$, soit +25 %. Ville : variation absolue +1 500 habitants, taux $\frac{1500}{50000} = 0,03$, soit +3 %. En variation absolue, la ville grandit le plus (1 500 habitants contre 500) ; en variation relative, le village (+25 % contre +3 %). Les deux phrases sont justes, chacune avec sa mesure.

2. Premier loyer : $\frac{30}{500} = 0,06$, soit +6 % ; second : $\frac{30}{1500} = 0,02$, soit +2 %. En euros, la hausse est la même ; en part du loyer, elle pèse trois fois plus sur le premier locataire.

COMMENTAIRES

Choisir sa mesure, c'est choisir sa question : « combien d'habitants de plus ? » appelle la différence, « quelle croissance ? » appelle le taux. Les palmarès de presse jouent souvent de l'ambiguïté : une petite commune gagne les classements de croissance avec trois lotissements. Dire *quelle mesure on utilise* fait partie de la réponse.

EXERCICE 7 · APL-P1-07



Le taux caché

MÉTHODE Une seule relation, valeur d'arrivée = coefficient $\times$ valeur de départ, et trois inconnues possibles : la méthode M3 dans les deux sens.

1. La hausse de 6 % donne le coefficient 1,06, et $53 = 1,06 \times V_1$. Donc $V_1 = \frac{53}{1,06} = 50$: le blouson coûtait 50 euros.

2. $CM = \frac{516}{480} = 1,075 = 1 + 0,075$. La cotisation a augmenté de 7,5 %.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 3, LE PRIX D'AVANT UNE BAISSE

La relation d'abord. La baisse de 24 % se code par le coefficient $1 - 0,24 = 0,76$, et le prix affiché est le prix initial multiplié par ce coefficient : $114 = 0,76 \times V_1$.

L'isolement. On divise les deux membres par 0,76, non nul : $V_1 = \frac{114}{0,76} = 150$.

Le contrôle. $150 \times 0,76 = 114$: la baisse refaite retombe sur le prix affiché. Le réflexe fautif, « rajouter

les 24 % », aurait donné $114 \times 1,24 = 141,36$: ce nombre ne repasse pas le contrôle, car les 24 % n'y portent pas sur le bon référent.

Le vélo était affiché 150 euros avant la baisse.

COMMENTAIRES

La question 3 est le cœur du chapitre en une ligne : défaire une évolution, c'est diviser par son coefficient, jamais appliquer le taux opposé. Le contrôle par l'évolution directe (trois secondes de calculatrice) départage les deux réflexes sans appel : c'est l'étape 4 de M5, et elle vaut sur toutes les copies.

EXERCICE 8 · THE-P1-08

★★★ ◆

Les points de pourcentage

RÉDACTION MODÈLE – QUESTIONS 1 ET 2, LES DEUX MESURES RÉDIGÉES

En points. Les deux taux de participation comptent sur le même tout, les inscrits : leur différence a un sens, et $39 - 30 = 9$. La participation a gagné 9 **points** de pourcentage.

En évolution. Le taux de participation est passé de la valeur 30 à la valeur 39 : son taux d'évolution est $\frac{39 - 30}{30} = \frac{9}{30} = 0,30$. La participation a augmenté de 30 %.

Les deux titres. « Gagne 9 points » et « bondit de 30 % » sont donc tous deux exacts. Le second paraît plus spectaculaire parce que son 30 % est un pourcentage *du taux de départ*, une valeur petite : le même changement, rapporté à un référent plus petit, produit un nombre plus grand.

La participation gagne 9 points, soit une hausse de 30 %.

3. Le titre faux : « la participation augmente de 9 % » · il colle l'unité « % » sur la différence en points, et sous-estime l'évolution réelle d'un facteur supérieur à trois.

