



CORRIGÉ · C1. LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

Corrigé des trente exercices, feuille en main

RÉDACTION MODÈLE : la copie idéale, à imiter · MÉTHODE : la stratégie en une ligne, puis le calcul · COMMENTAIRES : ce que la solution enseigne

I. LE CALCUL DANS $\mathbb{C}$

EXERCICE 1 · APL-C1-01



Six formes algébriques

MÉTHODE Développer, puis regrouper réels et imaginaires ; remplacer i^2 par -1 à chaque apparition.

$$(3 - 2i) + (-1 + 5i) = \boxed{2 + 3i}$$

$$(2 + i)(3 - 4i) = 6 - 8i + 3i + 4 = \boxed{10 - 5i}$$

$$(3 + i)^2 = 9 + 6i - 1 = \boxed{8 + 6i}$$

$$(2 - 3i)^2 = 4 - 12i - 9 = \boxed{-5 - 12i}$$

$$i^{2026} = i^{4 \times 506 + 2} = i^2 = \boxed{-1}$$

$$(1 - i)(1 + i) = 1 - i^2 = \boxed{2}$$

COMMENTAIRES

Pour les puissances de i , ne retenez que **le reste modulo 4** : la suite $1, i, -1, -i$ se répète indéfiniment. Le dernier calcul est l'identité $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$ appliquée à $y = i$: c'est déjà la quantité conjuguée de l'exercice 3.

Le conjugué au travail

1.

MÉTHODE Calculer les deux membres séparément et comparer.

Avec $z = 2 - 5i$ et $z' = -1 + 3i$: $z + z' = 1 - 2i$, $z z' = 13 + 11i$ et $z^3 = -142 + 65i$. D'où

$$\overline{z + z'} = 1 + 2i,$$

$$\overline{z} + \overline{z'} = (2 + 5i) + (-1 - 3i) = 1 + 2i,$$

$$\overline{z z'} = 13 - 11i,$$

$$\overline{z} \overline{z'} = (2 + 5i)(-1 - 3i) = 13 - 11i,$$

$$\overline{z^3} = -142 - 65i,$$

$$(\overline{z})^3 = (2 + 5i)^3 = -142 - 65i.$$

Les trois couples coïncident : **la conjugaison respecte somme, produit et puissance.**2. $z \overline{z} = 2^2 + 5^2 = \boxed{29}$ et $z' \overline{z'} = (-1)^2 + 3^2 = \boxed{10}$, conformément à $w \overline{w} = a^2 + b^2$.3. Par la règle de la puissance, $\overline{z^5} = (\overline{z})^5 = \boxed{(2 + 5i)^5}$; par celles du produit et de la puissance, $\overline{z z'^2} = \overline{z} (\overline{z'})^2 = \boxed{(2 + 5i)(-1 - 3i)^2}$.

COMMENTAIRES

La question 3 est la seule qui compte : **on ne recalcule rien**. Une fois les trois règles acquises, conjuguer une expression revient à conjuguer chacun de ses facteurs et à laisser la structure intacte. C'est ce réflexe, et non les calculs de la question 1, qui servira toute l'année.

La quantité conjuguée

RÉDACTION MODÈLE – LA MISE SOUS FORME ALGÈBRE D'UN QUOTIENT

Traisons le deuxième quotient, les cinq autres suivant la même méthode.

Le dénominateur $1 + 2i$ est non nul. Multiplions le numérateur et le dénominateur par son conjugué $1 - 2i$:

$$\frac{3 - i}{1 + 2i} = \frac{(3 - i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)}.$$

Au dénominateur, $(1 + 2i)(1 - 2i) = 1^2 + 2^2 = 5$, un réel non nul. Au numérateur,

$$(3 - i)(1 - 2i) = 3 - 6i - i + 2i^2 = 3 - 7i - 2 = 1 - 7i.$$

Ainsi

$$\frac{3 - i}{1 + 2i} = \frac{1 - 7i}{5} = \boxed{\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i}.$$

Les six résultats :

$$\boxed{\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i}$$

$$\boxed{\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i}$$

$$\boxed{i}$$

$$\boxed{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i}$$

$$\boxed{3 - 2i}$$

$$\boxed{-1 - i}$$

COMMENTAIRES

Trois raccourcis à connaître. Le troisième quotient se traite plus vite en remarquant que $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$. Le cinquième aussi : diviser par i , c'est **multiplier par $-i$** , puisque $\frac{1}{i} = -i$. Et le sixième s'obtient sans conjugué, en simplifiant d'abord $(1-i)^2 = -2i$.

