



EXERCICES · A0. LOGIQUE, RAISONNEMENT ET PYTHON

Trente exercices pour forger les réflexes de l'année

PROGRAMME D'ENTRAÎNEMENT

PARTIE	EXERCICES	DIFFICULTÉ	PARCOURS	S'APPUIE SUR
I. Dire, écrire, nier	Ex. 1–4	★ à ★★★	■	cours A0, § 1–2
II. L'implication dans tous ses états	Ex. 5–8	★ à ★★★	■	cours A0, § 3
III. L'atelier des raisonnements	Ex. 9–16	★★ à ★★★★★	■ ♦	cours A0, § 4
IV. La récurrence, pièce maîtresse	Ex. 17–24	★★ à ★★★★★★	■ ♦ ★	cours A0, § 4.6
V. Histoires et belles mathématiques	Ex. 25–27	★★★★ à ★★★★★★	♦ ★	cours A0, § 4
VI. Python, le laboratoire	Ex. 28–30	★★ à ★★★★★	♦ ★	cours A0, § 6

AUTOMATISMES EN PARALLÈLE

Cahier de calcul de Première Spécialité : fiches 27 (Logique) et 28 (Théorie des ensembles) ; en échauffement de la partie IV, fiches 13 à 18 (Suites). Cahiers complets et corrigés sur le compagnon numérique.

APL application · THE théorie · SYN synthèse · APR approfondissement ★ difficulté de 1 à 6

⌚ ≈ 10 min · ⌚ ≈ 20 min · ⌚ ≈ 30 min · ⌚ 45 min et plus

I. DIRE, ÉCRIRE, NIER

↔ s'appuie sur COURS A0, § 1–2 · propositions, quantificateurs et leurs négations

EXERCICE 1 · APL-A0-01

★ ■ ⌚

Six énoncés au banc d'essai

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux, puis le justifier : une démonstration s'il est vrai, un contre-exemple s'il est faux.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$
4. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = n$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$
6. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$

Coup de pouce

Les énoncés 5 et 6 utilisent exactement les mêmes symboles. Seul l'ordre change... et tout change.

EXERCICE 2 · APL-A0-02



Traduire, puis nier

- Écrire chacun des énoncés suivants avec des quantificateurs :
 - Tout entier naturel possède un successeur strictement plus grand que lui.
 - Il existe un réel égal à son propre carré.
 - Aucun réel n'a un carré strictement négatif.
- Écrire la négation de chacun des énoncés suivants (sans utiliser de barre de négation ni l'expression « il est faux que ») :
 - $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$
 - $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 41$ n'est pas premier
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$
- Écrire la négation de chacun des énoncés suivants en langage courant, le plus précisément possible :
 - Toutes les fenêtres de l'immeuble sont fermées.
 - Chaque élève de la classe possède au moins un stylo qui fonctionne.
 - S'il pleut demain, le match sera annulé.

Coup de pouce

Pour la question 3.c : nier « $P \implies Q$ », ce n'est pas affirmer « $P \implies \overline{Q}$ ». Relire la table de vérité de l'implication au §3 du cours.

EXERCICE 3 · APL-A0-03



La question de l'ordre

Soit f la fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$. On considère les deux énoncés :

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M \qquad (2) \quad \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$$

- L'énoncé (1) est-il vrai ? Justifier.
- L'énoncé (2) est-il vrai ? Justifier.
- Rédiger une phrase en français qui explique ce que change l'ordre des quantificateurs entre (1) et (2).
- ♦ Montrer que l'énoncé (1) reste vrai si l'on remplace la fonction carré par n'importe quelle fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Coup de pouce

Dans l'énoncé (1), le réel M est choisi après x : il a le droit d'en dépendre.

Le vocabulaire de l'année

Les définitions suivantes serviront toute l'année. Soit (u_n) une suite réelle et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Écrire au registre symbolique (quantificateurs, appartenances) :
 - (a) « la suite (u_n) est majorée » ;
 - (b) « la suite (u_n) est croissante » ;
 - (c) « la fonction f est paire ».
2. Écrire la négation symbolique de chacun de ces trois énoncés.
3. Donner un exemple de suite non majorée, et justifier qu'elle ne l'est pas en utilisant la négation écrite à la question 2.

