



CORRIGÉ · A2. COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

Corrigé des trente exercices, feuille en main

RÉDACTION MODÈLE : la copie idéale, à imiter · MÉTHODE : la stratégie en une ligne, puis le calcul · COMMENTAIRES :
ce que la solution enseigne

I. LES DEUX PRINCIPES

EXERCICE 1 · APL-A2-01



Combien de possibilités ?

MÉTHODE À chaque position, un choix indépendant des autres : on multiplie.

1. $10^4 = \boxed{10\,000}$. 2. $26^3 \times 10^2 = \boxed{1\,757\,600}$.
3. $10^6 = \boxed{1\,000\,000}$. 4. $5^4 = \boxed{625}$.

EXERCICE 2 · APL-A2-02



Au restaurant

MÉTHODE Les plats se comptent par un « ou » (viande ou poisson), donc s'additionnent ; les trois services par un « puis », donc se multiplient.

1. 6 plats en tout ($4 + 2$), d'où $3 \times 6 \times 5 = \boxed{90}$ menus.
2. Le dessert a désormais 6 issues (5 desserts, ou aucun) : $3 \times 6 \times 6 = \boxed{108}$.

Au moins un

RÉDACTION MODÈLE

1. Les entiers de 100 à 999 sont au nombre de $999 - 100 + 1 = 900$.

2. Un tel entier sans aucun 5 a son chiffre des centaines dans $\{1, \dots, 9\} \setminus \{5\}$ (8 choix) et ses deux autres chiffres dans $\{0, \dots, 9\} \setminus \{5\}$ (9 choix chacun). Par le principe multiplicatif :

$$8 \times 9 \times 9 = 648.$$

3. L'événement « contenir au moins un 5 » est le **contraire** de « ne contenir aucun 5 ». Ces deux familles sont disjointes et de réunion l'ensemble des 900 entiers, donc

$$900 - 648 = \boxed{252}.$$

COMMENTAIRES

Le **passage au complémentaire** est le premier réflexe devant un « au moins un » : compter directement obligerait à distinguer un, deux ou trois 5, alors que le contraire se compte d'un trait.

Sans bégayer

MÉTHODE La première lettre est libre, chacune des suivantes doit seulement différer de celle qui la précède.

$$5 \times 4 \times 4 \times 4 = 5 \times 4^3 = \boxed{320}.$$

Deux clubs

MÉTHODE Crible à deux ensembles pour la réunion, complément pour « aucun ».

$$1. \text{Card}(M \cup E) = 18 + 12 - 7 = \boxed{23}. \quad 2. 30 - 23 = \boxed{7}.$$

II. LISTES ET PARTIES

EXERCICE 6 · APL-A2-06



Trois écritures d'une puissance

MÉTHODE Une liste ordonnée de k choix indépendants parmi n : n^k .

1. $3^4 = \boxed{81}$. 2. $2^5 = \boxed{32}$. 3. $4^6 = \boxed{4096}$.

EXERCICE 7 · THE-A2-07



Toutes les parties

1. $2^8 = \boxed{256}$.

2. Une partie contenant a est déterminée par le choix libre des sept autres éléments (dedans ou dehors) : $2^7 = \boxed{128}$.

RÉDACTION MODÈLE

3. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties de E , et considérons l'application $\varphi : A \mapsto A \triangle \{a\}$ qui *bascule* l'appartenance du seul élément a (elle l'ajoute s'il est absent, le retire s'il est présent). Alors φ est une bijection de $\mathcal{P}$ sur lui-même (elle est sa propre réciproque), et elle change $\text{Card}(A)$ de exactement ± 1 : elle échange donc les parties de cardinal pair et celles de cardinal impair. Ces deux familles sont ainsi **en même nombre**, et leur réunion est $\mathcal{P}$ tout entier. Chacune compte donc

$$\frac{2^8}{2} = \boxed{2^7 = 128} \text{ parties.}$$

COMMENTAIRES

La **bijection qui bascule un élément** est l'outil standard pour comparer parités : elle prouve, sans calcul, que

$$\forall n \geq 1, \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}.$$

EXERCICE 8 · THE-A2-08



Le bon modèle

MÉTHODE Deux questions : l'ordre compte-t-il ? la répétition est-elle permise ?

1. ordonné, avec remise : $6^3 = 216$. 2. ordonné, sans remise : $6 \times 5 \times 4 = 120$. 3. simultané : $\binom{6}{3} = 20$.

Rangés : $\boxed{20 < 120 < 216}$. On passe de 216 à 120 en interdisant la répétition, puis de 120 à 20 en divisant par $3! = 6$, le nombre de façons d'ordonner les trois jetons choisis.