COMMENTAIRES

C'est l'exigence explicite du programme : distinguer le pourcentage qui photographie du pourcentage qui mesure un changement. La règle de lecture tient en une question, toujours la même : *de quoi* ce pourcentage est-il le pourcentage ? Neuf points des inscrits, trente pour cent du taux de départ : deux référents, deux nombres, aucun paradoxe.

IV. ENCHAÎNER ET REVENIR

Deux hausses n'en font pas une

MÉTHODE Les coefficients se multiplient (méthode M4) : le mécanisme intégral est l'exemple déroulé du cours, § 3.1.

1. $1,1 \times 1,1 = 1,21$: la hausse globale est de 21 %, pas de 20 %.
2. La seconde hausse porte sur le prix *déjà augmenté* : le point d'écart est 10 % de la première hausse, c'est-à-dire 10 % de 10 %, soit 1 % du prix initial.
3. $1,1^3 = 1,331$: après trois ans, la hausse globale est de 33,1 %.

COMMENTAIRES

Le petit point d'écart de la question 1 devient 3,1 points en trois ans : l'écart entre « additionner les taux » et la réalité grandit avec chaque étage, et l'exercice 15 le poussera jusqu'au doublement. Retenir le geste, pas le chiffre : traduire en coefficients *avant* de composer.

L'ordre est-il indifférent ?

MÉTHODE Deux calculs d'abord, une preuve ensuite : le constat sur un exemple ne vaut que pour lui, la preuve en toutes lettres vaut pour tous.

1. Baisse d'abord : $240 \times 0,75 = 180$, puis $180 \times 1,15 = 207$. Hausse d'abord : $240 \times 1,15 = 276$, puis $276 \times 0,75 = 207$. Même prix final : 207 euros.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 2, LA PREUVE SANS NOMBRES

Le constat. Les deux ordres donnent le même prix final.

Pourquoi il vaudra toujours. Appliquer une évolution, c'est multiplier par son coefficient. Enchaîner les deux évolutions dans un ordre, c'est donc multiplier la valeur de départ par le premier coefficient puis par le second ; dans l'autre ordre, par le second puis par le premier. Dans les deux cas, la valeur de départ a été multipliée par le *produit* des deux coefficients : or un produit de deux nombres ne dépend pas de l'ordre de ses facteurs.

Quelles que soient les deux évolutions, l'ordre ne change pas le résultat final.

3. Ce que l'ordre change : les valeurs *intermédiaires*. Ici 180 euros dans un scénario, 276 dans l'autre : l'article n'est jamais passé par les mêmes prix.

COMMENTAIRES

La rédaction de la question 2 est la seule de la feuille sans un seul nombre, et c'est voulu : l'activité du chapitre avait *constaté* cette indifférence sur un prix choisi, l'exercice la *prouve* pour tous. La différence entre constater et prouver est exactement ce que la question 1 puis la question 2 font vivre, dans cet ordre.

Le pourcentage qui annule

MÉTHODE Défaire un coefficient, c'est multiplier par son inverse (méthode M5, déroulée au cours sur le ticket de 1954) : tout l'exercice est une lecture d'inverses.

1. La hausse de 50 % a pour coefficient 1,5 ; sa réciproque a pour coefficient $\frac{1}{1,5} = \frac{2}{3} \approx 0,667$, soit une baisse d'environ 33,3 %.
2. La baisse de 50 % a pour coefficient 0,5 ; sa réciproque a pour coefficient $\frac{1}{0,5} = 2$, soit une hausse de 100 %.
3. Les deux pourcentages n'ont pas le même référent : la baisse qui défait la hausse se mesure sur la *grande* valeur (celle d'après la hausse), la hausse qui défait la baisse se mesure sur la *petite* (celle d'après la baisse). Un même trajet en euros, rapporté à un référent plus petit, donne un pourcentage plus grand : défaire une baisse coûte toujours un taux plus fort que défaire une hausse.