Coup de pouce

« Majorée » cache deux quantificateurs, dans un ordre précis : c'est exactement le piège de l'exercice 3.

II. L'IMPLICATION DANS TOUS SES ÉTATS

↔ s'appuie sur COURS A0, § 3 · connecteurs, implication, réciproque et contraposée

Le tribunal des implications

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux. S'il est faux, exhiber un contre-exemple ; s'il est vrai, le démontrer.

1. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, (x = y \implies x^2 = y^2)$
2. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, (x^2 = y^2 \implies x = y)$
3. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, (x = y \implies x^3 = y^3)$
4. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, (x^3 = y^3 \implies x = y)$
5. Parmi les égalités $x^2 = y^2$ et $x^3 = y^3$, laquelle est équivalente à $x = y$?

Coup de pouce

Pour la question 4 : factoriser $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$, puis remarquer que $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}$.

La chemise rouge des cosmonautes

On suppose vrai l'énoncé suivant :

« Tous les cosmonautes américains portent une chemise rouge. »

1. Réécrire cet énoncé sous la forme « si ... alors ... ».
2. Énoncer sa réciproque. Est-elle nécessairement vraie ?
3. Énoncer sa contraposée. Est-elle vraie ?
4. Pour chacune des observations suivantes, dire ce que l'on peut conclure avec certitude (et sinon, dire qu'on ne peut rien conclure) :
 - (a) John est un cosmonaute américain.
 - (b) Ivan porte une chemise verte.
 - (c) Pedro porte une chemise rouge.
 - (d) Paul n'est pas un cosmonaute américain.

Nécessaire, suffisant, équivalent

1. Recopier chaque ligne en la complétant par le symbole $\implies$, $\impliedby$ ou $\iff$ qui la rend vraie (les énoncés portent sur $x \in \mathbb{R}$, $(u; v) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$ quelconques) :
 - (a) $uv = 0 \quad \dots \quad (u = 0 \text{ ou } v = 0)$
 - (b) $x \geq 2 \quad \dots \quad x^2 \geq 4$
 - (c) n est un multiple de 4 $\quad \dots \quad n$ est pair
 - (d) $x^2 \leq 0 \quad \dots \quad x = 0$
2. Reformuler la ligne (b) en utilisant les expressions « condition nécessaire » et « condition suffisante ».
3. Justifier soigneusement la ligne (a) : c'est elle qui autorise à résoudre une équation produit.

Enchaîner les implications

Démontrer les implications suivantes :

1. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x > 2 \text{ et } y > x) \implies 0 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \quad |x - 2| \leq 1 \implies 0 < \frac{2x + 3}{x + 2} \leq \frac{9}{5}$
3. $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2, \quad a^2 + b^2 = 1 \implies |a + b| \leq \sqrt{2}$

Coup de pouce

Pour la question 3 : développer $(a + b)^2$, puis comparer $2ab$ et $a^2 + b^2$ (que vaut $(a - b)^2$?).

III. L'ATELIER DES RAISONNEMENTS

EXERCICE 9 · APL-A0-09

★★ ■ ⌚

Tout droit

↔ s'appuie sur COURS A0, § 4.1 · le raisonnement direct

Soient n et m deux entiers impairs.

1. Montrer que $n + m$ est pair.
2. Montrer que nm est impair.
3. En déduire que le carré d'un entier impair est impair.

RAPPEL – ÉCRITURE DES ENTIERS PAIRS ET IMPAIRS

n est pair s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$; n est impair s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Toute démonstration directe sur la parité commence par cette écriture.

EXERCICE 10 · APL-A0-10

★★ ■ ⌚

La chasse aux contre-exemples

↔ s'appuie sur COURS A0, § 4.2 · réfuter un énoncé universel

Chacun des énoncés suivants est faux. Le réfuter en exhibant un contre-exemple, et vérifier soigneusement que celui-ci convient.

1. Tout nombre premier est impair.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$.
3. Si f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$, alors la fonction produit fg est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Tout entier divisible par 3 et par 6 est divisible par 18.
5. Pourquoi un unique contre-exemple suffit-il à réfuter un énoncé de la forme « $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ », alors qu'un million de vérifications ne suffisent pas à le démontrer?