Mots binaires sous contrainte

MÉTHODE Choisir les positions des 1 dans un mot de longueur 8, c'est choisir une partie de l'ensemble des 8 positions.

1. $2^8 = \boxed{256}$. 2. $\binom{8}{3} = \boxed{56}$.

3. Au plus deux 1 : $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} = 1 + 8 + 28 = \boxed{37}$.

Avec ou sans

1. $\binom{10}{4} = 210$.

2. Contenant a : on choisit 3 éléments parmi les 9 autres, soit $\binom{9}{3} = 84$. Ne contenant pas a : on choisit 4 éléments parmi les 9 autres, soit $\binom{9}{4} = 126$.

RÉDACTION MODÈLE

3. Les parties à 4 éléments de E se répartissent en deux familles disjointes selon qu'elles contiennent a ou non, dont la réunion est toute la collection. Le principe additif donne donc

$$\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = 84 + 126 = 210 = \binom{10}{4},$$

et l'on reconnaît la **relation de Pascal** $\boxed{\binom{10}{4} = \binom{9}{3} + \binom{9}{4}}$.

COMMENTAIRES

Cet exercice est la démonstration combinatoire de la relation de Pascal, jouée sur un cas concret : fixer un élément, puis séparer selon qu'on le prend ou non.

III. RANGER, ORDONNER

Mises en ordre

MÉTHODE Ranger n objets distincts en ligne : $n!$.

1. $7! = \boxed{5040}$. 2. $5! = \boxed{120}$.

EXERCICE 12 · APL-A2-12



Un bureau

MÉTHODE *L'ordre des rôles compte, sans répétition : 3-uplet d'éléments distincts.*

$$10 \times 9 \times 8 = \boxed{720}.$$

EXERCICE 13 · THE-A2-13



Anagrammes

1. MATHS, cinq lettres distinctes : $5! = \boxed{120}$.

RÉDACTION MODÈLE

2. Le mot ANAGRAMME a 9 lettres, dont trois A et deux M. Si les neuf lettres étaient distinctes, il y aurait $9!$ arrangements. Mais permuter entre eux les trois A ($3!$ façons) ne change pas le mot, ni permuter les deux M ($2!$ façons) : chaque anagramme a donc été compté $3! \times 2! = 12$ fois. D'où

$$\frac{9!}{3! 2!} = \frac{362\,880}{12} = \boxed{30\,240}.$$

3. ♦ ★ MISSISSIPPI (11 lettres : un M, quatre I, quatre S, deux P) :

$$\frac{11!}{1! 4! 4! 2!} = \boxed{34\,650}.$$

COMMENTAIRES

On **divise par les répétitions** : c'est la formule des permutations avec répétition (coefficient multinomial). Le facteur $k!$ qui distinguait combinaisons et arrangements réapparaît ici, une fois par lettre répétée.

EXERCICE 14 · SYN-A2-14



Autour d'une table ronde

MÉTHODE *Fixer une personne comme repère élimine les rotations ; un retournement supplémentaire élimine les symétries miroir.*

- On fixe un convive ; les 5 autres se répartissent sur les places restantes : $(6 - 1)! = 5! = \boxed{120}$.
- ★ Aucune disposition de six perles *distinctes* n'est identique à son image miroir (un tel appariement forcerait deux perles à être égales) : chaque collier est donc compté exactement deux fois, d'où $\frac{5!}{2} = \boxed{60}$.

Ensemble ou séparés

RÉDACTION MODÈLE

1. $7! = 5040$ alignements.

2. Pour compter ceux où Alice et Bob sont côte à côte, traitons le couple comme un seul **bloc**. On aligne alors 6 objets (le bloc et les cinq autres personnes) : $6!$ façons. Mais à l'intérieur du bloc, Alice et Bob peuvent être dans deux ordres : on multiplie par $2!$. D'où

$$6! \times 2! = 720 \times 2 = 1440.$$

3. « Pas côte à côte » est le complément de « côte à côte » :

$$7! - 1440 = 5040 - 1440 = \boxed{3600}.$$

COMMENTAIRES

La **méthode du bloc** (agréger ce qui doit rester ensemble, sans oublier l'ordre interne du bloc), puis le **complément** pour la condition contraire : deux gestes qui reviennent sans cesse.