COMMENTAIRES

La question 2 est la plus contre-intuitive du chapitre : perdre la moitié se répare en *doublant*. Les deux coefficients réciproques, $2/3$ et 2 , encadrent le piège de l'aller-retour : +50 % puis -50 % ne revient pas au départ précisément parce que -50 % n'est pas la réciproque de +50 %.

La chaîne au maillon manquant

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1, L'ÉQUATION ENTRE COEFFICIENTS

La relation d'abord. En notant k le coefficient de la seconde année, le coefficient global est le produit des deux coefficients annuels : $1,02 \times k = 1,377$.

L'isolement. On divise les deux membres par 1,02, non nul : $k = \frac{1,377}{1,02} = 1,35$.

La traduction et le contrôle. $1,35 = 1 + 0,35$: une hausse de 35 %. Contrôle : $1,02 \times 1,35 = 1,377$.

La fréquentation a augmenté de 35 % la seconde année.

2. Doubler, c'est multiplier par 2, une hausse de 100 %. Le coefficient global vaut 1,377 : le festival a gagné 37,7 %, guère plus du tiers du chemin vers le doublement. L'annonce du directeur confond une belle croissance avec une multiplication par deux.

COMMENTAIRES

L'équation de la rédaction modèle est une équation d'A3, à ceci près que l'inconnue est un *coefficient* : la résoudre, c'est faire dialoguer les deux chapitres. Quant au « presque doublé », il tombera à l'exercice 13 sous sa forme de presse : le corrigé de l'item 2 y renverra ici.

V. SYNTHÈSES ET DONNÉES RÉELLES

EXERCICE 13 · SYN-P1-13

★★★ ■

Le fact-checking

MÉTHODE Pour chaque affirmation : identifier la mesure qu'elle emploie, refaire le calcul, trancher, et rédiger la phrase juste si elle mentait.

- Fausse.** De 8,4 % à 7,7 %, le taux de chômage perd $8,4 - 7,7 = 0,7$ point de pourcentage. Son taux d'évolution vaut $\frac{7,7 - 8,4}{8,4} = \frac{-0,7}{8,4} \approx -0,083$: une baisse d'environ 8,3 %. Phrase corrigée : « le taux de chômage recule de 0,7 point, soit une baisse d'environ 8,3 % ».
- Fausse.** Doubler, c'est multiplier par $2 = 1 + 1$: une hausse de 100 %, comme à l'exercice 12. Une hausse de 200 % serait un triplement. Phrase corrigée : « le prix du gazole a doublé : une hausse de 100 % ».
- Vraie.** Deux baisses de 10 % se composent : $0,9 \times 0,9 = 0,81$, une baisse de 19 % · le mécanisme est celui de l'exercice 9, au signe près. Le journaliste qui n'a PAS additionné les taux mérite d'être signalé.

COMMENTAIRES

L'affirmation vraie est la plus suspecte des trois, et c'est le piège du dispositif : après deux mensonges, le lecteur attend le troisième, et le -19 % « bizarre » est précisément la marque d'un calcul juste, là où le -20 % rond aurait dû alerter. Vérifier, c'est calculer, pas flairer.

EXERCICE 14 · SYN-P1-14

★★★★ ♦

Le dossier Insee

MÉTHODE Aucune question n'annonce son geste : le reconnaître EST l'exercice. Dans l'ordre : deux taux (M3), une composition exacte (M4), une part (M1), une part de part (M2), une réciproque (M5).

- De 1954 à 1999 : $\frac{58,5}{42,8} \approx 1,3668$, soit environ +36,7 %. De 1999 à 2022 : $\frac{65,6}{58,5} \approx 1,1214$, soit environ +12,1 %.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 2, LE TÉLESCOPAGE ET LE TERME CROISÉ

Le produit exact. Le coefficient global est le produit des deux coefficients, pris sans arrondi :

$$\frac{58,5}{42,8} \times \frac{65,6}{58,5} = \frac{65,6}{42,8} \approx 1,5327.$$

Le 58,5 s'élimine de lui-même : passer par 1999 ou n'y pas passer, c'est le même trajet de 1954 à 2022.

