



CORRIGÉ · A0. LOGIQUE, RAISONNEMENT ET PYTHON

Corrigé des trente exercices, feuille en main

RÉDACTION MODÈLE : la copie idéale, à imiter · MÉTHODE : la stratégie en une ligne, puis le calcul · COMMENTAIRES : ce que la solution enseigne

I. DIRE, ÉCRIRE, NIER

EXERCICE 1 · APL-A0-01



Six énoncés au banc d'essai

N°	VERDICT	JUSTIFICATION
1	VRAI	Le carré d'un réel est le produit de deux nombres de même signe.
2	FAUX	D'après l'énoncé 1, tout carré est positif ou nul : aucun réel ne convient.
3	FAUX	Contre-exemple : $x = \frac{1}{2}$, car $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.
4	VRAI	Témoin : $n = 0$ (et $n = 1$ convient aussi).
5	VRAI	Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, le témoin $y = x + 1$ vérifie $y > x$.
6	FAUX	Pour $y \in \mathbb{R}$ donné, $x = y$ met l'énoncé $y > x$ en défaut.

COMMENTAIRES

Les énoncés 5 et 6 ne diffèrent que par l'ordre. Dans le 5, le témoin $y = x + 1$ a le droit de dépendre de x ; dans le 6, un même y devrait dominer tous les réels à la fois, y compris lui-même.

EXERCICE 2 · APL-A0-02



Traduire, puis nier

- (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m > n$ (le témoin $m = n + 1$ convient); (b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = x$; (c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
- (a) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \leq 0$; (b) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 41$ est premier; (c) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0$.
- (a) Au moins une fenêtre de l'immeuble est ouverte. (b) Au moins un élève de la classe n'a aucun stylo qui fonctionne. (c) Il pleuvra demain et le match ne sera pas annulé.

COMMENTAIRES

Nier « tous », c'est affirmer « au moins un » (jamais « aucun »). Et la négation de « $P \implies Q$ » n'est pas une implication : c'est « P et non Q », la seule ligne où l'implication est fausse dans sa table de vérité.

EXERCICE 3 · APL-A0-03



La question de l'ordre

- L'énoncé (1) est **vérai** : pour $x \in \mathbb{R}$ donné, le témoin $M = f(x)$ convient, puisque $f(x) \leq f(x)$.
- L'énoncé (2) est **faux** : soit $M \in \mathbb{R}$. Le réel $x = \sqrt{|M| + 1}$ vérifie $f(x) = |M| + 1 > M$. Aucun M ne convient donc pour tous les x : la fonction carré n'est pas majorée.
- Dans (1), le majorant peut changer avec x (majoration point par point, toujours possible) ; dans (2), un même majorant doit convenir pour tous les x à la fois : c'est la définition d'une fonction majorée.
- ♦ La solution de la question 1 n'utilise aucune propriété de la fonction carré : pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, le témoin $M = f(x)$ convient.

COMMENTAIRES

Le témoin $M = f(x)$ est légal parce qu'il est choisi *après* x . C'est tout ce qui sépare un énoncé banal (1) d'une vraie propriété de la fonction (2).

EXERCICE 4 · APL-A0-04



Le vocabulaire de l'année

- (a) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$; (b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$; (c) $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.
- (a) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M$; (b) $\exists n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$; (c) $\exists x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq f(x)$.
- La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$ n'est pas majorée : soit $M \in \mathbb{R}$; comme les entiers ne sont pas majorés, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > M$, et ce rang vérifie $u_n > M$. C'est exactement la négation écrite en 2.(a).

COMMENTAIRES

« Majorée » cache un $\exists \forall$, dans cet ordre : même piège qu'à l'exercice 3. La négation 2.(a) est la clé du chapitre sur les limites : c'est presque la définition de « tendre vers $+\infty$ ».

II. L'IMPLICATION DANS TOUS SES ÉTATS

EXERCICE 5 · APL-A0-05

★★ ■ ⌚

Le tribunal des implications

N°	VERDICT	JUSTIFICATION
1	VRAI	Si $x = y$, on peut remplacer y par x : $x^2 = x^2$.
2	FAUX	Contre-exemple : $(x; y) = (1; -1)$, car $1 = 1$ mais $1 \neq -1$.
3	VRAI	Même substitution qu'à la ligne 1.
4	VRAI	Voir ci-dessous.

MÉTHODE Pour la ligne 4 : factoriser, puis montrer que le second facteur ne s'annule qu'en $(0; 0)$.

Soient x et y tels que $x^3 = y^3$. Alors $0 = x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ avec

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0,$$

somme nulle seulement si $y = 0$ et $x = -y/2 = 0$. Si $(x; y) \neq (0; 0)$, le second facteur est strictement positif, donc $x = y$; et si $(x; y) = (0; 0)$, alors $x = y$ aussi.