IV. CHOISIR SANS ORDONNER

Premiers choix

MÉTHODE *Un ensemble, l'ordre ne compte pas : une combinaison.*

$$1. \binom{12}{4} = \boxed{495}. \quad 2. \binom{32}{5} = \boxed{201\,376}.$$

Comités sous contrainte

MÉTHODE *Répartir par catégorie et multiplier ; pour « au moins », passer au complément.*

$$1. \text{Exactement deux femmes (donc deux hommes)} : \binom{7}{2} \binom{5}{2} = 21 \times 10 = \boxed{210}.$$

2. Au moins un homme = tous les comités, moins ceux formés uniquement de femmes :

$$\binom{12}{4} - \binom{7}{4} = 495 - 35 = \boxed{460}.$$

EXERCICE 18 · THE-A2-18



Deux lectures du triangle

1. $\binom{10}{3} = \binom{9}{2} + \binom{9}{3} = 36 + 84 = \boxed{120}$.

2. Par symétrie $\binom{20}{18} = \binom{20}{20-18} = \binom{20}{2} = \boxed{190}$: choisir les 18 éléments retenus, c'est désigner les 2 laissés de côté.

EXERCICE 19 · SYN-A2-19



Exactement deux as

MÉTHODE Deux décisions indépendantes : choisir les deux as, puis compléter avec des cartes qui n'en sont pas.

Le jeu compte 4 as et 28 autres cartes. On choisit 2 as parmi 4, puis 3 cartes parmi les 28 non-as :

$$\binom{4}{2} \binom{28}{3} = 6 \times 3276 = \boxed{19\,656}.$$

EXERCICE 20 · SYN-A2-20



Le compte des rectangles

MÉTHODE Un rectangle est déterminé par ses deux droites horizontales et ses deux droites verticales.

On choisit 2 des 9 droites horizontales et 2 des 9 verticales, indépendamment :

$$\binom{9}{2} \times \binom{9}{2} = 36 \times 36 = \boxed{1296}.$$

EXERCICE 21 · APR-A2-21



Partager sans ordonner

RÉDACTION MODÈLE

1. Une distribution est la donnée du nombre de bonbons de chaque enfant, soit un quadruplet (a, b, c, d) d'entiers positifs avec $a + b + c + d = 10$. On lui associe la file de 10 jetons • et 3 séparateurs | où a jetons précèdent le premier séparateur, b jetons entre le premier et le deuxième, etc. Réciproquement, toute file de 10 jetons et 3 séparateurs se lit comme une unique distribution. La correspondance est donc une **bijection**.

2. Une telle file est un mot de 13 symboles (10 jetons et 3 séparateurs) : elle est entièrement déterminée par le choix des 3 positions des séparateurs parmi 13. D'où

$$\binom{13}{3} = \boxed{286} \text{ distributions.}$$

COMMENTAIRES

La **bijection** « **jurons et sépareurs** » (*stars and bars*) ramène un problème de répartition à un simple choix de positions. Elle est hors programme, mais c'est un modèle de raisonnement bijectif.

V. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 22 · SYN-A2-22

★★★★ ♦ ☆ ⌚

Dirichlet, 1834 : le principe des tiroirs

MÉTHODE *Fabriquer des tiroirs (les parties impaires) et compter.*

1. Tout entier s'écrit de façon unique $2^a \times m$ avec m impair. Dans $\{1, \dots, 10\}$, les valeurs impaires possibles de m sont 1, 3, 5, 7, 9 : **cinq tiroirs**. En choisissant 6 entiers, deux au moins partagent la même partie impaire m , disons $2^a m$ et $2^b m$ avec $a < b$: alors $2^a m \mid 2^b m$.
2. ★ *Défi*. Dans $\{1, \dots, 2n\}$, les parties impaires possibles sont 1, 3, $\dots$, $2n - 1$, soit exactement n tiroirs. Parmi $n + 1$ entiers, deux partagent la même partie impaire, donc l'un divise l'autre.

COMMENTAIRES

La borne est **optimale** : les n entiers $\{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$ (par exemple $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ pour $n = 5$) ne contiennent aucune paire divisible. Cinq entiers peuvent donc échapper à la conclusion, six ne le peuvent plus.

EXERCICE 23 · APR-A2-23

★★★★ ♦ ☆ ⌚

Fermat, vers 1636 : les nombres figurés s'empilent

1. $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35 = \binom{7}{3}$.
2. ★ *Défi*. Comptons les parties à $r + 1$ éléments de $\{1, \dots, n + 1\}$ selon leur **plus grand** élément m (avec $r + 1 \leq m \leq n + 1$). Le maximum étant m , on choisit les r autres éléments parmi $\{1, \dots, m - 1\}$, soit $\binom{m-1}{r}$. En sommant (poser $i = m - 1$) :

$$\forall (n, r) \in \mathbb{N}^2, r \leq n, \quad \sum_{i=r}^n \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Zhu Shijie, 1303 : la convolution avant Vandermonde

RÉDACTION MODÈLE

On dénombre de deux façons les délégations de 2 personnes dans un groupe de 3 filles et 4 garçons.

