



CORRIGÉ · A1. SUITES : LIMITES

Corrigé des trente et un exercices, feuille en main

RÉDACTION MODÈLE : la copie idéale, à imiter · MÉTHODE : la stratégie en une ligne, puis le calcul · COMMENTAIRES :
ce que la solution enseigne

I. PREMIERS PAS ASYMPTOTIQUES

EXERCICE 1 · APL-A1-01



Majorée, minorée, bornée

MÉTHODE Un majorant est un réel fixe : la réponse ne doit pas contenir la lettre n .

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n < 3$. Minorée par 2 (atteint en $n = 0$), majorée par 3 : **bornée**.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = n(n-10)$. L'étude du trinôme donne un minimum en $n = 5$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq -25$. Minorée, mais non majorée puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$: **non bornée**.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq w_n \leq 1$: **bornée**.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq t_n \leq \frac{1}{2}$ (le minimum est atteint en $n = 1$, le maximum en $n = 2$) : **bornée**.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$: **bornée**.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n+1 \leq 2^n$ (résultat établi à l'exercice 20), donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \geq 1$. Minorée, non majorée puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$: **non bornée**.

COMMENTAIRES

Trois erreurs à ne pas commettre. Répondre « u_n est majorée par u_n » (un majorant ne dépend pas de n) ; confondre **non majorée** et **de limite** $+\infty$ (la suite $((-1)^n n)$ de l'exercice 2 sépare les deux) ; oublier qu'une suite peut être bornée *sans* converger, comme la quatrième et la cinquième.

Les trois comportements

N°	FAMILLE	JUSTIFICATION
1	convergente	$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 3 - \frac{1}{n}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.
2	divergente vers $+\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1000) = +\infty$ (translation d'une suite de limite $+\infty$).
3	sans limite	Non bornée, mais $w_{2n} = 2n \rightarrow +\infty$ et $w_{2n+1} = -(2n + 1) \rightarrow -\infty$.
4	divergente vers $+\infty$	Géométrique de raison $\frac{3}{2} > 1$.
5	convergente	Géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, et $ \frac{1}{2} < 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.
6	convergente	$\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n \leq \frac{1}{n}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$ par encadrement.

COMMENTAIRES

La troisième est le **contre-exemple à garder en mémoire** : « ne pas converger » n'est pas « tendre vers l'infini ». Trois comportements, pas deux. Noter aussi que la justification de la cinquième tient au **module** de la raison, jamais à son signe.

Le défi des epsilon

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$, comme $u_n > 0$:

$$|u_n| < \varepsilon \iff \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Pour $\varepsilon = 10^{-2}$: $n > 10^4$, le plus petit rang est $N = 10\,001$. Pour $\varepsilon = 10^{-4}$: $n > 10^8$, d'où $N = 100\,000\,001$.

RÉDACTION MODÈLE – REVENIR À LA DÉFINITION

2. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$, qui est un entier naturel vérifiant $N > \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Soit $n \geq N$. Alors $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$, donc $\sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon}$ (la fonction racine carrée est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et les deux membres sont positifs), puis, par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$:

$$|u_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Nous avons donc établi : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - 0| < \varepsilon$. Par définition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

3. Aussi petite que soit la marge d'erreur que l'on se fixe, il existe un rang à partir duquel *tous* les termes de la suite sont à une distance de ℓ inférieure à cette marge.

4. L'énoncé échangé affirme qu'il existe *un seul et même* rang N qui convienne pour *toutes* les marges à la fois. À partir de ce rang, $|u_n - \ell|$ serait inférieur à tout réel strictement positif, donc nul : la suite serait **stationnaire égale à ℓ** à partir du rang N . C'est faux ici, car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et (u_n) est strictement décroissante : elle n'est constante à partir d'aucun rang.

COMMENTAIRES

L'ordre des quantificateurs **est** la définition. Dans le bon ordre, N a le droit de dépendre de ε , et c'est tout ce qui sépare « converger » de « être constant ». Retenir le geste de la question 2 : partir de l'inégalité voulue, la résoudre en n , et *seulement ensuite* rédiger dans le sens direct.

EXERCICE 4 · SYN-A1-04



La suite qui ment

1. $u_{10} \approx 0,348\,678$, $u_{100} \approx 0,366\,032$, $u_{1000} \approx 0,367\,695$.

2. Non. Les valeurs ne s'approchent pas de 1 mais se stabilisent autour de 0,3679 : elles *contredisent* sa conclusion.

3. L'élève a cru appliquer le théorème sur la limite d'une **puissance** : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^p = \ell^p$. Ce théorème exige un exposant p **fixe**. Ici l'exposant est n : il varie en même temps que la base. Aucun théorème d'opération du cours ne porte sur une expression dont la base *et* l'exposant dépendent de n .

COMMENTAIRES

Le piège est d'autant plus efficace que le raisonnement est presque juste : la base tend bien vers 1. Ce qui est faux, c'est de **figer** une partie de l'expression pendant qu'on fait tendre l'autre. La limite est en réalité $\frac{1}{e}$, et il faudra le logarithme pour le démontrer.

II. LA BOÎTE À OUTILS DU CALCUL

EXERCICE 5 · APL-A1-05



Opérations sans piège

N°	LIMITE	THÉORÈME INVOQUÉ
1	$+\infty$	Somme : $n^3 \rightarrow +\infty$ et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.
2	0	Quotient : numérateur constant, dénominateur de limite $+\infty$.
3	$+\infty$	Somme : $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$ et -7 constant.
4	0	Quotient : $\sqrt{n} + 2 \rightarrow +\infty$.
5	$+\infty$	Produit : $2 - \frac{3}{n} \rightarrow 2 > 0$ et $n + 1 \rightarrow +\infty$.
6	$+\infty$	Produit : $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$ et $2 + \frac{1}{n} \rightarrow 2 > 0$.

COMMENTAIRES

Le théorème du produit exige que la limite finie soit **non nulle** : si $2 - \frac{3}{n}$ tendait vers 0, la cinquième deviendrait une forme indéterminée. Vérifier cette clause avant de conclure, toujours.

Nommer la forme indéterminée

RÉDACTION MODÈLE – NOMMER, PUIS LEVER

1. Les suites $(4n^2 - 3n)$ et $(2n^2 + 1)$ tendent toutes deux vers $+\infty$: le quotient présente la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Factorisons numérateur et dénominateur par leur terme prépondérant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^2 \left(4 - \frac{3}{n}\right)}{n^2 \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{4 - \frac{3}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}}$$

(la simplification par n^2 est licite car $n^2 \neq 0$).

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{3}{n}\right) = 4$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = 2 \neq 0$. Par quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n}{2n^2 + 1} = 2$$

2. Forme $\infty \times 0$. En développant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = 1 - \frac{1}{n}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

3. Forme $\infty - \infty$. On factorise par celui des deux qui écrase l'autre. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = 3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 1$ car $0 < \frac{2}{3} < 1$. Par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$.

4. Forme $\frac{\infty}{\infty}$. Pour tout $n \geq 2$ (rang à partir duquel $n - \sqrt{n} \neq 0$) : $t_n = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}$, dont le dénominateur tend vers $1 \neq 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 1$.

COMMENTAIRES

Quatre formes indéterminées seulement : $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$. « Indéterminée » ne veut pas dire « sans limite » : cela veut dire que **la forme seule ne suffit pas** à décider. Les quatre suites ci-dessus ont toutes une limite.

