



EXERCICES : A2. COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

Trente exercices pour compter sans énumérer

PROGRAMME D'ENTRAÎNEMENT

PARTIE	EXERCICES	DIFFICULTÉ	PARCOURS	S'APPUIE SUR
I. Les deux principes	Ex. 1–5	★ à ★★★★★	■ ◆	cours A2, § 1
II. Listes et parties	Ex. 6–10	★ à ★★★★★	■ ◆	cours A2, § 2–3
III. Ranger, ordonner	Ex. 11–15	★★ à ★★★★★	■ ◆ ★	cours A2, § 4
IV. Choisir sans ordonner	Ex. 16–21	★★★ à ★★★★★	■ ◆ ★	cours A2, § 5–6
V. Histoires et belles mathématiques	Ex. 22–30	★★★★ à ★★★★★★	■ ◆ ★	cours A2, § 5–6

AUTOMATISMES EN PARALLÈLE

Cahier de calcul de Terminale Spécialité : fiches 22 (Cardinaux et binomiaux) et 23–24 (Dénombrement I et II).

Cahiers complets et corrigés sur le compagnon numérique.

APL application · THE théorie · SYN synthèse · APR approfondissement ★ difficulté de 1 à 6

⌚ ≈ 10 min · ⌚ ≈ 20 min · ⌚ ≈ 30 min · ⌚ 45 min et plus

I. LES DEUX PRINCIPES

↔ s'appuie sur COURS A2, § 1 · principes additif et multiplicatif

EXERCICE 1 · APL-A2-01



Combien de possibilités ?

Compter, dans chaque cas, le nombre de configurations possibles.

- Un cadenas à 4 molettes de 10 chiffres.
- Un identifiant fait de 3 lettres (parmi 26) suivies de 2 chiffres.
- Un code confidentiel de 6 chiffres.
- Un drapeau à 4 bandes horizontales, chacune de l'une des 5 couleurs disponibles.

Coup de pouce

À chaque position, un choix indépendant des autres : c'est le principe multiplicatif.

EXERCICE 2 · APL-A2-02

★★ ■ ⌚

Au restaurant

Un menu se compose d'une entrée, d'un plat et d'un dessert. La carte propose 3 entrées, 4 plats de viande, 2 plats de poisson et 5 desserts.

1. Combien de menus complets peut-on composer ?
2. Un client peut aussi renoncer au dessert. Combien de repas différents (entrée, plat, et dessert éventuel) sont alors possibles ?

EXERCICE 3 · THE-A2-03

★★ ■ ♦ ⌚

Au moins un

On s'intéresse aux entiers de 100 à 999.

1. Combien y en a-t-il en tout ?
2. Combien n'utilisent **aucun** chiffre 5 dans leur écriture ?
3. En déduire le nombre de ceux qui contiennent **au moins un** chiffre 5.

Coup de pouce

Compter directement « au moins un 5 » est pénible. Passez par le contraire.

EXERCICE 4 · APL-A2-04

★★ ■ ♦ ⌚

Sans bégayer

On forme des mots de 4 lettres avec l'alphabet $\{A, B, C, D, E\}$, à la seule condition que **deux lettres consécutives ne soient jamais identiques** (les lettres peuvent se répéter à distance). Combien de tels mots existe-t-il ?

EXERCICE 5 · THE-A2-05

★★★ ■ ♦ ⌚

Deux clubs

Dans une classe de 30 élèves, 18 sont inscrits au club de mathématiques, 12 au club d'échecs, et 7 aux deux à la fois.

1. Combien d'élèves sont inscrits à au moins un des deux clubs ?
2. Combien ne sont inscrits à aucun ?

RAPPEL

Pour deux ensembles finis quelconques : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

II. LISTES ET PARTIES

↔ s'appuie sur COURS A2, § 2-3 · k -uplets (n^k) et parties (2^n)

EXERCICE 6 · APL-A2-06

**Trois écritures d'une puissance**

Compter, dans chaque cas.