Le piège : multiplier seulement le dénominateur change la valeur du nombre. On multiplie les deux, c'est-à-dire qu'on multiplie par 1.

EXERCICE 4 · APL-C1-04



Réel, ou imaginaire pur ?

MÉTHODE Poser $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, et lire la partie imaginaire du résultat.

1. $z + \bar{z} = 2a$, qui est réel ; $z - \bar{z} = 2ib$, qui est imaginaire pur.
2. $\frac{z - \bar{z}}{i} = \frac{2ib}{i} = 2b$, réel.
3. $z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$, donc z^2 est réel si et seulement si $2ab = 0$, c'est-à-dire $a = 0$ ou $b = 0$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } z \text{ imaginaire pur}$$

4. z^2 est imaginaire pur si et seulement si $a^2 - b^2 = 0$, donc $b = a$ ou $b = -a$: les points d'affixe z décrivent alors **les deux bissectrices des axes**.

COMMENTAIRES

Les deux ensembles se répondent : les carrés réels sont obtenus sur la *croix* des deux axes, les carrés imaginaires purs sur la croix des deux bissectrices, à 45° de la première. Le chapitre C2 dira pourquoi : élever au carré **double l'angle**, et 45 doublé fait 90.

EXERCICE 5 · APL-C1-05



Les puissances de $1 + i$

MÉTHODE Tout part de $(1+i)^2 = 2i$: on ne calcule jamais une puissance de $1+i$ directement.

1. $(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$, donc $(1+i)^4 = (2i)^2 = \boxed{-4}$ et $(1+i)^8 = (-4)^2 = \boxed{16}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, et écrivons $n = 4q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0; 1; 2; 3\}$. Alors $(1+i)^n = ((1+i)^4)^q (1+i)^r = (-4)^q (1+i)^r$, et $(1+i)^r$ vaut successivement 1, $1+i$, $2i$, $-2+2i$.
3. $2026 = 2 \times 1013$, donc

$$(1+i)^{2026} = ((1+i)^2)^{1013} = (2i)^{1013} = 2^{1013} i^{1013}.$$

Or $1013 = 4 \times 253 + 1$, donc $i^{1013} = i$ et $\boxed{(1+i)^{2026} = 2^{1013} i}$.

COMMENTAIRES

La question 3 montre pourquoi il ne faut pas se jeter sur la question 2 : passer par le carré divise l'exposant par deux d'un coup, alors que la division euclidienne par 4 oblige à traîner $(-4)^{506}$. **Choisir sa décomposition** fait toute la différence.

Systèmes en z et $\bar{z}$

RÉDACTION MODÈLE – LA SÉPARATION DES PARTIES RÉELLE ET IMAGINAIRE

Traisons la première équation. Posons $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, de sorte que $\bar{z} = a - ib$. Alors

$$2z + i\bar{z} = 2a + 2ib + i(a - ib) = 2a + 2ib + ia + b = (2a + b) + i(a + 2b).$$

Les réels $2a + b$ et $a + 2b$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire du membre de gauche. Par **unicité de la forme algébrique**, l'équation $2z + i\bar{z} = 3 + i$ équivaut donc au système

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ a + 2b = 1 \end{cases}$$

La combinaison $2 \times L_1 - L_2$ donne $3a = 5$, d'où $a = \frac{5}{3}$, puis $b = 3 - 2a = -\frac{1}{3}$. Réciproquement ce couple convient, et

$$z = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}i$$

2. Même méthode : $z + 2\bar{z} = 3a - ib = 6 - 3i$ donne $a = 2$ et $b = 3$, d'où $z = 2 + 3i$.

3. $iz - \bar{z} = (-a - b) + i(a + b)$. L'équation équivaut donc au système $-(a + b) = 1$ et $a + b = 1$, qui exigerait $a + b = -1$ et $a + b = 1$. **C'est la troisième équation qui n'a aucune solution.**

COMMENTAIRES

La leçon est dans la troisième. Une équation en z et $\bar{z}$ n'est pas une équation d'inconnue z : c'est un **système de deux équations réelles à deux inconnues réelles**, et un tel système peut parfaitement être incompatible. Ne cherchez jamais à « isoler z » en traitant $\bar{z}$ comme une constante.