5. D'après les lignes 3 et 4 : $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^3 = y^3 \iff x = y$, tandis que $x^2 = y^2$ n'équivaut pas à $x = y$ (ligne 2).

COMMENTAIRES

Le cube est **injectif** sur $\mathbb{R}$ (la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante), le carré ne l'est pas : c'est lui qui oblige aux « $\pm$ » dans les résolutions d'équations.

EXERCICE 6 · APL-A0-06

★ ■ ⌚

La chemise rouge des cosmonautes

1. Si une personne est un cosmonaute américain, alors elle porte une chemise rouge.
2. Réciproque : si une personne porte une chemise rouge, alors c'est un cosmonaute américain. Rien ne la garantit : l'énoncé de départ ne dit rien des porteurs de chemise rouge.
3. Contraposée : si une personne ne porte pas de chemise rouge, alors ce n'est pas un cosmonaute américain. Elle est vraie, car équivalente à l'énoncé supposé vrai.
4. (a) John porte une chemise rouge (application directe). (b) Ivan n'est pas un cosmonaute américain (contraposée). (c) On ne peut rien conclure (ce serait la réciproque). (d) On ne peut rien conclure : l'énoncé ne dit rien des non-cosmonautes.

COMMENTAIRES

Seuls l'énoncé et sa contraposée donnent des certitudes. Les cas (c) et (d) sont les deux erreurs classiques : affirmer la réciproque, et nier l'hypothèse pour nier la conclusion.

Nécessaire, suffisant, équivalent

- (a) $\iff$ (b) $\implies$ (la réciproque échoue : $x = -3$) (c) $\implies$ (la réciproque échoue : $n = 2$)
(d) $\iff$ (un carré est positif ou nul, et $0^2 = 0$).
- « $x \geq 2$ » est une condition **suffisante** pour « $x^2 \geq 4$ » ; et « $x^2 \geq 4$ » est une condition **nécessaire** (mais pas suffisante) pour « $x \geq 2$ ».
- Sens $\Leftarrow$: si $u = 0$ ou $v = 0$, l'un des facteurs est nul, donc $uv = 0$. Sens $\implies$: supposons $uv = 0$. Si $u = 0$, c'est terminé ; sinon $u \neq 0$ et $v = \frac{uv}{u} = 0$. Dans les deux cas, $u = 0$ ou $v = 0$.

COMMENTAIRES

C'est bien l'**équivalence** (a) qui fonde la résolution des équations produits : le sens $\implies$ garantit qu'on ne perd aucune solution, le sens $\Leftarrow$ qu'on n'en invente pas.

Enchaîner les implications

- Soient $x > 2$ et $y > x$. Comme $y > x > 2 > 0$, la fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0; +\infty[$:

$$0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}, \quad \text{donc} \quad 0 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

- $|x - 2| \leq 1$ équivaut à $1 \leq x \leq 3$. Or, pour $x \neq -2$:

$$\frac{2x+3}{x+2} = 2 - \frac{1}{x+2}.$$

Pour $x \in [1; 3]$, on a $x+2 \in [3; 5]$, donc $\frac{1}{x+2} \in \left[\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]$, puis $\frac{2x+3}{x+2} \in \left[\frac{5}{3}; \frac{9}{5}\right]$. Ainsi $0 < \frac{2x+3}{x+2} \leq \frac{9}{5}$.

- Soient a et b tels que $a^2 + b^2 = 1$. Alors :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1 + 2ab \quad \text{et} \quad 2ab \leq a^2 + b^2 = 1$$

(car $(a-b)^2 \geq 0$). Donc $(a+b)^2 \leq 2$, et comme la racine carrée est croissante : $|a+b| \leq \sqrt{2}$.

COMMENTAIRES

Deux réflexes : réécrire un quotient sous forme $2 - \frac{1}{x+2}$ pour lire ses variations d'un coup d'œil, et transformer l'objectif $|a+b| \leq \sqrt{2} \iff (a+b)^2 \leq 2$ **avant** de calculer.

III. L'ATELIER DES RAISONNEMENTS

EXERCICE 9 · APL-A0-09

★★ ■ ⌚

Tout droit

RÉDACTION MODÈLE – LE RAISONNEMENT DIRECT

Soient n et m deux entiers impairs : il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{Z}$ tels que $n = 2k + 1$ et $m = 2l + 1$.

1. Calculons la somme : $n + m = 2k + 1 + 2l + 1 = 2(k + l + 1)$. Comme $k + l + 1 \in \mathbb{Z}$, la somme $n + m$ est paire.

2. Calculons le produit :

$$nm = (2k + 1)(2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1.$$

Comme $2kl + k + l \in \mathbb{Z}$, le produit nm est impair.

3. Soit n un entier impair. En appliquant la question 2 avec $m = n$ (qui est impair), le produit $n \times n = n^2$ est impair.