EXERCICE 11 · APL-A0-11

★★★ ■ ⌚

Deux cas valent mieux qu'un

↔ s'appuie sur COURS A0, § 4.3 · la disjonction des cas

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 vaut 0 ou 1. (On distinguera les cas n pair et n impair.)
2. En déduire que 1 000 003 n'est pas un carré parfait.

DÉFI — ♦

Montrer que la somme de deux carrés parfaits n'a jamais pour reste 3 dans la division euclidienne par 4.

EXERCICE 12 · APL-A0-12

★★★★ ♦ ⌚

La disjonction en action

↔ s'appuie sur COURS A0, § 4.3 · la disjonction des cas

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, l'entier $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} + x > 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $2x^2 - |x-3| - 18 = 0$

(b) $\sqrt{x+7} + \sqrt{2x-3} = 4$

Coup de pouce

Question 1 : parmi trois entiers consécutifs, combien sont pairs ? combien sont multiples de 3 ? Question 3.b : commencer par déterminer sur quel ensemble l'équation a un sens, et ne pas oublier de vérifier les solutions candidates après élévation au carré.

EXERCICE 13 · THE-A0-13

★★★★ ♦ ⌚

Prendre le problème à rebours

↔ s'appuie sur COURS A0, § 4.4 · la contraposée

1. Soient a et b deux entiers. Montrer par contraposée : si le produit ab est pair, alors a est pair ou b est pair.
2. Montrer par contraposée : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si 8 ne divise pas $n^2 - 1$, alors n est pair.

Coup de pouce

Question 1 : la négation de « a est pair **ou** b est pair » est « a est impair **et** b est impair » (lois de De Morgan, cours § 3). Question 2 : si $n = 2k + 1$, alors $n^2 - 1 = 4k(k+1)$. Que dire du produit de deux entiers consécutifs ?

EXERCICE 14 · THE-A0-14



L'art de l'impossible

↔ s'appuie sur COURS A0, § 4.5 · le raisonnement par l'absurde

On admet le résultat démontré dans le cours : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1. Montrer par l'absurde que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.
2. En déduire que $1 + \sqrt{2}$ est irrationnel.
3. Montrer de même que le produit d'un rationnel *non nul* et d'un irrationnel est irrationnel. Où l'hypothèse « non nul » intervient-elle ?

DÉFI – ★

Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de plus petit réel strictement positif.

EXERCICE 15 · THE-A0-15



Le face-à-face des équivalences

↔ s'appuie sur COURS A0, § 3 ET 4 · démontrer une équivalence, double implication

1. Montrer que :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{x + y + 2}{2} \iff (x = 1 \text{ et } y = 1)$$

2. Montrer que :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right) = 1 \iff x + y = 0$$

Coup de pouce

Question 1 : tout ramener d'un même côté et faire apparaître une somme de carrés. Question 2 : pour le sens direct, multiplier par la quantité conjuguée $\sqrt{x^2 + 1} - x$ (strictement positive) ; pour le sens réciproque, calculer directement le produit avec $y = -x$.

EXERCICE 16 · SYN-A0-16



À l'aveugle : choisir son arme

↔ s'appuie sur COURS A0, § 4 · les six raisonnements, sans étiquette

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux, choisir l'outil adapté (raisonnement direct, contre-exemple, disjonction des cas, contraposée, absurde, récurrence), puis rédiger une justification complète. **Attention : l'un de ces énoncés est un piège.**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier $n^2 + n$ est pair.
2. La somme de deux nombres irrationnels est toujours irrationnelle.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est un multiple de 3, alors n est un multiple de 3.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $4^n + 5$ est un multiple de 3.
5. Tout entier pair supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers.

Coup de pouce

Le piège n'est pas un énoncé faux. C'est un énoncé dont personne au monde, à ce jour, ne connaît le statut. Le reconnaître fait partie de l'exercice ; le cours, § 1 et § 6, en parle.

IV. LA RÉCURRENCE, PIÈCE MAÎTRESSE

↔ s'appuie sur COURS A0, § 4.6 · le raisonnement par récurrence

EXERCICE 17 · APL-A0-17

★★ ■ ⌚

Premières marches

Démontrer par récurrence, en rédigeant soigneusement les trois étapes (initialisation, hérédité, conclusion) :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

RAPPEL – LE PIPELINE DE LA FICHE

Hérédité : partir de la somme au rang $n + 1$, isoler la somme au rang n , appliquer l'hypothèse de récurrence, conclure par le calcul.