Chaînes de calcul

MÉTHODE Simplifier chaque morceau avant d'assembler, en réutilisant $\frac{1+i}{1-i} = i$ et $(1 \pm i)^2 = \pm 2i$.

$$\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} = i + (-i) = \boxed{0}$$

$$\left(\frac{2+i}{1-i}\right)^2 = \left(\frac{(2+i)(1+i)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{2}\right)^2 = \frac{-8+6i}{4} = \boxed{-2 + \frac{3}{2}i}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1+i}} = \frac{1}{1 + \frac{1-i}{2}} = \frac{2}{3-i} = \frac{2(3+i)}{10} = \boxed{\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i}$$

COMMENTAIRES

Le premier calcul se voit sans rien écrire : les deux fractions sont conjuguées l'une de l'autre, donc leur somme est réelle, et comme la première vaut i , la somme est nulle. **Reconnaître deux conjugués évite un calcul sur deux.**

II. LE SECOND DEGRÉ, ET CE QU'IL CACHE

EXERCICE 8 · APL-C1-08

 $\Delta < 0$ en série

MÉTHODE Discriminant, puis $\sqrt{-\Delta}$ et la formule $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

ÉQUATION	Δ	SOLUTIONS
$z^2 + z + 1 = 0$	-3	$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$
$z^2 - 4z + 13 = 0$	-36	$2 \pm 3i$
$2z^2 + 2z + 5 = 0$	-36	$\frac{-1 \pm 3i}{2}$
$z^2 + 9 = 0$	-36	$\pm 3i$
$3z^2 - 6z + 7 = 0$	-48	$1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}i$
$z^2 + 4z + 5 = 0$	-4	$-2 \pm i$

COMMENTAIRES

La quatrième se lit sans discriminant : $z^2 = -9$ donne directement $z = \pm 3i$. **Ne dégainez la formule que si la factorisation ne saute pas aux yeux.** Et vérifiez toujours d'un coup d'œil que les deux solutions sont conjuguées : c'est gratuit, et cela attrape la moitié des erreurs de signe.

EXERCICE 9 · APL-C1-09



Somme et produit

MÉTHODE Une équation réelle admettant α pour racine admet aussi $\bar{\alpha}$: on connaît donc somme et produit.

- Les coefficients étant réels, $3 + 2i$ est aussi racine. La somme vaut 6 et le produit $(3 - 2i)(3 + 2i) = 9 + 4 = 13$, d'où $\boxed{z^2 - 6z + 13 = 0}$. Toute autre équation convenable s'en déduit en multipliant par un réel non nul : elle est unique à un facteur près.
- $\Delta = 4 - 20 = -16$, racines $-1 \pm 2i$, donc $\boxed{z^2 + 2z + 5 = (z + 1 - 2i)(z + 1 + 2i)}$.
- Ce sont les racines de $z^2 - 4z + 13 = 0$, soit $\boxed{2 + 3i}$ et $\boxed{2 - 3i}$.

COMMENTAIRES

La question 3 est le problème du chapitre XXXVII de l'*Ars Magna*, transposé : partager 4 en deux parties de produit 13. Cardan aurait dit la réponse « subtile et inutile ».

EXERCICE 10 · THE-C1-10



Racines carrées, algébriquement

RÉDACTION MODÈLE – LA RACINE CARRÉE D'UN COMPLEXE, SANS MODULE

Cherchons les $z = a + ib$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, tels que $z^2 = 3 + 4i$.

Mise en système. On a $z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$. Par unicité de la forme algébrique, l'égalité $z^2 = 3 + 4i$ équivaut à

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

Résolution. La seconde équation impose $a \neq 0$ et $b = \frac{2}{a}$. En reportant dans la première :

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \iff a^4 - 3a^2 - 4 = 0,$$

après multiplication par $a^2 \neq 0$. En posant $A = a^2$, on obtient $A^2 - 3A - 4 = 0$, de discriminant 25, donc $A = 4$ ou $A = -1$. Comme $A = a^2$ est un carré de réel, seul $A = 4$ convient, d'où $a = 2$ ou $a = -2$, puis $b = 1$ ou $b = -1$ respectivement.