COMMENTAIRES

La rédaction directe type : **traduire** l'hypothèse (l'écriture $2k + 1$), **calculer**, **faire réapparaître** la définition dans le résultat. Noter la question 3 : réutiliser un résultat général en le spécialisant ($m = n$) évite tout nouveau calcul.

EXERCICE 10 · APL-A0-10

★★ ■ ⌚

La chasse aux contre-exemples

1. 2 est premier et pair.

RÉDACTION MODÈLE – RÉDIGER UNE RÉFUTATION

2. L'énoncé affirme : $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$. Sa négation est : $\exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} \neq x$. Exhibons un témoin : pour $x = -1$,

$$\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1.$$

Le réel $x = -1$ réfute donc l'énoncé, qui est faux. (En réalité, $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$.)

3. Prenons $f = g$ la fonction identité, croissante sur $\mathbb{R}$. Alors fg est la fonction carré, et $(fg)(-2) = 4 > 0 = (fg)(0)$: fg n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

4. 6 est divisible par 3 et par 6, mais pas par 18.

5. La négation de « $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ » est « $\exists n \in \mathbb{N}, \text{non } P(n)$ » : un unique témoin établit cette existence, donc réfute l'énoncé. Le démontrer exigerait au contraire de couvrir *tous* les entiers, et un million de vérifications n'en couvrent qu'un million.

COMMENTAIRES

Un bon contre-exemple se **vérifie** (le calcul $\sqrt{1} = 1 \neq -1$ est écrit noir sur blanc), il ne s'affirme pas. Retenir aussi le vrai résultat : $\sqrt{x^2} = |x|$.

EXERCICE 11 · APL-A0-11



Deux cas valent mieux qu'un

RÉDACTION MODÈLE – LA DISJONCTION DES CAS

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Distinguons deux cas, qui couvrent tous les entiers.

Cas 1 : n pair. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Alors $n^2 = 4k^2$: le reste de la division de n^2 par 4 vaut 0.

Cas 2 : n impair. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1,$$

avec $0 \leq 1 < 4$: le reste vaut 1.

Dans tous les cas, le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 vaut 0 ou 1.

2. $1\,000\,003 = 4 \times 250\,000 + 3$: son reste par 4 vaut 3. D'après la question 1, ce n'est le carré d'aucun entier.

Défi. D'après la question 1, chaque carré contribue un reste 0 ou 1 : une somme de deux carrés a donc pour reste 0, 1 ou 2 modulo 4, jamais 3.

COMMENTAIRES

Deux exigences de la disjonction : annoncer des cas qui **couvrent tout**, et pour un « reste », vérifier l'encadrement $0 \leq r < 4$ (sans lui, écrire $n^2 = 4q + r$ ne définit pas le reste).

EXERCICE 12 · APL-A0-12



La disjonction en action

1. Parmi les deux entiers consécutifs n et $n + 1$, l'un est pair ; parmi les trois entiers consécutifs n , $n + 1$, $n + 2$, l'un est multiple de 3. Le produit $N = n(n + 1)(n + 2)$ est donc pair et multiple de 3 : écrivons $N = 3m$; comme N est pair et 3 impair, m est pair, $m = 2q$, d'où $N = 6q$.

2. *Cas $x \geq 0$:* $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1 > 0$ et $x \geq 0$, la somme est strictement positive. *Cas $x < 0$:* $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| = -x$, donc $\sqrt{x^2 + 1} + x > 0$.

3.(a)

MÉTHODE Deux cas selon le signe de $x - 3$, puis discriminant ; ne garder que les solutions du bon côté.

Cas $x \geq 3$: l'équation devient $2x^2 - x - 15 = 0$, de discriminant $121 = 11^2$, de racines 3 et $-\frac{5}{2}$; seule $x = 3$ vérifie $x \geq 3$. *Cas $x < 3$:* l'équation devient $2x^2 + x - 21 = 0$, de discriminant $169 = 13^2$, de racines 3 (rejetée) et $-\frac{7}{2}$ (retenue). Vérification directe : les deux valeurs conviennent.

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{7}{2}; 3 \right\}$$

3.(b)

MÉTHODE Isoler une racine, élever au carré, et VÉRIFIER : l'élévation au carré n'est qu'une implication.