Le terme prépondérant

MÉTHODE Même gabarit qu'à l'exercice 6 : factoriser haut et bas par le terme dominant, simplifier, conclure par quotient.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2n^3 - 5n^2 + 7 = n^3 \left(2 - \frac{5}{n} + \frac{7}{n^3}\right)$, produit d'une suite de limite $+\infty$ par une suite de limite $2 > 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^3 - 5n^2 + 7) = +\infty$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{-n^3 + n}{2n^2 + 5} = n \times \frac{-1 + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^2}}$. Le second facteur tend vers $-\frac{1}{2} < 0$ et $n \rightarrow +\infty$: la limite vaut $-\infty$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{7n^2 - 1}{n^3 + n^2} = \frac{1}{n} \times \frac{7 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}$. Le second facteur tend vers 7 et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$: la limite vaut 0.

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{5 \times 4^n - 3^n}{2 \times 4^n + 1} = \frac{5 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2 + \left(\frac{1}{4}\right)^n}$, et comme $0 < \frac{3}{4} < 1$ et $0 < \frac{1}{4} < 1$, la limite vaut $\boxed{\frac{5}{2}}$.

COMMENTAIRES

Pour une expression **polynomiale**, le terme dominant est celui de plus haut degré ; pour une expression **exponentielle**, c'est la plus grande base. Ne jamais mélanger les deux critères : dans la quatrième, 4^n domine, pas 5.

EXERCICE 8 · APL-A1-08



La quantité conjuguée

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n+3} - \sqrt{n} = \frac{(n+3) - n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}$, dont le dénominateur tend vers $+\infty$: la limite vaut 0.

RÉDACTION MODÈLE – LA QUANTITÉ CONJUGUÉE

2. La suite $(\sqrt{n^2 + 5n})$ tend vers $+\infty$ et (n) aussi : forme indéterminée $\infty - \infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité $\sqrt{n^2 + 5n} + n$ est strictement positive, donc non nulle : on peut multiplier et diviser par elle.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n^2 + 5n} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + 5n} - n)(\sqrt{n^2 + 5n} + n)}{\sqrt{n^2 + 5n} + n} = \frac{(n^2 + 5n) - n^2}{\sqrt{n^2 + 5n} + n} = \frac{5n}{\sqrt{n^2 + 5n} + n}.$$

Factorisons alors par n . Comme $n > 0$, on a $\sqrt{n^2} = n$, d'où $\sqrt{n^2 + 5n} = n\sqrt{1 + \frac{5}{n}}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n^2 + 5n} - n = \frac{5n}{n\left(\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + 1\right)} = \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + 1}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right) = 1$, donc par composition avec la fonction racine carrée, continue en 1, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{5}{n}} = 1$, puis le dénominateur tend vers $2 \neq 0$. Par quotient :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) = \frac{5}{2}}$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{4n^2 + n} - 2n = \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} = \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2}$, de limite $\frac{1}{2+2} = \boxed{\frac{1}{4}}$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(\sqrt{n^2 + 1} - n) = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1}$, de limite $\boxed{\frac{1}{2}}$.

COMMENTAIRES

Trois différences bâties sur le même moule, et trois limites différentes : $\frac{5}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$. La forme $\infty - \infty$ ne préjuge de **rien**. Le coefficient tombe de la factorisation sous le radical : $\sqrt{4n^2 + n} = 2n\sqrt{1 + \frac{1}{4n}}$ et c'est ce $2n$, pas n , qui compense le $2n$ retranché.

Encadrer pour conclure

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{1}{n}.$$

Les deux suites encadrantes convergent vers 2 : par le théorème d'encadrement, (u_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 \leq \sin(n) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(n^2) \leq 1$, donc, en sommant puis en divisant par $\sqrt{n} > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{-2}{\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Les deux bornes tendent vers 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

RÉDACTION MODÈLE – ENCADRER UNE SOMME DONT LE NOMBRE DE TERMES VARIE

3.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. De $1 \leq k \leq n$ on tire, en ajoutant n^2 :

$$n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n.$$

Ces trois quantités sont strictement positives ; la fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, l'ordre s'inverse. En multipliant enfin par $k > 0$, qui conserve le sens :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \frac{k}{n^2 + n} \leq \frac{k}{n^2 + k} \leq \frac{k}{n^2 + 1}.$$

3.(b) Sommons ces n inégalités de même sens pour k allant de 1 à n . Les dénominateurs ne dépendent pas de k : on peut les mettre en facteur, et $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} \leq S_n \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}.$$

Or $n^2 + n = n(n+1)$, donc le minorant vaut exactement $\frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Quant au majorant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)} = \frac{n^2+n}{2n^2+2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Les deux bornes convergent vers $\frac{1}{2}$: par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k} = \frac{1}{2}$$

COMMENTAIRES

Une somme dont le **nombre de termes** dépend de n ne se traite jamais terme à terme : chaque terme tend vers 0, et pourtant la somme tend vers $\frac{1}{2}$. La seule voie est l'encadrement global. Noter l'élégance du minorant : il ne tend pas vers $\frac{1}{2}$, il **vaut** $\frac{1}{2}$ pour tout n , si bien que $S_n \geq \frac{1}{2}$ dès le premier rang. Vérification de bon sens : $S_1 = \frac{1}{2} = 0,5$ et $S_2 = \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \approx 0,533$. ✓

III. LA GÉOMÉTRIQUE DANS TOUS SES ÉTATS

EXERCICE 10 · APL-A1-10



Les quatre régimes

1.

SUITE	LIMITE	POSITION DE LA RAISON
$(\frac{4}{5})^n$	0	$0 < \frac{4}{5} < 1$
$(\frac{5}{4})^n$	$+\infty$	$\frac{5}{4} > 1$
$(-3)^n$	pas de limite	$-3 \leq -1$
$(-\frac{3}{4})^n$	0	$ - \frac{3}{4} < 1$
$0,999^n$	0	$0 < 0,999 < 1$
$1,001^n$	$+\infty$	$1,001 > 1$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3^n ((\frac{2}{3})^n - 1)}{3^n ((\frac{2}{3})^n + 1)} = \frac{(\frac{2}{3})^n - 1}{(\frac{2}{3})^n + 1}$. Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, le numérateur tend vers -1 et le dénominateur vers $1 \neq 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

3.

MÉTHODE Une minoration linéaire de 5^n ne suffit pas face à n : il faut une minoration quadratique.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 5^n \geq n^2$. **Initialisation** : $5^1 = 5 \geq 1$. **Hérédité** : supposons $5^n \geq n^2$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors $5^{n+1} = 5 \times 5^n \geq 5n^2$. Or

$$5n^2 - (n+1)^2 = 4n^2 - 2n - 1 \geq 4 - 2 - 1 = 1 > 0$$

pour $n \geq 1$, car $n \mapsto 4n^2 - 2n - 1$ est croissante sur $[1; +\infty[$. Donc $5^{n+1} \geq (n+1)^2$. **Conclusion** : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 5^n \geq n^2$.

Il vient $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{5^n}{n} \geq \frac{n^2}{n} = n$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$: par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n}{n} = +\infty$.

COMMENTAIRES

La question 3 contient la seule idée neuve de l'exercice : Bernoulli appliquée à q donne une minoration **linéaire**, insuffisante face à n ; appliquée à $\sqrt{q}$ puis élevée au carré, elle donne une minoration **quadratique**, qui l'emporte. Le même tour, répété, montrerait que q^n écrase n^p pour tout p : c'est la croissance comparée, au programme du chapitre F1.

Sommer une géométrie

1. $\sum_{k=0}^{20} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{21}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{21}}\right) \approx 1,5$. Comme $0 < \frac{1}{3} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$, donc
- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$
- 2.

MÉTHODE La formule commence à $k = 0$: on factorise par le premier terme réellement présent.

Pour $n \geq 3$:

$$\forall n \geq 3, \quad \sum_{k=3}^n \left(\frac{2}{5}\right)^k = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \sum_{j=0}^{n-3} \left(\frac{2}{5}\right)^j = \frac{8}{125} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}}{1 - \frac{2}{5}}.$$

Comme $0 < \frac{2}{5} < 1$, la limite vaut $\frac{8}{125} \times \frac{5}{3} = \boxed{\frac{8}{75}}$.