EXERCICE 18 · APL-A0-18

★★★★ ■ ⌚

Les sommes de puissances et le carré caché

1. Démontrer par récurrence :

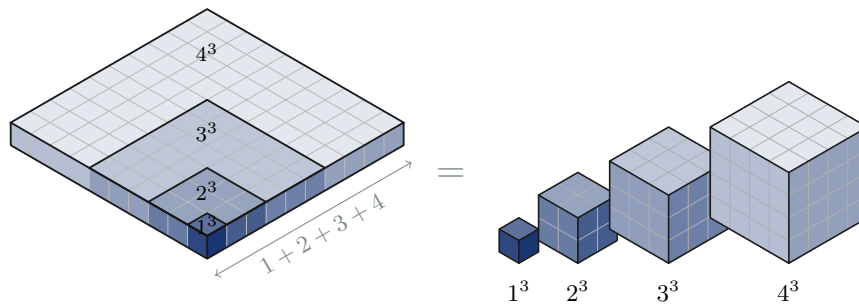
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3. En déduire, sans nouvelle récurrence, l'identité de Nicomaque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$



La figure pour $n = 4$: à gauche, un plateau de côté $1 + 2 + 3 + 4$ et d'épaisseur 1, découpé en bandes ; la bande k contient exactement k^3 petits cubes. À droite, les mêmes petits cubes rassemblés en vrais cubes : découper le cube k en tranches, c'est reconstituer la bande k .

EXERCICE 19 · APL-A0-19

★★★★ ◆ ⌚

Récurrence et divisibilité

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $8^n - 1$ est divisible par 7.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier $4^n + 6n - 1$ est divisible par 9.

Coup de pouce

Pour l'hérédité : écrire $8^{n+1} - 1 = 8(8^n - 1) + 7$. La même idée (faire apparaître l'expression du rang n) fonctionne pour la question 2.

EXERCICE 20 · APL-A0-20

★★★★ ◆ ⌚

L'inégalité de Bernoulli

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$

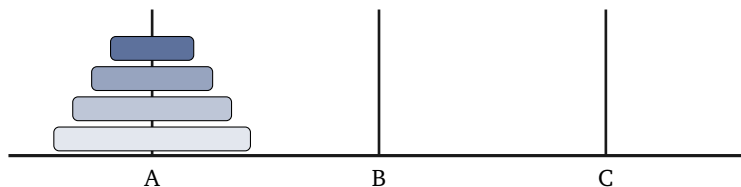
Cette inégalité, dite de Bernoulli, porte le nom du mathématicien suisse Jacques Bernoulli (1654-1705), auteur de contributions majeures en probabilités, en géométrie et en analyse. Elle servira dès le chapitre sur les limites de suites.

EXERCICE 21 · APL-A0-21

★★★★ ◆ ⌚

L'escalier infini

Dans le casse-tête des tours de Hanoï, on doit transférer une tour de disques du piquet A au piquet C, en déplaçant un seul disque à la fois et sans jamais poser un disque sur un disque plus petit. On note u_n le nombre minimal de déplacements pour une tour de n disques. On admet que $u_1 = 1$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n + 1$.



La position de départ pour $n = 4$ disques.

1. Calculer u_2 , u_3 et u_4 .
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.
4. Selon la légende, des moines déplacent une tour de 64 disques à raison d'un disque par seconde. En utilisant $2^{10} \approx 10^3$, donner un ordre de grandeur de la durée totale, en années. Faut-il craindre la fin du monde ?

DÉFI – L'HERÉDITÉ PARFAITE QUI NE PROUVE RIEN ♦

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ l'énoncé : « $4^n + 1$ est divisible par 3 ».

1. Montrer que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie. (On pourra écrire $4^{n+1} + 1 = 4(4^n + 1) - 3$.)
2. L'énoncé $P(n)$ est-il vrai pour au moins un entier n ?
3. Le cours a montré une récurrence dont l'hérédité était cassée (les chevaux). Quelle leçon symétrique tirer de celle-ci ?

EXERCICE 22 · SYN-A0-22

★★★ ♦ ⌚

La somme qui dépasse la racine

1. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n^2 + n} \geq n$.
2. En déduire, à l'aide d'une récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$$

Coup de pouce

Pour l'hérédité, tout revient à montrer que $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$: réduire au même dénominateur et utiliser la question 1.