L'équation impose $x \geq \frac{3}{2}$. En élevant au carré :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+7} &= 4 - \sqrt{2x-3} \implies x+7 = 16 - 8\sqrt{2x-3} + 2x-3 \\ &\implies 8\sqrt{2x-3} = x+6 \\ &\implies 64(2x-3) = x^2 + 12x + 36 \\ &\implies x^2 - 116x + 228 = 0.\end{aligned}$$

Discriminant : $12\,544 = 112^2$; candidats $x = 2$ et $x = 114$. Vérification : pour $x = 2$, $\sqrt{9} + \sqrt{1} = 4 \checkmark$; pour $x = 114$, $\sqrt{121} + \sqrt{225} = 26 \neq 4$, rejeté.

$$\boxed{S = \{2\}}$$

COMMENTAIRES

Le candidat fantôme $x = 114$ est la morale de l'exercice : chaque élévation au carré est un $\implies$ qui peut **créer** des solutions. La vérification finale n'est pas une politesse, c'est le sens $\Leftarrow$ manquant (écho de l'exercice 7).

EXERCICE 13 · THE-A0-13



Prendre le problème à rebours

RÉDACTION MODÈLE – LA CONTRAPOSÉE

1. Montrons : si ab est pair, alors a est pair ou b est pair. Raisonnons par contraposée. La négation de « a est pair ou b est pair » est « a est impair **et** b est impair » (lois de De Morgan). La contraposée s'énonce donc :

si a et b sont impairs, alors ab est impair.

C'est exactement la question 2 de l'exercice 9, déjà démontrée. La contraposée étant vraie, l'implication de départ l'est aussi.

2. Contraposée : si n est impair, alors 8 divise $n^2 - 1$. Soit $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1).$$

Le produit $k(k+1)$ de deux entiers consécutifs est pair : $k(k+1) = 2m$, donc $n^2 - 1 = 8m$.

COMMENTAIRES

Contraposer transforme une hypothèse négative (« 8 ne divise pas »), inutilisable en calcul, en hypothèse positive (« n impair ») qui s'écrit $n = 2k + 1$. Et nier un « ou » donne un « et » : De Morgan est le passage obligé de la question 1.

L'art de l'impossible

RÉDACTION MODÈLE – LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

1. Soient r un rationnel et i un irrationnel. Supposons par l'absurde que $r + i$ soit rationnel, et notons $r' = r + i \in \mathbb{Q}$. Alors

$$i = r' - r,$$

différence de deux rationnels, donc rationnelle. C'est contradictoire avec l'hypothèse « i irrationnel ». Donc $r + i$ est irrationnel.

2. Appliquer la question 1 à $r = 1 \in \mathbb{Q}$ et $i = \sqrt{2}$ (irrationnel d'après le cours) : $1 + \sqrt{2}$ est irrationnel.

3. Même schéma : si $ri = r' \in \mathbb{Q}$ avec $r \in \mathbb{Q}^*$, alors $i = \frac{r'}{r}$ est rationnel, contradiction. L'hypothèse $r \neq 0$ autorise la division ; elle est indispensable, car $0 \times i = 0$ est rationnel.

Défi. Supposons qu'il existe un plus petit réel strictement positif a . Alors $\frac{a}{2}$ est strictement positif et $\frac{a}{2} < a$: contradiction avec la minimalité de a .

COMMENTAIRES

L'absurde commence toujours par écrire **proprement** la négation (exercices 2 et 4!), et se termine par une contradiction explicite, nommée. Ici, la clé algébrique est la stabilité de $\mathbb{Q}$ par différence et quotient.

Le face-à-face des équivalences

1.

MÉTHODE Tout ramener d'un même côté et faire apparaître des carrés.

Soient $x \geq 0$ et $y \geq 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{x+y+2}{2} &\iff 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = x+y+2 \\ &\iff (x-2\sqrt{x}+1) + (y-2\sqrt{y}+1) = 0 \\ &\iff (\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{y}-1)^2 = 0 \\ &\iff \sqrt{x} = 1 \text{ et } \sqrt{y} = 1 \iff x = 1 \text{ et } y = 1. \end{aligned}$$

2.

MÉTHODE Sens réciproque : calcul direct. Sens direct : quantité conjuguée, puis injectivité.

($\Leftarrow$) Si $y = -x$: $(x + \sqrt{x^2+1})(-x + \sqrt{x^2+1}) = (x^2+1) - x^2 = 1$.

($\Rightarrow$) Posons $g(t) = t + \sqrt{t^2+1}$, strictement positif car $\sqrt{t^2+1} > |t| \geq -t$. La quantité conjuguée donne $\frac{1}{g(x)} = \sqrt{x^2+1} - x = g(-x)$. L'hypothèse $g(x)g(y) = 1$ s'écrit donc $g(y) = g(-x)$. Or g est injective : si $g(a) = g(b)$, alors

$$a - b = \sqrt{b^2+1} - \sqrt{a^2+1} = \frac{(b-a)(b+a)}{\sqrt{b^2+1} + \sqrt{a^2+1}},$$

d'où $(a-b) \left(1 + \frac{a+b}{\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1}} \right) = 0$; le second facteur est strictement positif car $|a+b| \leq |a| + |b| < \sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1}$, donc $a = b$. Ainsi $y = -x$, c'est-à-dire $x + y = 0$.