La vérification directe. $\frac{65,6}{42,8} \approx 1,5327$: mêmes chiffres, comme il se doit. La population a augmenté d'environ 53,3 %.

La comparaison à la somme. $36,7 + 12,1 = 48,8$: la somme des taux sous-estime le taux global de 4,5 points. L'écart est le produit des deux hausses (la seconde porte aussi sur ce que la première a

ajouté), et pour deux hausses il joue toujours dans le même sens.

De 1954 à 2022, la population métropolitaine a augmenté d'environ 53,3 %.

3. $0,18 \times 65,6 \approx 11,8$: environ 11,8 millions d'habitants ont moins de quinze ans.
4. Part d'une part : $0,18 \times 0,51 \approx 0,092$. Les garçons de moins de quinze ans représentent environ 9,2 % de la population.
5. Défaire la hausse globale : $\frac{65,6}{1,5327} \approx 42,8$. Le démographe retrouve les 42,8 millions de 1954.

COMMENTAIRES

Cinq questions, cinq méthodes, aucun étiquetage : c'est l'exercice le plus proche de l'épreuve. Le télescopage de la rédaction modèle explique au passage pourquoi la consigne interdisait d'arrondir en route : avec les coefficients reconstruits depuis les taux arrondis de la question 1 (1,367 et 1,121), le produit rend 53,2 % au lieu de 53,3, et la « vérification » échoue d'un dixième. Arrondir en fin de calcul, jamais en chemin.

VI. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 15 · APR-P1-15

★★★★★

La règle des 72 de Pacioli · facultatif

MÉTHODE Une évolution répétée au même taux se code par une puissance du coefficient : la recette de Pacioli se juge en comparant cette puissance à 2.

1. Chaque année, le capital est multiplié par 1,06 : douze années enchaînent douze fois ce coefficient, et le coefficient global est le produit $1,06 \times 1,06 \times \dots \times 1,06$, douze facteurs, c'est-à-dire $1,06^{12}$. La calculatrice donne $1,06^{12} \approx 2,012$: le capital a légèrement plus que doublé, la recette tient à un centième près.
2. À 8 % : $1,08^9 \approx 1,999$, un doublement quasi parfait. À 2 % : $1,02^{36} \approx 2,040$, un écart de 4 centièmes, honnête encore.
3. À 36 % : $1,36^2 = 1,8496$, loin du double : la recette se dérègle. Au vu des quatre essais (+4,0 centièmes à 2 %, +1,2 à 6 %, -0,1 à 8 %, -15 à 36 %), sa zone de confiance est une *fenêtre* autour des taux usuels, grosso modo de 4 à 12 % : elle n'est pas « d'autant meilleure que le taux est petit », elle est meilleure *au voisinage de 8 %*.
4. Répéter une évolution, c'est multiplier chaque année par le *même* coefficient : quel que soit le nombre n d'années, la valeur de départ a été multipliée par un produit de n facteurs égaux, c'est-à-dire par la puissance n -ième du coefficient.

Répéter n fois l'évolution de coefficient k , c'est multiplier par k^n .

COMMENTAIRES

La constante « exacte » de la recette vaut environ 69 à 70 pour les petits taux : les marchands de la Renaissance ont préféré 72, plus généreux en diviseurs (2, 3, 4, 6, 8, 9, 12...), quitte à décentrer légèrement la fenêtre de validité. Ce choix d'artisan, exactitude troquée contre commodité, est un geste de calcul mental avant l'heure ; l'histoire complète de la *Summa* et de son auteur vous attend sur le compagnon numérique.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les réponses des six jumeaux du cours, l'indice des prix que l'Insee tient depuis 1914 et les titres de presse disséqués vous attendent sur le compagnon numérique du chapitre.