Les formules closes des suites

1. Soit $r \in \mathbb{R}^*$. On rappelle qu'une suite (u_n) est dite *arithmétique de raison r* si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.
Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + rn$.
2. Soient a et b deux réels avec $a \notin \{0; 1\}$. On considère une suite (u_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n + b$.
 - (a) Résoudre l'équation $x = ax + b$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On note r sa solution.
 - (b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n (u_0 - r) + r$.

Ces deux formules closes reviendront au chapitre sur les suites : vous venez de démontrer les outils que vous utiliserez alors.

L'inégalité triangulaire généralisée

On rappelle l'inégalité triangulaire, vue en seconde :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

L'objectif est de la démontrer, puis de l'étendre à une somme quelconque.

1. Démontrer l'inégalité triangulaire.
2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$$

Coup de pouce

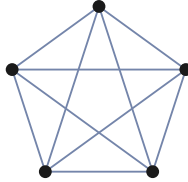
Question 1 : comparer les carrés des deux membres, qui sont positifs. Question 2 : pour l'hérédité, regrouper $x_1 + \dots + x_{n+1}$ en $(x_1 + \dots + x_n) + x_{n+1}$ et appliquer l'inégalité triangulaire, puis l'hypothèse de récurrence.

V. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

↔ s'appuie sur COURS A0, § 4 · deux preuves valent mieux qu'une, et l'ordinateur entre en scène

Le tournoi

Dans un tournoi, chacun des n joueurs ($n \geq 2$) affronte une fois chacun des autres. On note p_n le nombre total de matchs.



Le tournoi à 5 joueurs : chaque segment est un match. Comptez-les !

1. Déterminer p_2 , p_3 et p_4 , puis vérifier p_5 sur la figure.
2. Justifier que : $\forall n \geq 2, p_{n+1} = p_n + n$.
3. En déduire, par récurrence, que : $\forall n \geq 2, p_n = \frac{n(n-1)}{2}$.
4. **Seconde preuve, sans récurrence.** Chaque joueur dispute $n - 1$ matchs. Que compte le produit $n(n - 1)$? Conclure.
5. Laquelle des deux preuves préférez-vous, et pourquoi ?

La chute de la conjecture d'Euler

En 1769, Euler conjecture, généralisant le grand théorème de Fermat, qu'il faut au moins k puissances k -ièmes pour obtenir une puissance k -ième en les sommant. En particulier, pour $k = 5$: aucune somme de quatre puissances cinquièmes d'entiers naturels non nuls n'est une puissance cinquième. La conjecture résiste pendant deux siècles. En 1966, Leon Landier et Thomas Parkin publient dans le *Bulletin of the American Mathematical Society* l'un des articles les plus courts de l'histoire des mathématiques : deux phrases, trouvées à l'aide d'un ordinateur CDC 6600.

1. Écrire au registre symbolique l'énoncé « aucune somme de quatre puissances cinquièmes d'entiers naturels non nuls n'est une puissance cinquième ».
2. Écrire la négation de cet énoncé. Que suffit-il d'exhiber pour réfuter la conjecture ?
3. Le contre-exemple de Landier et Parkin est :

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

Sachant que $144^5 = 61\,917\,364\,224$, expliquer pourquoi la vérification de cette égalité échappe à une calculatrice qui affiche dix chiffres, et comment la mener malgré tout à la main ou en machine (voir l'exercice 29).

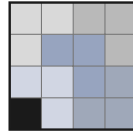
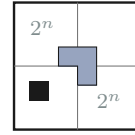
4. Rédiger en trois lignes, comme Landier et Parkin, la réfutation complète de la conjecture : énoncé, contre-exemple, conclusion.