1. Le nombre d'applications d'un ensemble à 4 éléments vers un ensemble à 3 éléments.
2. Le nombre de mots binaires de longueur 5.
3. Le nombre de façons pour 6 convives de choisir chacun un dessert parmi 4.

EXERCICE 7 · THE-A2-07

**Toutes les parties**

Soit E un ensemble à 8 éléments.

1. Combien E possède-t-il de parties ?
2. Combien de ces parties contiennent un élément a fixé à l'avance ?
3. ♦ *Défi*. Combien de ces parties ont un nombre **pair** d'éléments ?

Coup de pouce

Pour la dernière : à quoi correspond, dans un mot binaire, le fait d'avoir un nombre pair de 1 ? Comparez le nombre de mots de parité paire et impaire.

EXERCICE 8 · THE-A2-08

**Le bon modèle**

On dispose de 6 jetons numérotés de 1 à 6. On en prélève 3. Compter le nombre de résultats possibles selon la règle du jeu :

1. tirage **ordonné**, avec **remise** (on note le jeton puis on le repose) ;
2. tirage **ordonné**, **sans remise** ;
3. tirage **simultané** (donc non ordonné, sans remise).

Ranger les trois nombres obtenus dans l'ordre croissant et commenter.

Mots binaires sous contrainte

On considère les mots binaires (suites de 0 et de 1) de longueur 8.

1. Combien en existe-t-il en tout ?
2. Combien comportent **exactement trois** chiffres 1 ?
3. Combien comportent **au plus deux** chiffres 1 ?

Coup de pouce

Choisir les positions des 1 dans un mot de longueur 8, c'est choisir une partie de l'ensemble des 8 positions.

Avec ou sans

Soit E un ensemble à 10 éléments et $a \in E$ un élément fixé. On s'intéresse aux parties de E à exactement 4 éléments.

1. Combien y en a-t-il en tout ?
2. Combien **contiennent** a ? Combien **ne le contiennent pas** ?
3. Vérifier que la somme des deux nombres précédents redonne le premier, et reconnaître la relation obtenue.

III. RANGER, ORDONNER

↔ s'appuie sur COURS A2, § 4 · factorielle, permutations, k -uplets d'éléments distincts

Mises en ordre

1. De combien de façons peut-on ranger 7 livres distincts sur une étagère ?
2. Cinq personnes s'installent sur un banc de cinq places. Combien de dispositions différentes ?

EXERCICE 12 · APL-A2-12



Un bureau

Une association de 10 membres doit élire un président, un secrétaire et un trésorier, ces trois rôles étant occupés par trois personnes différentes. Combien de bureaux différents peut-on former ?

RAPPEL

Ici l'ordre des rôles compte et l'on ne répète personne : c'est un 3-uplet d'éléments distincts, $10 \times 9 \times 8$.

EXERCICE 13 · THE-A2-13



Anagrammes

On appelle *anagramme* d'un mot toute suite obtenue en permutant ses lettres (qu'elle ait un sens ou non).

1. Combien d'anagrammes possède le mot MATHS (cinq lettres distinctes) ?
2. Combien d'anagrammes possède le mot ANAGRAMME ? On y compte trois A et deux M.
3. ♦ ★ Défi. Combien d'anagrammes possède le mot MISSISSIPPI ?

Coup de pouce

Si une lettre est répétée p fois, permuter ces p exemplaires identiques entre eux ne change pas le mot : on a compté chaque anagramme $p!$ fois de trop.

EXERCICE 14 · SYN-A2-14



Autour d'une table ronde

Six convives prennent place autour d'une table **ronde**. On considère que deux dispositions sont identiques lorsqu'elles se déduisent l'une de l'autre par une rotation de la table.

1. Combien de dispositions distinctes existe-t-il ?
2. ★ Défi. On fabrique maintenant un **collier** avec six perles de couleurs distinctes. Deux colliers sont identiques s'ils se déduisent l'un de l'autre par une rotation *ou* par un retournement. Combien de colliers distincts ?

Coup de pouce

Table ronde : fixez une personne comme repère, les autres se placent par rapport à elle. Collier : un retournement supplémentaire identifie chaque disposition à son image miroir.