Conclusion. $\boxed{z = 2 + i \text{ ou } z = -2 - i}$, et l'on vérifie que $(2 + i)^2 = 3 + 4i$.

Même méthode pour les deux autres :

$$z^2 = -5 + 12i \implies \boxed{z = \pm(2 + 3i)} \quad ; \quad z^2 = -i \implies \boxed{z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)}$$

COMMENTAIRES

Trois remarques. D'abord, les deux solutions sont toujours **opposées** : si $z^2 = w$ alors $(-z)^2 = w$, et il n'y en a pas d'autres puisque $\mathbb{C}$ est un corps. Ensuite, lorsque w n'est pas réel, l'équation en A a **exactement une** racine positive, ce qui garantit l'existence ; et si w est réel, la racine carrée s'écrit directement, réelle ou imaginaire pure. Dans tous les cas, **tout complexe admet une racine carrée** : c'est le premier pas vers d'Alembert-Gauss. Enfin, pour $z^2 = -i$ le système donne $a = \pm b$: le cas $a = b$ conduit à $2a^2 = -1$, impossible, et c'est là qu'il faut être attentif.

Au chapitre C2, l'ajout de l'équation $a^2 + b^2 = |w|$ rendra le système linéaire en a^2 et b^2 , et la résolution tiendra en deux lignes.

EXERCICE 11 · THE-C1-11



Le second degré à coefficients complexes

MÉTHODE La formule du second degré ne suppose pas les coefficients réels : seule change la façon d'extraire une racine carrée du discriminant, et l'exercice 10 sait le faire.

1. $\Delta = (3+i)^2 - 4(2+2i) = 9 + 6i - 1 - 8 - 8i = \boxed{-2i}$.

2. On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = -2i$, soit $a^2 - b^2 = 0$ et $2ab = -2$. La première donne $b = \pm a$; avec $b = a$ on obtiendrait $2a^2 = -2$, impossible ; avec $b = -a$ il vient $-2a^2 = -2$, donc $a = 1$ et $b = -1$: $\delta = 1 - i$.

3. Les solutions sont $\frac{(3+i) \pm (1-i)}{2}$, soit $\boxed{z_1 = 2 \text{ et } z_2 = 1+i}$. Contrôle : $z_1 + z_2 = 3+i$ et $z_1 z_2 = 2+2i$, conformes aux coefficients.

4. $\Delta = (5-i)^2 - 4(8-i) = -8-6i$, dont une racine carrée est $\delta = 1-3i$. Les solutions sont $\frac{(5-i) \pm (1-3i)}{2}$, soit $\boxed{3-2i \text{ et } 2+i}$.

COMMENTAIRES

Ce que cet exercice établit dépasse largement le programme : toute équation du second degré à coefficients complexes se résout dans $\mathbb{C}$. Comme tout complexe admet une racine carrée (exercice 10), la formule s'applique toujours. C'est le cas $n = 2$ du théorème de d'Alembert-Gauss, démontré ici entièrement à la main. Les degrés 3 et 4 le sont aussi, par Cardan et par Ferrari (exercices 25 et 27) ; au-delà, plus rien ne s'écrit par radicaux.

Le contrôle par somme et produit est ici indispensable : sans lui, une erreur de signe sur δ passe inaperçue.

EXERCICE 12 · THE-C1-12



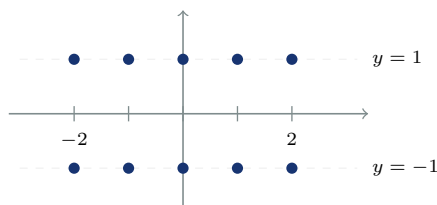
Un paramètre réel

MÉTHODE Calculer Δ en fonction de m avant toute chose : ici il ne dépend pas de m .

1. $\Delta = 4m^2 - 4(m^2 + 1) = \boxed{-4}$, indépendant de m et strictement négatif : (E_m) n'a jamais de solution réelle.