1. Globalement : $\binom{7}{2} = 21$. En classant selon le nombre de filles retenues (0, 1 ou 2) :

$$\binom{3}{0}\binom{4}{2} + \binom{3}{1}\binom{4}{1} + \binom{3}{2}\binom{4}{0} = 6 + 12 + 3 = 21.$$

Les deux comptages portent sur le même ensemble, d'où l'égalité.

2. En général, choisir r personnes dans un groupe de m premières et n secondes, classées selon combien viennent des premières :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \forall r \in \llbracket 0; m+n \rrbracket, \quad \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i} = \binom{m+n}{r}.$$

3. ★ Défi. Avec $m = n$ et $r = n$, puis la symétrie $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2.$$

Pour $n = 4$: $1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70 = \binom{8}{4}$.

COMMENTAIRES

Le **double comptage par classement** donne une identité sans calcul algébrique ; la somme des carrés en est le cas diagonal, via la symétrie. Zhu Shijie l'a en 1303, Vandermonde en 1772 : la loi de Stigler à l'œuvre.

Kaplansky, 1943 : choisir sans voisins

RÉDACTION MODÈLE

1. On établit qu'il y en a $\binom{6}{3} = 20$, par la bijection ci-dessous.

2. Rangeons les k nombres choisis $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ et posons $b_i = a_i - (i-1)$. Comme les a_i sont deux à deux non consécutifs, $a_{i+1} \geq a_i + 2$, donc $b_{i+1} = a_{i+1} - i \geq a_i + 2 - i = b_i + 1$: les b_i sont **strictement croissants**. De plus $b_1 = a_1 \geq 1$ et $b_k = a_k - (k-1) \leq n - (k-1) = n - k + 1$. Ainsi $\{b_1, \dots, b_k\}$ est une partie à k éléments de $\{1, \dots, n - k + 1\}$. Réciproquement, en partant de $b_1 < \dots < b_k$ dans $\{1, \dots, n - k + 1\}$, la transformation $a_i = b_i + (i-1)$ redonne des éléments de $\{1, \dots, n\}$ deux à deux non consécutifs (car $a_{i+1} - a_i = (b_{i+1} - b_i) + 1 \geq 2$, et $a_k = b_k + (k-1) \leq n$) :

la correspondance est donc une **bijection**, d'où

$$\boxed{\binom{n-k+1}{k}} \text{ choix.}$$

Pour $n = 8, k = 3 : \binom{6}{3} = 20$.

COMMENTAIRES

La **bijection par décalage** transforme une contrainte d'espacement en un choix libre. Le lemme de Kaplansky (1943), né du problème des ménages de Lucas, est l'outil des placements « sans voisins ».

EXERCICE 26 · APR-A2-26

★★★★★ ★ ⌚

Delannoy, 1895 : les chemins du roi

MÉTHODE Un trajet se termine par un pas E, N ou NE : trois provenances disjointes, on additionne.

1. Vers $(1, 1)$: les trajets $\rightarrow\uparrow, \uparrow\rightarrow$ et $\nearrow$, soit $\boxed{3}$. Vers $(2, 2)$: on dénombre $\boxed{13}$ trajets.
2. Le dernier pas amène de $(i-1, j)$, de $(i, j-1)$ ou de $(i-1, j-1)$; ces trois cas sont disjoints et couvrent toutes les possibilités, d'où $D(i, j) = D(i-1, j) + D(i, j-1) + D(i-1, j-1)$, avec $D(i, 0) = D(0, j) = 1$.
3. ★ Défi. Le tableau des $D(i, j)$:

$i \setminus j$	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	1	3	5	7
2	1	5	13	25
3	1	7	25	63

d'où $D(3, 3) = \boxed{63}$.

EXERCICE 27 · APR-A2-27

★★★★★ ★ ⌚

Leo Moser, 1949 : le cercle qui piège l'induction

1. À la main, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ donnent 1, 2, 4, 8, 16 régions. On croit reconnaître 2^{n-1} , et l'on devine 32 pour $n = 6$.
2. En position générale, $n = 6$ donne $\boxed{31}$ régions, et non 32 : la régularité se brise. *Attention* : sur un hexagone **régulier**, les trois grandes diagonales concourent au centre ; deux régions y fusionnent et l'on n'en compte que 30. C'est tout le sens de « en position générale ».
3. ★ Défi. La formule $\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$ redonne les valeurs : $n = 4 \rightarrow 1 + 6 + 1 = 8$; $n = 5 \rightarrow 5 + 10 + 1 = 16$; $n = 6 \rightarrow 15 + 15 + 1 = 31$. Les cinq premiers termes coïncident par accident avec 2^{n-1} ; à $n = 6$, le terme $\binom{n}{4}$ (le nombre de points d'intersection intérieurs, un par quadruplet de points), jusque-là négligeable, prend le dessus et casse le doublement.