EXERCICE 15 · SYN-A2-15



Ensemble ou séparés

Sept personnes, dont Alice et Bob, s'alignent pour une photographie.

1. Combien d'alignements au total ?
2. Combien d'alignements où Alice et Bob sont **côte à côte** ?
3. En déduire le nombre d'alignements où ils ne le sont **pas**.

Coup de pouce

Pour le 2., traitez le couple Alice-Bob comme un seul « bloc », sans oublier que ce bloc a lui-même deux arrangements internes.

IV. CHOISIR SANS ORDONNER

↔ s'appuie sur COURS A2, § 5–6 · combinaisons, relation de Pascal, symétrie

EXERCICE 16 · APL-A2-16



Premiers choix

1. Un comité de 4 personnes doit être formé parmi 12 candidats. Combien de comités différents ?
2. À la belote, une main est un ensemble de 5 cartes prises dans un jeu de 32. Combien de mains différentes ?

EXERCICE 17 · THE-A2-17



Comités sous contrainte

Un groupe est composé de 7 femmes et 5 hommes. On forme un comité de 4 personnes.

1. Combien de comités comptent **exactement deux femmes** ?
2. Combien de comités comptent **au moins un homme** ?

Coup de pouce

Pour le 2., le contraire de « au moins un homme » est « que des femmes ».

EXERCICE 18 · THE-A2-18



Deux lectures du triangle

1. Calculer $\binom{10}{3}$ en utilisant **uniquement** la relation de Pascal et les valeurs $\binom{9}{2} = 36$ et $\binom{9}{3} = 84$.
2. Sans aucun calcul de factorielle, donner la valeur de $\binom{20}{18}$. Justifier.

EXERCICE 19 · SYN-A2-19



Exactement deux as

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une main de 5 cartes. Ce jeu contient 4 as. Combien de mains contiennent **exactement deux as** ?

Coup de pouce

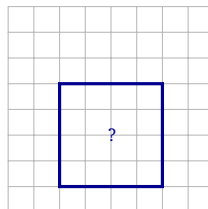
Deux décisions successives et indépendantes : choisir les deux as, puis compléter la main avec des cartes qui ne sont pas des as.

EXERCICE 20 · SYN-A2-20



Le compte des rectangles

Un échiquier est formé de 8×8 cases, donc de 9 droites horizontales et 9 droites verticales.



Combien de **rectangles** (de toutes tailles, aux côtés portés par les lignes de la grille) peut-on tracer sur cet échiquier ?

Coup de pouce

Un rectangle est entièrement déterminé par le choix de ses deux droites horizontales et de ses deux droites verticales.

Partager sans ordonner

On veut distribuer 10 bonbons **identiques** entre 4 enfants (un enfant peut n'en recevoir aucun). (*Ce modèle, dit des combinaisons avec répétition, est hors du programme : on le construit ici pas à pas.*)

1. Représentons une distribution par une file de 10 jetons • et de 3 séparateurs | : par exemple •• | •••• | | •••• signifie que les enfants reçoivent 2, 4, 0, 4 bonbons. Expliquer pourquoi toute distribution correspond à une telle file, et réciproquement.
2. Une file est déterminée par la position des 3 séparateurs parmi les 13 symboles. En déduire le nombre de distributions.

V. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

↔ s'appuie sur COURS A2, § 5–6 · identités et dénombrements célèbres, par double comptage et bijection

Dirichlet, 1834 : le principe des tiroirs

Fils d'un receveur des postes, Peter Gustav Lejeune Dirichlet énonce en 1834 un principe d'une évidence trompeuse, le *Schubfachprinzip* : **si l'on range $n + 1$ objets dans n tiroirs, au moins un tiroir en contient deux**. L'idée figurait déjà dans la *Récréation mathématique* attribuée à Jean Leurechon (1624), mais c'est Dirichlet qui en fait un outil.