RÉDACTION MODÈLE – LE NOMBRE 0,999...

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (d_n) est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{9}{10}$ et de raison $\frac{1}{10}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n = \sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \times \frac{10}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 1 - \frac{1}{10^n}.$$

Or $0 < \frac{1}{10} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^n} = 0$, et par somme :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 1}$$

Par définition, le nombre décimal illimité 0,999... est cette limite. Ainsi $0,999... = 1$: ces deux écritures désignent le même nombre réel.

Défi. Il faut d'abord faire admettre ce que désigne l'écriture 0,999... Ce n'est pas « un nombre dont les 9 continuent », formulation qui décrit un processus inachevé et suggère un nombre situé juste avant 1 ; c'est, par définition, la limite de la suite de ses troncatures. Une fois cette convention acceptée, l'égalité n'est plus une opinion mais un calcul, et celui-ci ne laisse aucune marge : la suite (d_n) a une limite, et cette limite vaut 1. Le désaccord porte donc sur la définition, jamais sur la démonstration.

COMMENTAIRES

Trois pièges de sommation dans un même exercice. Le rang de départ (la question 2 ne commence pas à $k = 0$) ; le nombre de termes (de $k = 1$ à $k = n$, il y en a n , pas $n + 1$) ; et la confusion entre la somme **partielle** d_n , qui est strictement inférieure à 1 pour tout n , et sa **limite**, qui vaut exactement 1. Aucun d_n n'atteint 1, et pourtant $0,999... = 1$: c'est toute la différence entre un terme et une limite.

Le coureur et le tour de l'Europe

1. La suite (d_n) est géométrique de premier terme $d_1 = 50$ et de raison $0,99$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = 50 \times 0,99^{n-1}$.
Par somme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n = \sum_{k=1}^n d_k = 50 \times \frac{1 - 0,99^n}{1 - 0,99} = 5\,000(1 - 0,99^n).$$

2.

n	10	100	500	1000
D_n	478	3 170	4 967	5 000

3. Non. Comme $0,99 > 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0,99^n > 0$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n = 5\,000(1 - 0,99^n) < 5\,000.$$

La distance totale est strictement majorée par 5 000 km, et ce quel que soit le nombre de jours. Comme par ailleurs $0 < 0,99 < 1$ entraîne $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,99^n = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = 5\,000$: le coureur **s'approche** de 5 000 km autant qu'on veut, sans jamais les atteindre.

4. Chaque jour il court, donc D_n augmente ; mais les distances quotidiennes décroissent géométriquement, assez vite pour que leur cumul reste borné. Une somme d'une infinité de termes strictement positifs peut être finie.

COMMENTAIRES

La dernière colonne du tableau est un **piège d'arrondi** à ne pas laisser passer : $D_{1000} \approx 4\,999,78$, qui s'arrondit à 5 000 km, alors que la question 3 démontre que $D_n < 5\,000$ pour tout n . L'arrondi affiche une égalité que le calcul exact interdit. Aucune valeur numérique, si convaincante soit-elle, ne remplace la démonstration.

Rembourser un emprunt

1. $C_1 = 1,0025 \times 200\,000 - 1\,100 = 199\,400$ et $C_2 = 1,0025 \times 199\,400 - 1\,100 = 198\,798,50$. La première mensualité a remboursé $200\,000 - 199\,400 = \boxed{600 \text{ euros}}$ de capital : sur 1 100 euros versés, 500 euros sont partis en intérêts.

2.

MÉTHODE Exprimer D_{n+1} en fonction de D_n en remplaçant C_n par $D_n + 440\,000$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad D_{n+1} &= C_{n+1} - 440\,000 = 1,0025 C_n - 1\,100 - 440\,000 \\ &= 1,0025 (D_n + 440\,000) - 441\,100 = 1,0025 D_n + 441\,100 - 441\,100 = 1,0025 D_n. \end{aligned}$$

Ainsi (D_n) est géométrique de raison $1,0025$, de premier terme $D_0 = 200\,000 - 440\,000 = -240\,000$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, D_n = -240\,000 \times 1,0025^n$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = 440\,000 - 240\,000 \times 1,0025^n$$

4. L'emprunt est soldé au premier rang n tel que $C_n \leq 0$, soit $1,0025^n \geq \frac{440\,000}{240\,000} = \frac{11}{6}$. Une recherche de seuil à la calculatrice donne $C_{242} \approx 831,16 > 0$ et $C_{243} \approx -266,76 \leq 0$: il faut 243 mensualités, soit vingt ans et trois mois, la dernière étant partielle.

5. Le point fixe de la relation $\ell = 1,0025\ell - M$ vaut $\ell = \frac{M}{0,0025} = 400\,M$. Pour $M = 500$, ce point fixe vaut $200\,000 = C_0$: la suite est alors **constante**, égale à 200 000. La mensualité couvre exactement les intérêts du mois et ne rembourse aucun capital : l'emprunt n'est jamais soldé.

COMMENTAIRES

Le 440 000 de l'énoncé n'est pas un cadeau, c'est le **point fixe** : le seul réel que la relation de récurrence laisse immobile. C'est lui qu'il faut chercher à chaque fois qu'on veut ramener une récurrence affine $C_{n+1} = aC_n + b$ à une suite géométrique. La question 5 en donne la lecture financière : tant que la mensualité reste sous le seuil $400\,M$, on ne rembourse rien du tout.

EXERCICE 14 · APR-A1-14



Le tapis de Sierpinski

1. $\mathcal{A}_0 = 1, \quad \mathcal{A}_1 = \frac{8}{9}, \quad \mathcal{A}_2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{81}.$

2. À chaque étape, tout carré restant est découpé en neuf carrés égaux, chacun d'aire $\frac{1}{9}$ de la sienne, et l'on en retire un : il reste donc les $\frac{8}{9}$ de l'aire précédente. Comme cette opération est appliquée simultanément à tous les carrés restants, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{A}_{n+1} = \frac{8}{9}\mathcal{A}_n$. La suite $(\mathcal{A}_n)$ est géométrique de raison $\frac{8}{9}$ et de premier terme 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{A}_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

3. Comme $0 < \frac{8}{9} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = 0$: l'aire du tapis tend vers zéro. Sur la figure, la surface grise s'éclaircit et se morcelle sans fin.

4. À l'étape 1 on retire 1 carré. Chaque carré présent au début d'une étape en engendre 8 à l'étape suivante, donc à l'étape k on retire 8^{k-1} carrés. Par somme géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{P}_n = \sum_{k=1}^n 8^{k-1} = \frac{8^n - 1}{7},$$

et comme $8 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}_n = +\infty$.

5. Une aire nulle n'est pas une absence de points. Le bord du carré initial, par exemple, n'est jamais retiré : il subsiste intégralement. Le tapis limite contient donc une infinité de points, tout en étant de mesure nulle. « Ne rien peser » et « n'être rien » sont deux énoncés distincts.

COMMENTAIRES

Deux suites, deux infinis contraires : l'aire s'effondre vers 0 pendant que le nombre de trous explose vers $+\infty$. C'est la signature des objets fractals, et le devoir maison du chapitre pousse le paradoxe d'un cran de plus.

IV. ENCADRER, CONTRACTER, CONCLURE

EXERCICE 15 · APL-A1-15



Première récurrence sur un encadrement

1. $u_1 = \sqrt{5} \approx 2,236$, $u_2 \approx 2,734$, $u_3 \approx 2,910$.

RÉDACTION MODÈLE – RÉCURRENCE SUR UN ENCADREMENT, PUIS LIMITE MONOTONE

2. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : 1 \leq u_n \leq 3$.