COMMENTAIRES

La morale de Moser (1949) : **cinq termes ne prouvent rien**. Deviner sur les premiers cas est une conjecture, jamais une preuve.

EXERCICE 28 · APR-A2-28

★★★★★ ★ ⌚

Euler, 1751 : découper le polygone

MÉTHODE Fixer un côté ; le triangle qui s'y appuie coupe le polygone en deux plus petits.

1. Carré : $\boxed{2}$ triangulations ; pentagone : $\boxed{5}$; hexagone : $\boxed{14}$.

2. ★ *Défi*. Dans le polygone à $n + 3$ côtés, fixons un côté. Dans toute triangulation, ce côté appartient à un unique triangle, dont le troisième sommet occupe l'une des $n + 1$ positions. Ce triangle sépare le reste en deux polygones plus petits, triangulés indépendamment, comptant C_i et C_{n-i} triangulations selon la position choisie. En sommant :

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} \quad (C_0 = 1).$$

3. $C_2 = \frac{1}{3} \binom{4}{2} = 2$, $C_3 = \frac{1}{4} \binom{6}{3} = 5$, $C_4 = \frac{1}{5} \binom{8}{4} = 14$.

COMMENTAIRES

Euler devine ces **nombre de Catalan** en 1751 (lettre à Goldbach), Segner les démontre en 1758, et Catalan leur donne son nom en 1838 : encore la loi de Stigler.

EXERCICE 29 · APR-A2-29

★★★★★ ★ ⌚

Cayley, 1889 : compter les arbres

MÉTHODE Coder chaque arbre par une suite de nombres, puis compter les suites.

1. $n = 2$: un seul arbre (l'arête). $n = 3$: 3 arbres (le sommet du milieu est 1, 2 ou 3). $n = 4$: les arbres sont soit une **étoile** (un centre relié aux trois autres, 4 choix du centre), soit un **chemin** ($4!/2 = 12$ ordres à symétrie près) : $4 + 12 = \boxed{16}$.

2. On conjecture n^{n-2} , car $1 = 2^0$, $3 = 3^1$, $16 = 4^2$.

3. ★ *Défi*. Le code de Prüfer étant une bijection entre les arbres sur n sommets et les $(n - 2)$ -uplets de $\{1, \dots, n\}$, le nombre d'arbres est celui de ces uplets :

$$\boxed{n^{n-2}}$$

ce qui confirme la conjecture.

COMMENTAIRES

Attribuée à Cayley (1889), la formule était déjà chez Borchardt (1860) ; la preuve limpide, par le code de Prüfer, attend 1918. La loi de Stigler frappe une fois de plus.

Euler, 1782 : les 36 officiers

1. Un carré latin d'ordre 3, par exemple $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{pmatrix}$. Pour les dénombrer : la première ligne est une permutation de $\{A, B, C\}$ ($3! = 6$ choix) ; pour chacune, il reste exactement 2 façons de compléter les deux lignes suivantes. D'où $6 \times 2 = \boxed{12}$ carrés latins d'ordre 3.
2. En superposant le carré précédent et sa version « décalée » $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$, les neuf couples (lettre, grec) sont tous distincts : c'est un carré gréco-latin d'ordre 3.
3. ★ *Défi.* À l'ordre 2, il n'existe que deux carrés latins : $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B & A \\ A & B \end{pmatrix}$. Superposer le premier avec lui-même donne les couples $(A, A), (B, B)$ répétés ; le superposer avec le second fait apparaître deux fois le couple (A, B) (les deux autres superpositions ordonnées sont symétriques de celles-ci). Aucune superposition ne produit les quatre couples distincts : il n'existe donc **aucun** carré gréco-latin d'ordre 2.

COMMENTAIRES

Euler (1782) conjectura l'impossibilité pour tous les ordres $4k + 2$. Elle est fausse : Bose, Shrikhande et Parker, les « briseurs d'Euler », construisent en 1959-1960 des carrés gréco-latins de tous ces ordres, sauf 2 et 6.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

D'autres identités et leurs démonstrations, ainsi que le crible à trois ensembles, vous attendent sur le compagnon numérique.