COMMENTAIRES

Deux outils à retenir en gras : **une somme de carrés est nulle si et seulement si chaque carré est nul**, et la **quantité conjuguée** pour sortir d'une boucle de calculs avec racines. La question 2 illustre aussi une équivalence prouvée par double implication, chaque sens avec son outil propre.

EXERCICE 16 · SYN-A0-16



À l'aveugle : choisir son arme

- VRAI** (direct) : $n^2 + n = n(n+1)$, produit de deux entiers consécutifs, est pair.
- FAUX** (contre-exemple) : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont irrationnels (le second par l'exercice 14.3 avec $r = -1$), de somme 0 rationnelle.
- VRAI** (contraposée, avec une disjonction dedans) : si n n'est pas multiple de 3, alors $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$, et

$$(3k+1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1, \quad (3k+2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1,$$

dans les deux cas n^2 n'est pas multiple de 3.

- VRAI** (récurrence) : initialisation, $4^0 + 5 = 6 = 3 \times 2$; hérédité, $4^{n+1} + 5 = 4(4^n + 5) - 15$, somme de deux multiples de 3. Conclusion par le principe de récurrence.
- C'était le piège : c'est la **conjecture de Goldbach** (1742), vérifiée par ordinateur jusqu'à 4×10^{18} , mais dont personne ne connaît le statut. Ni preuve ni contre-exemple : aucun des six outils ne s'applique à ce jour.

COMMENTAIRES

Choisir l'arme, c'est lire la **structure logique** : un « $\forall$ + implication » suggère la contraposée (3), un énoncé « pour tout n » à motif additif appelle la récurrence (4), un énoncé universel suspect se teste d'abord sur des exemples (2). Et savoir dire « on ne sait pas » fait partie des mathématiques (5).

IV. LA RÉCURRENCE, PIÈCE MAÎTRESSE

EXERCICE 17 · APL-A0-17



Premières marches

RÉDACTION MODÈLE – LA RÉDACTION CANONIQUE DE LA RÉCURRENCE

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ la proposition : « $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation. Pour $n = 1$: le membre de gauche vaut 1, et $\frac{1 \times 2}{2} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ vraie, et montrons $P(n+1)$. En isolant la somme au rang n :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

ce qui est exactement $P(n+1)$.

Conclusion. $P(1)$ est vraie et P est héréditaire : par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

2.

MÉTHODE *Même gabarit.*

Initialisation ($n=0$) : $1 = 2^1 - 1$ ✓. Hérédité : en isolant la somme au rang n ,

$$(1 + 2 + \cdots + 2^n) + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + 2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1}$.

COMMENTAIRES

La rédaction de la question 1 est le **gabarit de l'année** : nommer $P(n)$, trois étapes titrées, l'hypothèse de récurrence citée au moment précis où elle sert, la conclusion qui invoque le principe. Tout corrigé « éclair » de récurrence dans la suite sous-entend ce gabarit.

EXERCICE 18 · APL-A0-18



Les sommes de puissances et le carré caché

1.

MÉTHODE *Gabarit de l'exercice 17; seule l'hérédité change.*

Initialisation : $1^2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$ ✓. Hérédité :

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \end{aligned}$$

qui est la formule au rang $n+1$.

2. Initialisation : $1^3 = \frac{1 \times 4}{4}$ ✓. Hérédité :

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

3. D'après l'exercice 17 et la question 2 :

$$(1 + 2 + \cdots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

COMMENTAIRES

Dans une hérédité de somme, **factoriser avant de développer** $((n+1)$ puis $(n+1)^2$ ci-dessus) : viser la forme cible du rang $n+1$ plutôt que tout étaler. La question 3 récolte l'identité de Nicomaque gratuitement, comme la figure du plateau le laissait voir.

EXERCICE 19 · APL-A0-19



Récurrence et divisibilité

1.

MÉTHODE Faire apparaître l'expression du rang n .

Initialisation : $8^0 - 1 = 0 = 7 \times 0$ ✓. Hérédité : si $8^n - 1 = 7q$, alors

$$8^{n+1} - 1 = 8(8^n - 1) + 7 = 7(8q + 1),$$

divisible par 7. Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 7 \mid 8^n - 1}$.

2. Initialisation ($n = 1$) : $4 + 6 - 1 = 9$ ✓. Hérédité : si $4^n + 6n - 1 = 9q$, alors

$$4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 4(4^n + 6n - 1) - 18n + 9 = 9(4q - 2n + 1),$$

divisible par 9. Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 9 \mid 4^n + 6n - 1}$.

COMMENTAIRES

Le réflexe unique : écrire le rang $n+1$ comme $a \times (\text{rang } n) + \text{correcteur}$, puis vérifier que le correcteur (7 , puis $-18n + 9$) est lui-même divisible. Tout le travail est dans ce correcteur.