Les triominos de Golomb

En 1954, Solomon Golomb démontre le résultat suivant : *tout échiquier de côté 2^n privé d'une case, quelle qu'elle soit, peut être pavé par des triominos en L*. Sa démonstration, une récurrence sans un seul calcul, est restée célèbre.



le triomino

 4×4 : cinq triominos

l'idée de l'hérédité

1. Traiter le cas $n = 1$: que reste-t-il d'un échiquier 2×2 privé d'une case ?
2. Un pavage est impossible si le compte des cases est mauvais. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier $4^n - 1$ est divisible par 3. (Récurrence, ou astuce de l'exercice 19.)
3. **L'hérédité de Golomb.** On suppose le résultat vrai pour les échiquiers de côté 2^n . Soit un échiquier de côté 2^{n+1} privé d'une case. En découpant l'échiquier en quatre quadrants de côté 2^n et en plaçant *un seul* triomino à cheval sur les trois quadrants sans trou (figure de droite), montrer que chacun des quatre quadrants se retrouve privé d'exactly une case, et conclure.
4. Rédiger la récurrence complète.

Coup de pouce

Toute la magie est dans le triomino central : il crée artificiellement les trous qui manquent aux trois quadrants intacts, pour que l'hypothèse de récurrence s'applique aux quatre.

VI. PYTHON, LE LABORATOIRE

↔ s'appuie sur COURS A0, § 6 · la boîte à outils Python de l'année

est_premier, trois versions

Le cours a écrit une première version de `est_premier(n)`, qui teste tous les diviseurs de 2 à $n - 1$. On l'améliore.

1. Réécrire cette version naïve de mémoire, sans regarder le cours, puis vérifier.
2. Soient n , a et b des entiers naturels tels que $n = ab$, avec $a \geq 2$ et $b \geq 2$. Montrer que $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$. (On pourra raisonner par l'absurde.) En déduire une version de `est_premier` qui ne teste que les diviseurs $d \leq \sqrt{n}$, et estimer le gain pour $n = 10\,007$.
3. La fonction `all` de Python renvoie `True` si tous les éléments d'une séquence sont vrais. Justifier que la version suivante est correcte, puis traduire son test en un énoncé quantifié :

```
1 def est_premier(n):
2     return n >= 2 and all(n % d != 0 for d in range(2, n))
```

- Utiliser l'une des trois versions pour déterminer le plus petit nombre premier strictement supérieur à 1 000.

EXERCICE 29 · SYN-A0-29

★★★★ ♦ ⌚

La machine à contre-exemples

On reprend la fonction du cours, où P est une fonction qui renvoie True ou False :

```
1 def contre_exemple(P, N):
2     for n in range(N):
3         if not P(n):
4             return n
5     return None
```

- On pose $P = \text{lambda } n: (4*n + 5) \% 3 == 0$ et l'appel `contre_exemple(P, 10**6)` renvoie None. Qu'a démontré la machine? Qu'avez-vous, vous, démontré à l'exercice 16? Conclure par une maxime.
- Fermat affirmait que $F_n = 2^{2^n} + 1$ est premier pour tout $n \in \mathbb{N}$. Euler découvrit en 1732 que 641 divise F_5 . Vérifier en une ligne de Python que $4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$.
- Vérifier de même, en une ligne, le contre-exemple de Lander et Parkin de l'exercice 26, puis celui de Roger Frye (1988), plus petit exposant connu :

$$95\,800^4 + 217\,519^4 + 414\,560^4 = 422\,481^4$$

- Expliquer pourquoi ces vérifications, hors de portée d'une calculatrice, sont immédiates pour Python.

EXERCICE 30 · SYN-A0-30

★★★★ ♦ ⌚

Le vol du planeur de Syracuse

Soit $a \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite de Syracuse de premier terme a : $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La *conjecture de Syracuse* affirme que, quel que soit a , la suite finit par atteindre 1. On appelle *temps de vol* le plus petit n tel que $u_n = 1$, et *altitude maximale* le plus grand terme atteint.

- Calculer à la main les termes de la suite pour $a = 6$, jusqu'à atteindre 1.
- Écrire une fonction `vol(a)` qui renvoie la liste des termes de la suite, de a jusqu'à 1.
- En déduire deux fonctions `temps_de_vol(a)` et `altitude_max(a)`.
- Vérifier que pour $a = 27$, le temps de vol vaut 111 et l'altitude maximale 9 232.

DÉFI – ★

La conjecture a été vérifiée par ordinateur pour tout $a < 2^{71}$ (2025). En une phrase utilisant le vocabulaire du chapitre, expliquer pourquoi elle n'est toujours pas démontrée.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

D'autres énoncés à l'aveugle, les scripts complets du chapitre et les fiches du cahier de calcul vous attendent sur le compagnon numérique.