Initialisation. $u_0 = 1$ et $1 \leq 1 \leq 3$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, c'est-à-dire $1 \leq u_n \leq 3$. Alors :

$$2 \leq 2u_n \leq 6, \quad \text{puis} \quad 5 \leq 2u_n + 3 \leq 9.$$

Ces trois quantités sont positives et la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, donc $\sqrt{5} \leq \sqrt{2u_n + 3} \leq 3$, c'est-à-dire $\sqrt{5} \leq u_{n+1} \leq 3$. Comme $\sqrt{5} \geq 1$, on obtient $1 \leq u_{n+1} \leq 3$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 3$.

3. Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$. Les deux termes étant positifs d'après la question 2, comparons leurs carrés :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2u_n + 3 - u_n^2 = -(u_n - 3)(u_n + 1).$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 3$, donc $u_n - 3 \leq 0$ et $u_n + 1 > 0$: le produit $(u_n - 3)(u_n + 1)$ est négatif, et son opposé positif. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 \geq u_n^2$, et comme u_{n+1} et u_n sont positifs, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est donc **croissante**.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 3. D'après le théorème de la limite monotone, elle **converge**. Aucun calcul supplémentaire n'est nécessaire : l'existence de la limite est acquise sans que sa valeur soit connue.

COMMENTAIRES

Le théorème de la limite monotone est un théorème d'**existence** : il affirme qu'il y a une limite, il ne la livre pas. C'est précisément ce qui en fait un outil, et non un calcul de plus. Retenir le geste de la question 3 : pour comparer deux quantités positives, comparer leurs carrés évite le radical. La limite vaut ici 3, l'unique solution positive de $\ell = \sqrt{2\ell + 3}$, mais l'établir demande un résultat du chapitre F1.

EXERCICE 16 · SYN-A1-16



Télescopage et minoration

1. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$. **Initialisation** : $u_0 = 2 \geq 2$. **Hérédité** : supposons $u_n \geq 2$ pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors $1 + u_n \geq 3 > 0$, donc $(1 + u_n)^2 \geq 9$ par croissance de la fonction carré sur $[0; +\infty[$, puis $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n)^2 \geq \frac{9}{2} \geq 2$. **Conclusion** : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.

2. En développant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(1 + u_n)^2 - u_n = \frac{1}{2} + u_n + \frac{1}{2}u_n^2 - u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u_n^2.$$

Or $u_n \geq 2$ donc $u_n^2 \geq 4$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$.

3.

MÉTHODE *Télescope* : la somme des différences consécutives se réduit aux deux termes extrêmes.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k).$$

Cette somme comporte exactement n termes, chacun minoré par $\frac{5}{2}$ d'après la question 2. Donc $u_n - u_0 \geq \frac{5n}{2}$, et comme $u_0 = 2$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}}$$

(l'inégalité est également vraie au rang 0, où elle s'écrit $2 \geq 2$).

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + \frac{5n}{2}) = +\infty$: par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

COMMENTAIRES

Le mécanisme mérite d'être nommé : une minoration **uniforme** du pas ($\frac{5}{2}$ à chaque tour, indépendamment de n) suffit à faire exploser la suite. Une minoration qui dépendrait de n et tendrait vers 0 ne donnerait rien : c'est exactement ce qui sépare cette suite d'une suite convergente, dont les pas s'écrasent.

EXERCICE 17 · SYN-A1-17



Une homographique de bout en bout

1. $u_1 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, $u_2 = \frac{9}{4,5} = 2$, $u_3 = \frac{9}{4} = 2,25$. La suite semble croissante et majorée par 3, donc convergente, vraisemblablement vers 3.

2. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 3$. **Initialisation** : $u_0 = 0$ et $0 \leq 0 < 3$. **Hérédité** : supposons $0 \leq u_n < 3$ pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors $3 < 6 - u_n \leq 6$, donc $6 - u_n > 0$ et u_{n+1} est bien défini ; par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$:

$$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{6 - u_n} < \frac{1}{3}, \quad \text{puis} \quad \frac{9}{6} \leq u_{n+1} < 3.$$

Comme $\frac{9}{6} \geq 0$, on a $0 \leq u_{n+1} < 3$. **Conclusion** : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 3$.

3. D'après la question 2, $\forall n \in \mathbb{N}, 6 - u_n > 0$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{9}{6 - u_n} - u_n = \frac{9 - u_n(6 - u_n)}{6 - u_n} = \frac{u_n^2 - 6u_n + 9}{6 - u_n} = \frac{(u_n - 3)^2}{6 - u_n}.$$

Le numérateur est un carré, donc positif, et le dénominateur est strictement positif : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite est **croissante**.

RÉDACTION MODÈLE – LA SUITE AUXILIAIRE

4. D'après la question 2, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$, donc $3 - u_n > 0$: la suite (a_n) est bien définie. Calculons d'abord $3 - u_{n+1}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3 - u_{n+1} = 3 - \frac{9}{6 - u_n} = \frac{3(6 - u_n) - 9}{6 - u_n} = \frac{9 - 3u_n}{6 - u_n} = \frac{3(3 - u_n)}{6 - u_n}.$$

Cette quantité est strictement positive, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3 - u_{n+1}} = \frac{6 - u_n}{3(3 - u_n)}.$$

Formons alors la différence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} - a_n = \frac{6 - u_n}{3(3 - u_n)} - \frac{1}{3 - u_n} = \frac{(6 - u_n) - 3}{3(3 - u_n)} = \frac{3 - u_n}{3(3 - u_n)} = \frac{1}{3}.$$

Cette différence ne dépend pas de n : la suite (a_n) est **arithmétique de raison $\frac{1}{3}$** , de premier terme $a_0 = \frac{1}{3-0} = \frac{1}{3}$.

5. Il vient $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{3} + \frac{n}{3} = \frac{n+1}{3}$. Comme $a_n \neq 0$ et $a_n = \frac{1}{3-u_n}$, on a $3 - u_n = \frac{3}{n+1}$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3 - \frac{3}{n+1}$$

Enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n+1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

COMMENTAIRES

Vérification de bon sens, à faire systématiquement : la formule donne $u_1 = \frac{3}{2}$, $u_2 = 2$, $u_3 = \frac{9}{4}$, conformes à la question 1. ✓ La suite auxiliaire n'a rien de magique : la limite conjecturée $\ell = 3$ désigne la quantité $3 - u_n$, celle qui tend vers 0, et c'est son *inverse* qui se linéarise. Retenir le geste de la question 3 : une différence $u_{n+1} - u_n$ qui se factorise en carré donne la monotonie sans aucune récurrence.

EXERCICE 18 · THE-A1-18

★★★★ ♦ ☆ ⌚

Le mécanisme de la contraction

RÉDACTION MODÈLE – LA CONTRACTION

1. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.

Initialisation. Au rang 0 : $k^0 |u_0 - \ell| = |u_0 - \ell|$, et l'inégalité $|u_0 - \ell| \leq |u_0 - \ell|$ est vraie.

Hérédité. Supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé. L'hypothèse de l'énoncé donne $|u_{n+1} - \ell| \leq k |u_n - \ell|$. Or $k > 0$, donc multiplier l'hypothèse de récurrence par k conserve le sens de l'inégalité :

$$k |u_n - \ell| \leq k \times k^n |u_0 - \ell| = k^{n+1} |u_0 - \ell|.$$

Par transitivité, $|u_{n+1} - \ell| \leq k^{n+1} |u_0 - \ell|$.

Conclusion. Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.

2. Comme $0 < k < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n |u_0 - \ell| = 0$. Par ailleurs $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq$

$|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$. Par le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

3. On vérifie d'abord $\frac{2+6}{4} = 2$: le réel $\ell = 2$ est bien point fixe. Ensuite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - 2 = \frac{v_n + 6}{4} - 2 = \frac{v_n + 6 - 8}{4} = \frac{v_n - 2}{4}, \quad \text{donc} \quad |v_{n+1} - 2| = \frac{1}{4} |v_n - 2|.$$

L'hypothèse de contraction est vérifiée avec $k = \frac{1}{4} \in]0; 1[$. D'après la question 2, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$.