1. On choisit six entiers, quelconques, dans $\{1, 2, \dots, 10\}$. Montrer qu'il en existe forcément deux dont l'un divise l'autre.
2. ☆ *Défi*. Généraliser : parmi $n + 1$ entiers pris dans $\{1, \dots, 2n\}$, il en existe toujours deux dont l'un divise l'autre.

Coup de pouce

Tout entier s'écrit de façon unique $2^a \times m$ avec m impair. Combien de valeurs impaires m sont-elles possibles dans $\{1, \dots, 10\}$? Ce sont les tiroirs.

Fermat, vers 1636 : les nombres figurés s'empilent

Les nombres *triangulaires* 1, 3, 6, 10, 15, ... comptent les boules d'un empilement triangulaire : ce sont les $\binom{n}{2}$, une colonne du triangle de Pascal. Fermat, vers 1636, sait additionner ces nombres figurés ; Pascal les systématisera une génération plus tard dans son *Traité du triangle arithmétique*. La forme obtenue dans le triangle est aujourd'hui surnommée « crosse de hockey », un sobriquet tardif.

1. Calculer $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2}$, puis vérifier que cette somme vaut $\binom{7}{3}$.

2. ★ *Défi.* Démontrer en général $\sum_{i=r}^n \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$: parmi les parties à $r+1$ éléments de $\{1, \dots, n+1\}$, classez-les selon leur **plus grand** élément.

EXERCICE 24 · APR-A2-24

★★★★★ ★ ⏳

Zhu Shijie, 1303 : la convolution avant Vandermonde

L'identité que Vandermonde publie en 1772 figure déjà, en 1303, dans le *Précieux Miroir des quatre éléments* du Chinois Zhu Shijie, quatre cent soixante-neuf ans plus tôt. D'où son nom d'identité de Chu-Vandermonde.

1. Une délégation de 2 élèves est choisie dans un groupe de 3 filles et 4 garçons. En classant selon le nombre de filles, montrer que leur nombre vaut $\binom{3}{0}\binom{4}{2} + \binom{3}{1}\binom{4}{1} + \binom{3}{2}\binom{4}{0}$, puis vérifier que c'est $\binom{7}{2}$.
2. Énoncer l'identité générale de Chu-Vandermonde.
3. ★ *Défi.* En prenant un groupe de n filles et n garçons et une délégation de n personnes, puis en utilisant la symétrie, en déduire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. Vérifier pour $n = 4$.

EXERCICE 25 · APR-A2-25

★★★★★ ★ ⏳

Kaplansky, 1943 : choisir sans voisins

En 1943, Irving Kaplansky résout d'un lemme élégant un vieux casse-tête mondain (placer des couples à table sans voisins conjugaux). Le lemme compte les façons de choisir k éléments **deux à deux non consécutifs** parmi n alignés.

1. Dénombrer les façons de choisir 3 nombres deux à deux non consécutifs dans $\{1, \dots, 8\}$.
2. ★ *Défi.* Rangeons les k nombres choisis en ordre croissant $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ et posons $b_i = a_i - (i-1)$. Montrer que $(b_1, \dots, b_k)$ est une partie à k éléments de $\{1, \dots, n-k+1\}$ et que la correspondance est une bijection. En déduire le nombre cherché, $\binom{n-k+1}{k}$.

EXERCICE 26 · APR-A2-26

★★★★★ ★ ⏳

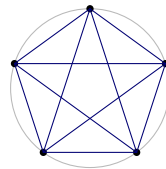
Delannoy, 1895 : les chemins du roi

Henri Delannoy, officier et mathématicien amateur, ami d'Édouard Lucas, compte en 1895 les trajets d'un roi d'échecs qui ne recule jamais : de $(0, 0)$ à (m, n) , par pas vers l'**est** ($\rightarrow$), le **nord** ($\uparrow$) ou la **diagonale** nord-est ($\nearrow$).

1. Dénombrer les trajets menant à $(1, 1)$, puis à $(2, 2)$.
2. Justifier que le nombre $D(i, j)$ de trajets vers (i, j) (avec $i, j \geq 1$) vérifie $D(i, j) = D(i-1, j) + D(i, j-1) + D(i-1, j-1)$.
3. ★ *Défi.* Remplir le tableau des $D(i, j)$ pour $0 \leq i, j \leq 3$, et donner le nombre de trajets vers $(3, 3)$.