EXERCICE 20 · APL-A0-20



L'inégalité de Bernoulli

MÉTHODE Récurrence ; la multiplication par $1+x > 0$ conserve l'inégalité.

Initialisation : $(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0$ ✓. Hérédité : supposons $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Comme $1+x > 0$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x, \end{aligned}$$

car $nx^2 \geq 0$. Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx}$.

COMMENTAIRES

Le point de rigueur : multiplier une inégalité par une quantité exige d'en connaître le **signe** ; c'est ici que l'hypothèse $x \in \mathbb{R}_+$ travaille. Cette inégalité reviendra pour montrer que q^n tend vers $+\infty$ quand $q > 1$.

L'escalier infini

1. $u_2 = 2 \times 1 + 1 = 3$, puis $u_3 = 7$ et $u_4 = 15$.
2. Ces valeurs sont $2^n - 1$: conjecturons $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2^n - 1$.
- 3.

MÉTHODE *Gabarit de l'exercice 17.*

Initialisation : $u_1 = 1 = 2^1 - 1$ ✓. Hérédité : si $u_n = 2^n - 1$, alors

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2^n - 1}$.

4. $u_{64} = 2^{64} - 1 \approx 2^{64} = 2^4 \times (2^{10})^6 \approx 16 \times 10^{18}$ secondes. Une année compte environ $3,2 \times 10^7$ secondes, d'où

$$\frac{16 \times 10^{18}}{3,2 \times 10^7} \approx 5 \times 10^{11} \text{ années,}$$

soit de l'ordre de 500 milliards d'années : une quarantaine de fois l'âge de l'Univers. Nous pouvons dormir tranquilles.

Défi. (a) Si $4^n + 1 = 3q$, alors $4^{n+1} + 1 = 4(4^n + 1) - 3 = 3(4q - 1)$: l'hérédité est parfaitement valide. (b) Non, jamais : montrons par récurrence que le reste de $4^n + 1$ par 3 vaut toujours 2. Initialisation : $4^0 + 1 = 2$. Hérédité : si $4^n + 1 = 3q + 2$, alors $4^{n+1} + 1 = 4(3q + 2) - 3 = 3(4q + 1) + 2$. (c) Les chevaux du cours avaient une initialisation vraie et une hérédité cassée ; ici l'hérédité est parfaite et l'initialisation introuvable. **Les deux étapes sont indispensables** : aucune ne supplée l'autre.

COMMENTAIRES

La question (b) est élégante : pour montrer qu'une propriété n'est *jamais* vraie, on fait... une récurrence sur son reste. La machine qui échoue d'un côté sert de l'autre.

La somme qui dépasse la racine

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $n^2 + n \geq n^2 \geq 0$, et la racine carrée est croissante, donc $\sqrt{n^2 + n} \geq \sqrt{n^2} = n$.
- 2.

MÉTHODE *Récurrence ; l'hérédité se ramène exactement à la question 1.*

Initialisation : $\frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \geq \sqrt{1}$ ✓. Hérédité : supposons $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1},$$

en utilisant la question 1. Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}}$.

COMMENTAIRES

Architecture typique d'un sujet : la question 1 prépare l'**ingrédient exact** dont l'hérédité aura besoin. Au passage, ce résultat montre que cette somme dépasse tout seuil : elle « tend vers $+\infty$ », vocabulaire du prochain chapitre.

EXERCICE 23 · THE-A0-23



Les formules closes des suites

1. Initialisation : $u_0 + r \times 0 = u_0$ ✓. Hérédité : si $u_n = u_0 + rn$, alors $u_{n+1} = u_n + r = u_0 + r(n+1)$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + rn}$.

2.(a) $x = ax + b \iff x(1-a) = b \iff x = \frac{b}{1-a}$, la division étant licite car $a \neq 1$. Donc $r = \frac{b}{1-a}$.

2.(b) Initialisation : $a^0(u_0 - r) + r = u_0$ ✓. Hérédité : si $u_n = a^n(u_0 - r) + r$, alors

$$u_{n+1} = a u_n + b = a^{n+1}(u_0 - r) + ar + b = a^{n+1}(u_0 - r) + r,$$

car $r = ar + b$ (définition du point fixe). Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n(u_0 - r) + r}$.

COMMENTAIRES

Toute la magie du point fixe tient dans la ligne $ar + b = r$: la suite $v_n = u_n - r$ est en réalité géométrique de raison a . Vous reverrez ce changement de suite au chapitre suivant ; ici, vous venez d'en démontrer la formule une fois pour toutes.