4. Ici $|v_0 - 2| = 2$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n - 2| \leq 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Il suffit que $2 \times 4^{-n} < 10^{-6}$. Or $2 \times 4^{-10} \approx 1,91 \times 10^{-6}$ et $2 \times 4^{-11} \approx 4,77 \times 10^{-7}$: **11 itérations** suffisent à garantir $|v_n - 2| < 10^{-6}$.

COMMENTAIRES

Noter la portée de l'énoncé : la question 1 ne suppose **rien** sur la manière dont (u_n) est construite, seulement l'inégalité de contraction. C'est un théorème, pas un calcul, et il s'applique tel quel à toute suite qui la vérifie. Attention au sens de la question 4 : 11 itérations *garantissent* la précision ; la convergence effective est en général meilleure que la majoration.

EXERCICE 19 · SYN-A1-19



Récurrence d'ordre deux, et la formule de Binet

$$1. \quad u_2 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}, \quad u_3 = \frac{2+\frac{3}{2}}{2} = \frac{7}{4}, \quad u_4 = \frac{\frac{3}{2}+\frac{7}{4}}{2} = \frac{13}{8}.$$

2.

MÉTHODE Exprimer v_{n+1} et faire réapparaître v_n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}) - u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = -\frac{1}{2}v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$.

3. Par télescopage puis somme géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Cette expression vaut aussi au rang 0. Comme $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{5}{3}$.

4. φ et ψ sont les racines du trinôme $x^2 - x - 1$, de discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$ et de racines $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Elles vérifient donc $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\psi^2 = \psi + 1$.

5. En multipliant $\varphi^2 = \varphi + 1$ par φ^n , il vient $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$, et de même pour ψ . Par différence puis division par $\sqrt{5} \neq 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad G_{n+2} = \frac{\varphi^{n+2} - \psi^{n+2}}{\sqrt{5}} = \frac{(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}) + (\varphi^n - \psi^n)}{\sqrt{5}} = G_{n+1} + G_n.$$

6. $G_1 = \frac{\varphi - \psi}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = F_1$ et, puisque $\varphi + \psi = 1$, $G_2 = \frac{\varphi^2 - \psi^2}{\sqrt{5}} = \frac{(\varphi - \psi)(\varphi + \psi)}{\sqrt{5}} = 1 = F_2$. Les deux suites ont les mêmes deux premiers termes et vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2 : une récurrence double donne $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = G_n$.

7. $|\psi| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi^n = 0$. Ainsi, pour les grandes valeurs de n , $F_n \approx \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$: la suite de Fibonacci croît géométriquement, à la vitesse du nombre d'or.

COMMENTAIRES

Une récurrence d'ordre 2 ne se traite pas directement : on fabrique une suite auxiliaire d'ordre 1. La partie A pose le gabarit ($v_n = u_{n+1} - u_n$ transforme la relation en géométrique), la partie B en donne la version savante, où les deux racines du trinôme $x^2 = x + 1$ jouent le rôle des deux raisons. La question 6 est le point délicat : deux suites qui vérifient la même récurrence et coïncident sur deux rangs consécutifs sont égales, et il en faut bien deux.

EXERCICE 20 · APR-A1-20



Une inégalité arithmétique par un détour analytique

1. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $n+1 \neq 0$ et $n+2 \neq 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{n+2} = \frac{1}{n+2} \times \frac{n+2}{2(n+1)} x_n = \frac{x_n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} a_n.$$

La suite (a_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $a_0 = \frac{x_0}{1} = \frac{1}{2}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n+1}}$, et comme $x_n = (n+1) a_n$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}}$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n+1 > 0$ et $2^{n+1} > 0$, donc $x_n > 0$ comme quotient de deux réels strictement positifs.

3. D'après la question 2, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > 0$: on peut former le quotient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{2(n+1)},$$

et $\frac{n+2}{2(n+1)} < 1 \iff n+2 < 2n+2 \iff n > 0$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} < x_n$: la suite est strictement décroissante à partir du rang 1. (Au rang 0 le quotient vaut 1 : $x_1 = x_0 = \frac{1}{2}$.)

4. D'après la question 3, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_0 = \frac{1}{2}$, soit $\frac{n+1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2}$. En multipliant par $2^{n+1} > 0$ puis en divisant par 2 > 0 :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad n+1 \leq 2^n}$$

COMMENTAIRES

La question 3 mérite d'être lue deux fois : le quotient $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ vaut exactement 1 au rang 0, ce qui explique le « à partir du rang 1 » de l'énoncé. Ce détail n'est pas cosmétique : c'est parce que $x_1 = x_0$ que la majoration de la question 4 est optimale au rang 1, où l'inégalité $n+1 \leq 2^n$ devient une égalité ($2 = 2$).

V. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 21 · SYN-A1-21



Le nombre e par une autre porte

1. $u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = \frac{5}{2}, \quad u_3 = \frac{8}{3}.$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

3. Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*, k! \geq 2^{k-1}$. **Initialisation** : $1! = 1 = 2^0$. **Hérédité** : supposons $k! \geq 2^{k-1}$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors $k+1 \geq 2$, donc $(k+1)! = (k+1) \times k! \geq 2 \times 2^{k-1} = 2^k$. **Conclusion** : par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*, k! \geq 2^{k-1}$.

4. D'après la question 3 et par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 3.$$

L'inégalité vaut aussi au rang 0 ($u_0 = 1 \leq 3$), d'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 3$.

5. La suite (u_n) est croissante et majorée par 3 : d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Nous avons démontré l'existence de la limite, non sa valeur : le raisonnement ne fournit aucun moyen de la calculer, seulement l'encadrement $2 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 3$.

6. $u_8 \approx 2,718\,278\,77$ et $e \approx 2,718\,281\,83$: les quatre premières décimales coïncident (2,7182), la cinquième diffère. L'écart vaut environ $3,06 \times 10^{-6}$.

COMMENTAIRES

Comparer les deux chemins vers e : la suite $((1 + \frac{1}{n})^n)$ du cours a besoin de n de l'ordre du million pour donner six décimales, alors qu'ici **huit termes** suffisent. Même limite, vitesses incomparables. L'exercice 27 exploitera précisément cette rapidité pour démontrer que e est irrationnel.

EXERCICE 22 · APR-A1-22



Le théorème de Nicomaque

1. $1 = 1^2$; $1 + 8 = 9 = 3^2$; $1 + 8 + 27 = 36 = 6^2$; $1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2$. Les carrés sont ceux de 1, 3, 6, 10, c'est-à-dire de $\frac{n(n+1)}{2}$.

2. En factorisant par $\frac{n^2}{4}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4} [(n+1)^2 - (n-1)^2] = \frac{n^2}{4} \times 4n = n^3.$$

3.

MÉTHODE Poser $T_k = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$: la question 2 dit exactement $\forall k \in \mathbb{N}^*, k^3 = T_k - T_{k-1}$, la somme télescope.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^n (T_k - T_{k-1}) = T_n - T_0.$$

Or $T_0 = 0$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

4.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2,$$

de limite $\left[\frac{1}{4} \right]$.

COMMENTAIRES

Le télescopage **construit** la formule, là où la récurrence se contente de la vérifier : c'est le sens du défi. Noter que la question 2 n'est pas tombée du ciel non plus. Elle dit que le cube n^3 est exactement l'écart entre deux carrés consécutifs de la famille $\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$, ce qui est déjà, sous forme algébrique, l'observation de Nicomaque.