2. $z = \frac{2m \pm 2i}{2}$, soit $\boxed{z = m \pm i}$.

3. Les points obtenus ont pour coordonnées $(m; 1)$ et $(m; -1)$: ils décrivent les deux droites d'équations $\boxed{y = 1}$ et $\boxed{y = -1}$.



4. $z^2 - 2mz + 5 = 0$ a pour discriminant $4m^2 - 20$, strictement négatif si et seulement si $m^2 < 5$, c'est-à-dire $\boxed{m \in]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[}$.

COMMENTAIRES

Un discriminant constant est un cadeau : il dispense de toute disjonction de cas. Retenez la figure de la question 3 : quand une famille d'équations réelles a des racines non réelles, celles-ci se promènent toujours **symétriquement par rapport à l'axe des réels**, puisqu'elles sont conjuguées.

III. POLYNÔMES ET RACINES

EXERCICE 13 · THE-C1-13

Factoriser par $z - a$

MÉTHODE Racine évidente, division par $z - a$, puis second degré.

1. $P(1) = 1 - 3 + 4 - 2 = 0$. Donc $P(z) = (z - 1)(z^2 - 2z + 2)$, et le facteur quadratique a pour discriminant -4 :

$$P(z) = (z - 1)(z - 1 - i)(z - 1 + i) \quad \text{racines } 1, 1 + i, 1 - i.$$

2. $Q(2) = 8 - 8 + 2 - 2 = 0$, donc $Q(z) = (z - 2)(z^2 + 1)$ et racines $2, i, -i$.

COMMENTAIRES

Le quotient s'obtient de tête par identification : le terme dominant et le terme constant se lisent immédiatement, le coefficient du milieu se déduit. Notez que les deux polynômes sont à **coefficients réels** et que leurs racines non réelles sont bien conjuguées : c'est l'exercice 15 qui arrive.

EXERCICE 14 · THE-C1-14



La somme géométrique

MÉTHODE Le cas $a = 1$ de l'identité du cours, puis division par $z - 1 \neq 0$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 1$. En prenant $a = 1$ dans l'identité du cours, valable pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + 1).$$

Si de plus $z \neq 1$, le facteur $z - 1$ est non nul et l'on peut diviser :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad 1 + z + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

2. La somme comporte 2027 termes, de i^0 à i^{2026} .

Par la formule, avec $n = 2027$: $2027 = 4 \times 506 + 3$, donc $i^{2027} = i^3 = -i$ et

$$\sum_{k=0}^{2026} i^k = \frac{-i - 1}{i - 1} = \frac{(-i - 1)(-1 - i)}{(i - 1)(-1 - i)} = \frac{2i}{2} = i$$

Par regroupement, chaque paquet de quatre termes consécutifs a une somme nulle ; il reste les trois derniers,

$i^{2024} + i^{2025} + i^{2026} = 1 + i - 1 = i$. Les deux résultats coïncident.

COMMENTAIRES

La double méthode n'est pas une coquetterie : **c'est le contrôle**. Une erreur d'un cran sur le reste modulo 4 est l'erreur la plus fréquente du chapitre, et seule la seconde méthode l'attrape.

EXERCICE 15 · THE-C1-15



Les racines vont par paires

RÉDACTION MODÈLE – CONJUGUER UNE ÉGALITÉ ENTIÈRE

1. Écrivons $P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$, où les coefficients c_k sont **réels**, donc vérifient $\overline{c_k} = c_k$.

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) = 0$. Conjuguons cette égalité de nombres complexes. Le conjugué d'une somme étant la somme des conjugués, et celui d'un produit le produit des conjugués :

$$\overline{P(a)} = \overline{\sum_{k=0}^n c_k a^k} = \sum_{k=0}^n \overline{c_k} \overline{a^k} = \sum_{k=0}^n c_k \overline{a}^k = P(\overline{a}).$$

Or $\overline{P(a)} = \overline{0} = 0$. Donc $P(\overline{a}) = 0$: le conjugué $\overline{a}$ est lui aussi racine de P .