EXERCICE 24 · APR-A0-24



L'inégalité triangulaire généralisée

RÉDACTION MODÈLE – RÉCURRENCE EXPERTE : LE $\forall$ VIT DANS $P(n)$

1. Les deux membres étant positifs, il suffit de comparer leurs carrés :

$$|x + y|^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{et} \quad (|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2.$$

Or $xy \leq |xy| = |x||y|$, donc $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$, et la racine carrée étant croissante :

$$\boxed{\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq |x| + |y|}$$

2. Pour $n \geq 2$, notons $P(n)$ la proposition : « pour tous réels $x_1, \dots, x_n$, $|\sum_{k=1}^n x_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$ ».

Initialisation. $P(2)$ est exactement la question 1.

Hérédité. Soit $n \geq 2$ tel que $P(n)$ soit vraie. Soient $x_1, \dots, x_{n+1}$ des réels quelconques. En regroupant :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right| &= \left| \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) + x_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| + |x_{n+1}| && \text{(question 1)} \\ &\leq \sum_{k=1}^n |x_k| + |x_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |x_k| && \text{(hypothèse } P(n)). \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence,

$$\forall n \geq 2, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$$

COMMENTAIRES

La subtilité qui vaut cinq étoiles : la récurrence porte sur n **seulement**, et chaque $P(n)$ contient son propre « pour tous réels $x_1, \dots, x_n$ ». Dans l'hérédité, on fixe n , jamais les x_k : c'est pour cela qu'on écrit « soient $x_1, \dots, x_{n+1}$ quelconques ». La même structure reviendra à l'exercice 27.

V. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 25 · SYN-A0-25



Le tournoi

- $p_2 = 1, p_3 = 3, p_4 = 6$; sur la figure du tournoi à 5 joueurs, on compte bien 10 segments.
- Quand un $(n+1)$ -ième joueur arrive, les matchs des n anciens sont inchangés, et il affronte chacun d'eux une fois : soit n matchs nouveaux. D'où $\forall n \geq 2, p_{n+1} = p_n + n$.
- Initialisation : $p_2 = 1 = \frac{2 \times 1}{2}$ ✓. Hérédité : si $p_n = \frac{n(n-1)}{2}$, alors

$$p_{n+1} = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1) + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)-1]}{2}.$$

Conclusion : $\forall n \geq 2, p_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

- Le produit $n(n-1)$ compte les matchs *vus depuis chaque joueur* : n joueurs disputant chacun $n-1$ matchs. Chaque match est ainsi compté exactement deux fois, une par participant. Donc $p_n = \frac{n(n-1)}{2}$, sans récurrence.
- Réponse libre. Le double comptage est plus court et *explique* la formule (le 2 du dénominateur a un sens) ; la récurrence est plus mécanique mais se généralise à des situations sans argument combinatoire. Les deux sont des démonstrations complètes.

COMMENTAIRES

Compter la même chose de deux façons est une méthode de démonstration à part entière ; vous la retrouverez en combinatoire. Un résultat qui possède deux preuves est doublement compris.

La chute de la conjecture d'Euler

- $\forall (a; b; c; d; m) \in (\mathbb{N}^*)^5, a^5 + b^5 + c^5 + d^5 \neq m^5$.
- Négation : $\exists (a; b; c; d; m) \in (\mathbb{N}^*)^5, a^5 + b^5 + c^5 + d^5 = m^5$. Il suffit donc d'exhiber **un** quintuplet vérifiant l'égalité.
- $144^5 = 61\,917\,364\,224$ possède onze chiffres : une calculatrice à dix chiffres affichés arrondi, et une égalité vérifiée sur des arrondis ne prouve rien. À la main, on peut poser les quatre puissances cinquièmes et additionner (calcul long mais exact) ; en machine, Python calcule sur les entiers exacts (exercice 29).

RÉDACTION MODÈLE – RÉDIGER UNE RÉFUTATION HISTORIQUE

- La conjecture affirme qu'aucune somme de quatre puissances cinquièmes d'entiers naturels non nuls n'est une puissance cinquième. Or le calcul exact donne

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 61\,917\,364\,224 = 144^5.$$

Ce quintuplet contredit l'énoncé universel : la conjecture est réfutée.

COMMENTAIRES

Trois lignes suffisent, comme à Lander et Parkin : **énoncé nié, témoin, vérification**. Toute la difficulté était de trouver le témoin ; c'est le travail que l'ordinateur a fait pour eux en 1966, et que vous referez en une ligne à l'exercice 29.