EXERCICE 23 · APR-A1-23



Cassini, et le carré qui vaut 65

1. La suite de Fibonacci commence par 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 : les nombres 5, 8 et 13 en sont trois termes consécutifs, à savoir F_5 , F_6 et F_7 .

2. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n) : F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Initialisation : au rang 1, $F_0F_2 - F_1^2 = 0 \times 1 - 1 = -1 = (-1)^1$. ✓

Hérédité : supposons la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. En utilisant $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ puis $F_n - F_{n+1} = -F_{n-1}$:

$$\begin{aligned} F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 &= F_n(F_{n+1} + F_n) - F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n - F_{n+1}) + F_n^2 \\ &= -F_{n-1}F_{n+1} + F_n^2 = -(F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

3. Pour $n = 6$: $F_5F_7 - F_6^2 = 5 \times 13 - 8^2 = 65 - 64 = 1$, conformément à $(-1)^6 = 1$. C'est exactement le paradoxe : le rectangle 5×13 a une aire de 65, le carré 8×8 une aire de 64. L'unité manquante est la valeur de l'identité de Cassini au rang 6.

4. La ligne brisée joint $(0; 0)$ à $(5; 2)$, puis $(5; 2)$ à $(13; 5)$. Ses deux coefficients directeurs valent respectivement

$$\frac{2}{5} = 0,400 \quad \text{et} \quad \frac{5-2}{13-5} = \frac{3}{8} = 0,375,$$

tandis que la diagonale a pour coefficient directeur $\frac{5}{13} \approx 0,3846$. Les deux pentes de la ligne brisée **encadrent** celle de la diagonale : les trois points ne sont donc pas alignés, et la ligne brisée passe d'abord au-dessus de la diagonale, puis au-dessous. À l'abscisse 5, l'écart vertical vaut $2 - \frac{25}{13} = \frac{1}{13} \approx 0,077$: moins d'un dixième d'unité sur une figure haute de cinq.

Les quatre pièces ne recouvrent donc pas le rectangle. Elles laissent le parallélogramme de sommets $(0; 0)$, $(8; 3)$, $(13; 5)$ et $(5; 2)$, dont l'aire vaut

$$|8 \times 2 - 3 \times 5| = 1,$$

c'est-à-dire exactement l'unité manquante. Elle n'a pas disparu : elle est *étalée* sur toute la longueur du

rectangle, en un fuseau trop mince pour être vu.

5. Le tour marche **mieux** avec des termes plus grands. L'identité de Cassini donne $F_{10}F_{12} - F_{11}^2 = 55 \times 144 - 89^2 = 7\,920 - 7\,921 = -1$: l'écart d'aire reste de 1 en valeur absolue, mais il est désormais noyé dans une aire de 7 921 au lieu de 64. En outre $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$ (exercice 19) : les deux coefficients directeurs se rapprochent, donc le parallélogramme s'aplatit et devient d'autant plus indétectable.

COMMENTAIRES

L'aire manquante n'est jamais « perdue » : elle est **étalée**. C'est la leçon du découpage, et la raison pour laquelle un dessin ne démontre rien. Noter la mécanique de l'hérédité en question 2 : on n'y calcule pas, on **fait apparaître** l'expression du rang n pour lui appliquer l'hypothèse. Le signe alterné en sort tout seul.

EXERCICE 24 · APR-A1-24

★★★★ ♦ ✎

Viète, 1593 : le premier produit infini

1. $a_2 \approx 1,847\,759$, $a_3 \approx 1,961\,571$, $a_4 \approx 1,990\,369$.

2. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < a_n < 2$. **Initialisation** : $a_1 = \sqrt{2}$ et $0 < \sqrt{2} < 2$. **Hérédité** : supposons $0 < a_n < 2$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors $2 < 2 + a_n < 4$, et la fonction racine carrée étant croissante sur $[0; +\infty[$: $\sqrt{2} < a_{n+1} < 2$. Comme $\sqrt{2} > 0$, on a bien $0 < a_{n+1} < 2$. **Conclusion** : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < a_n < 2$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les deux termes étant positifs, comparons leurs carrés : $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2 + a_n - a_n^2 = -(a_n - 2)(a_n + 1)$. Or $0 < a_n < 2$, donc $a_n - 2 < 0$ et $a_n + 1 > 0$: le produit est négatif et son opposé positif. Ainsi $a_{n+1} > a_n$: la suite est croissante. Croissante et majorée par 2, elle **converge** d'après le théorème de la limite monotone.

4. Par définition, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (2 - a_{n+1})(2 + a_{n+1}) = 4 - a_{n+1}^2 = 4 - (2 + a_n) = 2 - a_n.$$

D'après la question 2, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} > 0$, donc $2 + a_{n+1} \neq 0$ et l'on peut diviser :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2 - a_{n+1} = \frac{2 - a_n}{2 + a_{n+1}}.$$

De plus $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{2} > 1$, donc $2 + a_{n+1} > 3$. Comme $2 - a_n > 0$ d'après la question 2, diviser par une quantité plus grande diminue le quotient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2 - a_{n+1} \leq \frac{2 - a_n}{3}.$$

5. Une récurrence immédiate donne $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < 2 - a_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2 - a_1)$. Comme $0 < \frac{1}{3} < 1$, le majorant tend vers 0 ; par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - a_n) = 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2}$$

COMMENTAIRES

Deux façons de conclure, et elles ne disent pas la même chose. La question 3 démontre que la limite **existe** sans la nommer ; la question 4 fournit une contraction, qui donne la valeur et la vitesse. Retenir le geste de la question 4 : pour majorer $2 - a_{n+1}$, faire apparaître $4 - a_{n+1}^2$, seule quantité que la relation de récurrence sait

exprimer.

EXERCICE 25 · APR-A1-25



Sylvester, 1880 : une somme d'inverses qui vaut 1

$$1. u_2 = 4 - 2 + 1 = 3, \quad u_3 = 9 - 3 + 1 = 7, \quad u_4 = 49 - 7 + 1 = 43, \quad u_5 = 43^2 - 43 + 1 = 1807.$$

$$2. \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - 1 = u_n^2 - u_n + 1 - 1 = u_n(u_n - 1).$$

RÉDACTION MODÈLE – LE TÉLESCOPAGE

3. Une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 2$ (c'est vrai au rang 1, et si $u_n \geq 2$ alors $u_{n+1} - 1 = u_n(u_n - 1) \geq 2$ donc $u_{n+1} \geq 3 \geq 2$). En particulier $u_n \neq 0$ et $u_n - 1 \neq 0$: tous les quotients écrits ci-dessous ont un sens.

En réduisant au même dénominateur et en utilisant la question 2 sous la forme $u_{n+1} - 1 = u_n(u_n - 1)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n(u_n - 1)} = \frac{u_n - 1}{u_n(u_n - 1)} = \frac{1}{u_n}.$$

D'où le résultat annoncé : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$.

4. Sommons cette égalité pour k allant de 1 à n . Chaque terme $\frac{1}{u_{k+1} - 1}$ retranché est celui-là même qui est ajouté au rang suivant : la somme télescope et il ne reste que les deux extrémités.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_{k+1} - 1} \right) = \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}.$$

Comme $u_1 = 2$, le premier terme vaut 1 :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = 1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1}}$$

Vérifications. $n = 1 : 1 - \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$. ✓ $n = 2 : 1 - \frac{1}{7-1} = \frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. ✓ $n = 3 : 1 - \frac{1}{43-1} = \frac{41}{42} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}$. ✓

5. La minoration $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 2$ a déjà été établie en tête de la question 3 : $u_1 = 2$, et si $u_n \geq 2$ alors $u_{n+1} - 1 = u_n(u_n - 1) \geq 2$, donc $u_{n+1} \geq 3$.

D'après la question 2, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - 1 = u_n(u_n - 1) \geq u_n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \geq u_n + 1$. Une récurrence immédiate donne alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq n + 1$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ par comparaison.