2. $(1+2i)^2 = -3+4i$ et $(1+2i)^3 = -11-2i$, d'où $R(1+2i) = (-11-2i) - (-3+4i) + 3(1+2i) + 5 = 0$.

3. Les coefficients de R étant réels, $1-2i$ est aussi racine. La somme des trois racines vaut 1 (opposé du coefficient de z^2), donc la troisième est $1 - (1+2i) - (1-2i) = -1$, ce que confirme $R(-1) = 0$. Ainsi

$$R(z) = (z+1)(z-1-2i)(z-1+2i) = (z+1)(z^2-2z+5)$$

COMMENTAIRES

Retenez le geste, pas la formule : on conjugue une égalité entière. C'est lui qui donne, sans aucun calcul de coordonnées, toutes les règles de conjugaison qui manquent, et c'est lui qui servira encore à l'exercice 16.

L'hypothèse « coefficients réels » est indispensable : $z^2 - (3+i)z + (2+2i)$ a pour racines 2 et $1+i$, qui ne sont pas conjuguées.

EXERCICE 16 · THE-C1-16



Le degré impair

RÉDACTION MODÈLE – LA MULTIPLICITÉ, ET LE POLYNÔME CONJUGUÉ

1. Pour $R(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ et $z \in \mathbb{C}$:

$$\overline{R(z)} = \sum_{k=0}^n \overline{c_k} \overline{z^k} = \overline{R}(\overline{z}).$$

Si R est à coefficients réels, alors $\overline{R} = R$ et l'égalité devient $\overline{R(z)} = R(\overline{z})$: c'est exactement l'exercice 15.

2. Soit P à coefficients réels et a une racine non réelle de P , de multiplicité m . Par définition, il existe un polynôme Q tel que

$$P(z) = (z - a)^m Q(z) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}, \quad \text{avec } Q(a) \neq 0.$$

Conjuguons les *coefficients* des deux membres. À gauche, P étant réel, on retrouve P . À droite, le conjugué d'un produit de polynômes est le produit des polynômes conjugués, et $\overline{(z - a)^m} = (z - \overline{a})^m$. Donc

$$P(z) = (z - \overline{a})^m \overline{Q}(z) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Il reste à voir que $\overline{Q}(\overline{a}) \neq 0$: d'après la question 1 appliquée à Q , $\overline{Q}(\overline{a}) = \overline{Q(a)}$, qui est non nul puisque $Q(a) \neq 0$.

Ainsi $\overline{a}$ est racine de P **de multiplicité exactement** m , la même que a .

3. Les racines non réelles de P se répartissent donc en paires $\{a; \overline{a}\}$ avec $a \neq \overline{a}$, et les deux membres d'une paire ont la même multiplicité. Leur nombre total, compté avec multiplicité, est donc **pair**.

4. Si $\deg P = n$ est impair, le théorème de d'Alembert-Gauss donne n racines comptées avec multiplicité. En retranchant le nombre pair de racines non réelles, il reste un nombre **impair** de racines réelles, en particulier au moins une. Tout polynôme réel de degré impair a une racine réelle.

5. Par exemple $z^4 + 1$, dont aucune racine n'est réelle puisque $z^4 \geq 0$ pour tout z réel.

COMMENTAIRES

La question 2 est le cœur, et c'est elle qu'on escamote d'ordinaire. Savoir que $\overline{a}$ est racine ne suffit pas : il faut que ce soit avec la *même* multiplicité, sans quoi le décompte de la question 3 s'effondre. L'astuce consiste à conjuguer une égalité de **polynômes**, et non de nombres, ce qui n'est licite que parce qu'on a défini $\overline{R}$.

Ce résultat est la raison pour laquelle un polynôme réel de degré 3 a toujours une racine réelle, donc toujours un facteur du premier degré : c'est ce qui rendait la méthode de Cardan universelle.

EXERCICE 17 · SYN-C1-17



Trop de racines

MÉTHODE *Le théorème de majoration du cours, pris par la contraposée.*

1. Supposons $P \neq 0$. Alors P est un polynôme non nul de degré au plus n , donc il admet *au plus* n racines distinctes. Il en admettrait $n + 1$: contradiction. Donc $P = 0$.

2. Le polynôme $P - Q$ est de degré au plus n et s'annule en $n + 1$ points distincts. D'après la question 1, il est nul, donc $P = Q$.