Les triominos de Golomb

- Un échiquier 2×2 privé d'une case, ce sont trois cases en L : exactement un triomino. Le pavage existe, quel que soit l'emplacement du trou.
- Initialisation : $4^1 - 1 = 3 \checkmark$. Hérédité : si $4^n - 1 = 3q$, alors $4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3 = 3(4q + 1)$. Le compte des cases à paver est donc toujours un multiple de 3 : l'obstruction de comptage disparaît.
- Le trou se trouve dans l'un des quatre quadrants. Le triomino central couvre exactement une case de chacun des trois autres quadrants (leurs cases de coin au centre de l'échiquier). Après sa pose, *chacun* des quatre quadrants est un échiquier de côté 2^n privé d'exactly une case : l'hypothèse de récurrence s'applique quatre fois, et la réunion des quatre pavages avec le triomino central pave l'échiquier entier.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$: « tout échiquier de côté 2^n privé d'une case, quelle qu'elle soit, est pavable par des triominos ». $P(1)$ est la question 1 ; l'hérédité est la question 3 ; par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

COMMENTAIRES

Comme à l'exercice 24, le $\forall$ (« quelle que soit la case ôtée ») vit à l'intérieur de $P(n)$: c'est lui qui rend l'hérédité possible, car les trous créés par le triomino central tombent où ils veulent. Une récurrence sans un seul calcul : la plus belle du chapitre.

VI. PYTHON, LE LABORATOIRE

EXERCICE 28 · APL-A0-28

**est_premier, trois versions**

1. La version du cours :

```

1 def est_premier(n):
2     if n < 2:
3         return False
4     for d in range(2, n):
5         if n % d == 0:
6             return False
7     return True

```

2. Par l'absurde : si $a > \sqrt{n}$ et $b > \sqrt{n}$, alors $ab > \sqrt{n} \times \sqrt{n} = n$, ce qui contredit $ab = n$. Donc $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$: tout entier non premier admet un diviseur non trivial inférieur ou égal à $\sqrt{n}$, et il suffit de tester $d \leq \sqrt{n}$ (soit `range(2, int(n**0.5) + 1)`). Pour $n = 10\,007$: une centaine de tests au lieu d'environ dix mille, gain d'un facteur 100.

3. Le test `all(n % d != 0 for d in range(2, n))` renvoie True exactement lorsque :

$$n \geq 2 \quad \text{et} \quad \forall d \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket, d \nmid n,$$

ce qui est la définition de « n est premier ».

4. La machine répond : 1009 (et l'on peut le vérifier à la main en testant les nombres premiers jusqu'à 31, car $31^2 = 961 < 1009 < 1024 = 32^2$).

COMMENTAIRES

`all` est un $\forall$ **exécutable** (et `any` un $\exists$) : Python parle déjà la langue du chapitre. Le critère $\sqrt{n}$ est un raisonnement par l'absurde devenu optimisation.

EXERCICE 29 · SYN-A0-29

**La machine à contre-exemples**

1. La machine n'a **rien démontré** : elle atteste seulement qu'aucun contre-exemple n'existe parmi le premier million d'entiers. Vous, à l'exercice 16.4, avez démontré l'énoncé pour *tous* les entiers, par récurrence. Maxime du cours : **l'ordinateur réfute ; seule la démonstration prouve.**

2. `641 * 6700417 == 2**32 + 1` renvoie True.

3. Les deux tests suivants renvoient True :

$$\begin{aligned}
 27**5 + 84**5 + 110**5 + 133**5 &== 144**5 \\
 95800**4 + 217519**4 + 414560**4 &== 422481**4
 \end{aligned}$$

4. Python calcule sur des entiers **exacts** de taille arbitraire ; une calculatrice bascule en arrondi au-delà d'une dizaine de chiffres, et une égalité d'arrondis n'est pas une égalité.

COMMENTAIRES

Le `return None` de la machine est le personnage principal : l'absence de contre-exemple sur un intervalle fini ne dit rien du $\forall$. Syracuse, vérifiée jusqu'à 2^{71} , attend toujours sa démonstration.

EXERCICE 30 · SYN-A0-30



Le vol du planeur de Syracuse

1. Pour $a = 6$: 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

2. et 3.

```

1  def vol(a):
2      termes = [a]
3      while termes[-1] != 1:
4          u = termes[-1]
5          if u % 2 == 0:
6              termes.append(u // 2)
7          else:
8              termes.append(3*u + 1)
9      return termes
10
11 def temps_de_vol(a):
12     return len(vol(a)) - 1
13
14 def altitude_max(a):
15     return max(vol(a))

```

4. La machine confirme : `temps_de_vol(27)` renvoie 111 et `altitude_max(27)` renvoie 9232.

Défi. L'énoncé de la conjecture est un $\forall$ portant sur une infinité d'entiers : la vérification de tous les $a < 2^{71}$, aussi spectaculaire soit-elle, ne couvre qu'une partie finie des cas et ne constitue donc pas une démonstration.

COMMENTAIRES

Noter la boucle `while` : elle ne termine que si le vol atteint 1... c'est-à-dire si la conjecture est vraie pour a . Faire tourner ce programme, c'est déjà parier sur Syracuse.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Quelques rédactions alternatives commentées, les scripts exécutables et les réponses aux défis vous attendent sur le compagne numérique.