Par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - 1) = +\infty$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 0$, et enfin :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = 1}$$

c'est-à-dire $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1807} + \dots = 1$.

COMMENTAIRES

Le télescopage est le seul outil du chapitre qui calcule une somme de n termes *sans* formule de somme géométrique : il suffit d'écrire chaque terme comme une différence de deux valeurs consécutives d'une même quantité. Toute la difficulté est de **trouver** cette quantité, et c'est le rôle de la question 3. Noter enfin la vitesse : u_n croît en gros comme un carré à chaque étape, si bien que $u_6 - 1 = 3\,263\,442$ et que la cinquième somme partielle est déjà à moins de 3×10^{-7} de 1.

EXERCICE 26 · APR-A1-26



Montmort, 1708 : le problème des chapeaux

$$1. p_1 = 1 - 1 = 0; \quad p_2 = \frac{1}{2}; \quad p_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}; \quad p_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{3}{8}.$$

2. $p_6 \approx 0,368\,055\,56$ et $p_{10} \approx 0,367\,879\,46$. Les valeurs se stabilisent très vite : elles diffèrent déjà de moins de 2×10^{-4} .

3. En isolant les deux termes ajoutés :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_{n+1} - q_n = p_{2n+2} - p_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} = -\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{1}{(2n+2)!}.$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, (2n+2)! > (2n+1)!$, donc $\frac{1}{(2n+2)!} < \frac{1}{(2n+1)!}$ et cette différence est strictement négative : (q_n) est décroissante.

De même $\forall n \in \mathbb{N}^*, r_{n+1} - r_n = \frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+3)!} > 0$: (r_n) est croissante.

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n - r_n = p_{2n} - p_{2n+1} = -\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n+1)!}$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, (2n+1)! \geq 2^{2n}$ (exercice 21, question 3), on a $0 < q_n - r_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q_n - r_n) = 0$ par encadrement.

5. Les suites (q_n) et (r_n) sont adjacentes : elles convergent donc vers une même limite ℓ . Comme (q_n) et (r_n) recouvrent respectivement les termes de rang pair et de rang impair de (p_n) , la suite (p_n) converge elle aussi vers ℓ , et $\ell = \frac{1}{e}$.

6. Chaque terme supplémentaire de la somme est en $\frac{1}{k!}$: il décroît *factoriellement*. Au-delà de la dizaine d'invités, les termes ajoutés sont inférieurs à 10^{-8} et ne modifient plus la valeur affichée. La probabilité a donc pratiquement atteint sa limite dès $n = 10$, et dix mille convives ne changent plus rien.

COMMENTAIRES

La configuration « l'une croît, l'autre décroît, la différence tend vers 0 » est celle des **suites adjacentes**, déjà rencontrée en activité avec les deux moyennes de Gauss. Elle est particulièrement utile ici : (p_n) n'est ni croissante ni décroissante, mais ses deux sous-suites le sont, et elles se referment l'une sur l'autre. Retenir le contre-intuitif de la question 6 : dans une somme alternée à décroissance factorielle, l'erreur commise en s'arrêtant au rang n est majorée par le premier terme négligé.

Fourier, 1815 : le nombre e est irrationnel

1. Par définition de la factorielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad (n+j)! = n! \times (n+1)(n+2) \cdots (n+j),$$

produit de $n!$ par j facteurs tous supérieurs ou égaux à $n+1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \mathbb{N}^*, (n+j)! \geq n! \times (n+1)^j$.

2. En posant $j = k - n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m > n, \quad u_m - u_n = \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k!} = \sum_{j=1}^{m-n} \frac{1}{(n+j)!} \leq \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{m-n} \left(\frac{1}{n+1} \right)^j \leq \frac{1}{n!} \times \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n! \times n},$$

la dernière majoration utilisant que la somme géométrique de raison $\frac{1}{n+1} \in]0; 1[$ est majorée par $\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}$.

Faisons tendre m vers $+\infty$ à n fixé : par passage à la limite dans l'inégalité, $e - u_n \leq \frac{1}{n! \times n}$. Enfin (u_n) est strictement croissante de limite e , donc $e - u_n > 0$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < e - u_n \leq \frac{1}{n! \times n}}$$

3. Pourquoi $q \geq 2$. Si q valait 1, alors $e = p$ serait un entier. Or $u_1 = 2 < e$ d'après la croissance stricte établie à l'exercice 21, et la question 2 écrite au rang 4 donne

$$e \leq u_4 + \frac{1}{4! \times 4} = \frac{65}{24} + \frac{1}{96} = \frac{261}{96} < 3.$$

Ainsi $2 < e < 3$: le réel e n'est pas un entier, donc $q \neq 1$ et l'on peut bien supposer $q \geq 2$.

Ensuite, $q! u_q = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}$. Pour chaque $k \in \llbracket 0; q \rrbracket$, on a $k \leq q$, donc $\frac{q!}{k!} = (k+1)(k+2) \cdots q$ est un produit d'entiers, donc un entier. Somme d'entiers, $q! u_q$ est un entier.

4. Si $e = \frac{p}{q}$, alors $q! e = q! \times \frac{p}{q} = (q-1)! p$, produit de deux entiers : c'est un entier. En multipliant l'encadrement de la question 2, écrit au rang 4, par $q! > 0$:

$$0 < q! e - q! u_q \leq \frac{q!}{q! \times q} = \frac{1}{q}.$$

5. La quantité $q! e - q! u_q$ est une différence de deux entiers (questions 3 et 4), donc un entier. Or elle est strictement comprise entre 0 et $\frac{1}{q}$, et $q \geq 2$ entraîne $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{2} < 1$. Il n'existe aucun entier strictement compris entre 0 et 1 : contradiction. L'hypothèse de départ est donc fausse, et e est **irrationnel**.

COMMENTAIRES

La stratégie est celle de A0 pour $\sqrt{2}$, à un détail près, décisif : là on jouait sur la parité, ici on fabrique un entier coincé entre 0 et 1. Ce qui rend le tour possible, c'est la **vitesse** de convergence établie à la question 2, $\frac{1}{n! \times n}$: elle écrase le $q!$ par lequel on multiplie. La même stratégie appliquée à $((1 + \frac{1}{n})^n)$ ne donnerait rien, cette suite convergeant beaucoup trop lentement.

Ramanujan, 1911 : six mois sans réponse

1. $R_2 = \sqrt{3} \approx 1,732\,051$; $R_3 = \sqrt{5} \approx 2,236\,068$; $R_4 \approx 2,559\,830$; $R_5 \approx 2,755\,053$. La suite semble croissante et converger vers 3.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x(x+2) = 1 + x^2 + 2x = (x+1)^2$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la question 2 à $x = n+1$: $(n+2)^2 = 1 + (n+1)(n+3)$. Les deux membres sont positifs et $n+2 > 0$, donc en prenant la racine carrée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n+2 = \sqrt{1 + (n+1)(n+3)}.$$

4.

MÉTHODE L'identité de la question 2 majore chaque bloc par un entier ; on remonte de l'intérieur vers l'extérieur.

On reprend les notations de l'énoncé : $E_N = \sqrt{1+N}$, puis $\forall k \in \llbracket 2; N-1 \rrbracket$, $E_k = \sqrt{1+k E_{k+1}}$, et $R_N = E_2$.

Soit $N \geq 2$. Montrons par récurrence descendante que $\forall k \in \llbracket 2; N \rrbracket$, $E_k \leq k+1$.

Rang initial $k = N$: $E_N = \sqrt{1+N} \leq N+1$, car $(N+1)^2 - (1+N) = (N+1)N \geq 0$, et la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$.