Leo Moser, 1949 : le cercle qui piège l'induction

En 1949, Leo Moser propose l'exemple canonique de la conjecture trop pressée. On place n points sur un cercle, **en position générale** (jamais trois cordes concourantes à l'intérieur), et l'on trace **toutes** les cordes. Elles découpent le disque en régions.



1. Dénombrer les régions à la main pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Quelle suite croit-on reconnaître ? Quelle valeur devine-t-on pour $n = 6$?
2. Dessiner soigneusement le cas $n = 6$ (points irréguliers) et compter. Surprise ?
3. ★ *Défi*. On admet que le nombre exact de régions est $\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$. Le vérifier, et expliquer pourquoi la suite « double » cesse à $n = 6$.

Coup de pouce

Chaque point d'intersection intérieur est déterminé par 4 des n points (les extrémités des deux cordes qui s'y croisent) : d'où le terme $\binom{n}{4}$.

Euler, 1751 : découper le polygone

Le 4 septembre 1751, Euler écrit à Goldbach : de combien de façons peut-on découper un polygone convexe en triangles par des diagonales qui ne se croisent pas ? Il devine la réponse par tâtonnement ; Segner la démontre en 1758 ; le nom « nombres de Catalan » n'arrivera qu'en 1838.

1. Dénombrer les triangulations du carré, du pentagone, puis de l'hexagone (on trouve 2, 5, 14).
2. ★ *Défi*. En notant C_n le nombre de triangulations du polygone à $n + 2$ côtés (avec $C_0 = 1$), fixer un côté, puis le troisième sommet du triangle qui s'y appuie, pour établir la récurrence de Segner

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}.$$

3. On admet la formule $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. La vérifier sur les trois cas de la question 1.

Cayley, 1889 : compter les arbres

Combien y a-t-il d'**arbres** (graphes connexes sans cycle) reliant n points numérotés ? La réponse, d'une simplicité stupéfiante, est attribuée à Cayley en 1889 ; Borchardt l'avait pourtant obtenue dès 1860, et Prüfer en donnera la plus belle preuve en 1918.

1. Dénombrer à la main les arbres sur 2, puis 3, puis 4 sommets numérotés (on trouve 1, 3, 16).
2. Conjecturer une formule donnant le nombre d'arbres en fonction de n .
3. ★ *Défi*. Le **code de Prüfer** associe à chaque arbre sur n sommets numérotés une suite de $n-2$ numéros pris dans $\{1, \dots, n\}$, et cette correspondance est une bijection. En admettant ce fait, retrouver le nombre d'arbres et confirmer la conjecture.

Euler, 1782 : les 36 officiers

Euler, en 1782, demande de ranger 36 officiers de 6 grades et 6 régiments en un carré 6×6 , de sorte que chaque ligne et chaque colonne réunisse un officier de chaque grade et de chaque régiment. Un tel arrangement est un **carré gréco-latin**. Euler le conjecture impossible à l'ordre 6, ce qui sera prouvé en 1901 ; mais sa conjecture générale (pour tous les ordres $4k+2$) sera **réfutée en 1959-1960**.

1. Un **carré latin** d'ordre 3 est une grille 3×3 où chacun des symboles A, B, C apparaît une fois par ligne et par colonne. En construire un, puis dénombrer tous les carrés latins d'ordre 3.
2. Superposer deux carrés latins d'ordre 3 dits « orthogonaux » (chaque paire de symboles apparaît une fois et une seule) : c'est un carré gréco-latin d'ordre 3. En donner un.
3. ★ *Défi*. Montrer qu'il n'existe **aucun** carré gréco-latin d'ordre 2.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les corrigés détaillés, quelques identités de plus (dont la formule du crible à trois ensembles), et une visite guidée du triangle de Pascal vous attendent sur le compagnon numérique.