Hérédité descendante : soit $k \in \llbracket 2; N-1 \rrbracket$; supposons $E_{k+1} \leq k+2$. Comme $k > 0$ et que la fonction racine carrée est croissante :

$$E_k = \sqrt{1+k E_{k+1}} \leq \sqrt{1+k(k+2)} = \sqrt{(k+1)^2} = k+1,$$

l'avant-dernière égalité étant la question 3 écrite au rang $n = k-1$ (licite car $k \geq 2$), et la dernière valant car $k+1 > 0$.

Conclusion : $\forall k \in \llbracket 2; N \rrbracket$, $E_k \leq k+1$. En particulier $R_N = E_2 \leq 3$:

$$\boxed{\forall N \geq 2, \quad R_N \leq 3}$$

5. Passer du rang N au rang $N+1$ revient à remplacer, tout au fond de l'emboîtement, le nombre $E_N = \sqrt{1+N}$ par $\sqrt{1+N\sqrt{2+N}}$, qui lui est supérieur puisque $\sqrt{2+N} > 1$. Toutes les opérations qui l'entourent (multiplication par un entier strictement positif, addition de 1, racine carrée) sont croissantes : l'inégalité se propage de proche en proche jusqu'à l'extérieur, donc $\forall N \geq 2$, $R_{N+1} \geq R_N$.

La suite $(R_N)_{N \geq 2}$ est croissante et majorée par 3 : d'après le théorème de la limite monotone, elle **converge**. Nous avons donc démontré l'existence de la limite, et l'encadrement $\sqrt{3} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} R_N \leq 3$. Que cette limite vaille *exactement* 3 est admis ici : c'est la réponse que Ramanujan donnera au bout de six mois, et elle demande d'autres outils.

COMMENTAIRES

L'exercice illustre le geste fondateur du chapitre : une écriture infinie n'a de sens que si l'on exhibe une **suite** dont elle est la limite, et que l'on démontre que cette suite converge. Tant que ce travail n'est pas fait, l'empilement de radicaux n'est qu'un dessin. C'est aussi la raison pour laquelle six mois se sont écoulés sans réponse : la valeur 3 se devine en trois calculs, mais la justifier demande la majoration de la question 4.

VI. PYTHON, LE LABORATOIRE

EXERCICE 29 · APL-A1-29



Trois seuils

1. et 3.

```

1 def seuil_geo(q, cible):
2     n = 0
3     while q**n <= cible:
4         n = n + 1
5     return n
6
7 def seuil_harmonique(cible):
8     n = 0
9     s = 0
10    while s <= cible:
11        n = n + 1
12        s = s + 1/n
13    return n

```

La première fonction incrémente n tant que q^n n'a pas dépassé la cible ; la seconde cumule les inverses jusqu'à franchir le seuil.

2. `seuil_geo(1.03, 2)` renvoie 24 : le capital a doublé au bout de 24 ans.

3. `seuil_harmonique(10)` renvoie 12 367 termes.

4. La somme des inverses croît, mais de plus en plus lentement : il faut environ 12 000 termes pour atteindre 10, et chaque unité supplémentaire coûte à peu près $e^3 \approx 20$ fois plus de termes que la précédente. Atteindre 100 demanderait de l'ordre de 10^{43} itérations, ce qu'aucune machine ne fera jamais. Le programme est correct ; c'est le temps de calcul qui est hors d'atteinte.

COMMENTAIRES

Distinguer trois statuts, que la question 4 met en regard. Un programme qui **ne termine pas** (la boucle tourne indéfiniment, cas de l'exercice 30) ; un programme qui **termine en théorie** mais pas dans un temps accessible (le cas présent) ; un programme qui **termine** et répond. Seul le premier est un défaut de raisonnement.

EXERCICE 30 · APL-A1-30



Un algorithme de seuil à compléter

1.

```

1 def seuil():
2     u = 5000
3     n = 0
4     while u >= 3000:
5         u = 0.8*u + 500

```

```

6         n = n + 1
7     return n

```

2. On part de $u = 5\,000$ et $n = 0$, puis :

tour	départ	1 ^{er}	2 ^e	3 ^e
u	5 000	4 500	4 100	3 780
n	0	1	2	3

La condition $u \geq 3\,000$ reste vraie jusqu'au huitième tour, où $u \approx 2\,919,4 < 3\,000$. La fonction `seuil()` renvoie donc 8.

3. Une boucle `for` exige de connaître à l'avance le nombre de tours. Or c'est précisément ce nombre que l'on cherche : il est inconnu au moment d'écrire la boucle. Seule une boucle `while`, pilotée par une condition et non par un compteur, convient.

4.

```

1 def seuil(s):
2     u = 5000
3     n = 0
4     while u >= s:
5         u = 0.8*u + 500
6         n = n + 1
7     return n

```

`seuil(2600)` renvoie 15.

5. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, d_n = u_n - 2\,500$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0,8 u_n + 500 - 2\,500 = 0,8 (d_n + 2\,500) - 2\,000 = 0,8 d_n.$$

La suite (d_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $d_0 = 2\,500$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2\,500 + 2\,500 \times 0,8^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\,500$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, 0,8^n > 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2\,500 > 2\,400$: la condition $u \geq 2\,400$ n'est *jamais* fausse. La boucle ne s'arrête pas.

6. C'est la limite qui décide, et elle seule. La suite (u_n) est strictement décroissante de limite 2 500, et $2\,500 < 3\,000$: par définition de la limite, il existe un rang à partir duquel $u_n < 3\,000$. La boucle s'arrête donc, et ce fait est un **théorème**, établi avant toute exécution. Le programme, lui, ne peut qu'attester d'un arrêt déjà survenu : il ne prouvera jamais qu'un arrêt va survenir.

COMMENTAIRES

Le contraste entre les questions 5 et 6 est le cœur de l'exercice, et l'écho direct du cours : **c'est la démonstration qui autorise l'algorithme**. Les deux appels `seuil(2400)` et `seuil(3000)` sont écrits dans le même programme, avec la même boucle ; seule la position du seuil par rapport à la **limite** 2 500 décide si l'un tourne indéfiniment et l'autre pas. Aucune lecture du code ne le dit.

La machine à contre-exemples

1. et 2.

```

1 def test(borne):
2     for n in range(2, borne+1):
3         if n**10 / 1.5**n < 1:
4             return n
5     return None
6
7 def cherche():
8     n = 2
9     while n**10 / 1.5**n >= 1:
10        n = n + 1
11    return n

```

`test(100)` renvoie `None` : aucun contre-exemple n'apparaît jusqu'à $n = 100$. En revanche `cherche()` renvoie `118`. On vérifie de part et d'autre du basculement : $\frac{117^{10}}{1,5^{117}} \approx 1,20 \geq 1$, alors que $\frac{118^{10}}{1,5^{118}} \approx 0,871 < 1$.

3. Il n'a pas eu tort de **conjecturer** : cent vérifications concordantes sont une raison légitime de formuler une hypothèse, et c'est ainsi que naissent la plupart des énoncés. Il a eu tort d'**affirmer** : son énoncé porte un quantificateur universel sur une infinité d'entiers, et cent cas, ou cent millions, n'en couvrent qu'une partie finie.

4. L'ordinateur est un instrument d'observation : il produit des conjectures et il réfute (un seul contre-exemple suffit), mais il ne démontre pas un énoncé universel, faute de pouvoir épuiser l'infini.

COMMENTAIRES

Le basculement à $n = 118$ n'est pas un accident : l'exponentielle finit toujours par écraser la puissance, quelle que soit celle-ci, et le rang où cela se produit peut être arbitrairement grand. C'est le théorème des croissances comparées, démontré au chapitre F1. La leçon d'A0 reste intacte : réfuter demande un témoin, démontrer demande une preuve.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les réponses aux défis étoilés, les scripts exécutables, le récit détaillé des huit histoires de la partie V et les fiches du cahier de calcul vous attendent sur le compagnon numérique.