3. Deux polynômes de degré au plus 2 dont les courbes passent par les mêmes trois points d'abscisses distinctes coïncident en ces trois abscisses ; d'après la question 2 avec $n = 2$, ils sont égaux. Il y a donc au plus un tel polynôme.

COMMENTAIRES

La question 3 est le théorème d'**unicité de l'interpolation**, et il est plus fort qu'il n'y paraît : il dit qu'une parabole est entièrement déterminée par trois de ses points. L'existence, elle, est une autre affaire, et se démontre par les polynômes de Lagrange.

EXERCICE 18 · SYN-C1-18



La factorisation réelle

MÉTHODE Appairer chaque racine non réelle avec sa conjuguée, et récurre sur le degré.

1. $(z - a)(z - \bar{a}) = z^2 - (a + \bar{a})z + a\bar{a} = z^2 - 2\operatorname{Re}(a)z + (\operatorname{Re}(a)^2 + \operatorname{Im}(a)^2)$, dont les coefficients sont réels. Son discriminant vaut $4\operatorname{Re}(a)^2 - 4(\operatorname{Re}(a)^2 + \operatorname{Im}(a)^2) = -4\operatorname{Im}(a)^2$, strictement négatif car a n'est pas réel : ce trinôme n'a pas de racine réelle.

2. Récurrence **forte** sur le degré $n \geq 1$, la descente se faisant de 1 ou de 2.

Initialisation. Si $n = 1$, P est lui-même un facteur réel de degré 1. Si $n = 2$, ou bien P a une racine réelle et se factorise en deux facteurs réels de degré 1, ou bien il n'en a pas et il est lui-même le facteur cherché.

Hérédité. Soit $n \geq 3$, la propriété étant supposée vraie pour tout degré strictement inférieur.

Premier cas : P admet une racine réelle r . La division euclidienne de P par $z - r$ **menée dans** $\mathbb{R}[X]$ fournit un quotient Q à coefficients réels et un reste constant, nul puisque $P(r) = 0$. Donc $P = (z - r)Q$ avec Q réel de degré $n - 1$, et l'hypothèse de récurrence s'applique à Q .

Second cas : P n'a aucune racine réelle. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P admet une racine a , nécessairement non réelle ; par l'exercice 15, $\bar{a}$ en est une autre. Posons $D(z) = (z - a)(z - \bar{a})$, qui est à coefficients réels d'après la question 1. La division euclidienne de P par D **dans** $\mathbb{R}[X]$ donne $P = DQ + R$ avec Q et R réels et $\deg R \leq 1$. En évaluant en a , qui annule P et D , on obtient $R(a) = 0$: un polynôme réel de degré au plus 1 ayant une racine non réelle est le polynôme nul, donc $R = 0$. Ainsi $P = DQ$ avec Q réel de degré $n - 2$, et l'hypothèse de récurrence s'applique.

3. $z^4 + 1 = (z^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}z)^2$, d'où

$$z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$$

chacun des deux facteurs ayant pour discriminant $2 - 4 = -2 < 0$.

COMMENTAIRES

Ce théorème est la version *réelle* de d'Alembert-Gauss, et c'est celle qu'utilisent les physiciens et les ingénieurs : tout signal se décompose en facteurs du premier et du second degré, à coefficients réels. La question 3 montre au passage qu'un polynôme peut être irréductible sur $\mathbb{R}$ tout en se factorisant complètement sur $\mathbb{C}$.

IV. LA CONSTRUCTION, REMISE EN CAUSE

EXERCICE 19 · THE-C1-19



L'identité de Diophante, retournée

MÉTHODE Développer une fois ; ou, plus élégamment, reconnaître un produit de modules avant l'heure.

$$1. (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

2. Posons $z = a + ib$ et $w = c + id$. Alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$ et $w\bar{w} = c^2 + d^2$, tandis que $zw = (ac - bd) + i(ad + bc)$. Or

$$(z\bar{z})(w\bar{w}) = (zw)\overline{(zw)} = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2,$$

ce qui est l'identité. Une ligne, et aucun développement.

3. Avec $a = 1, b = 2, c = 2, d = 3$: $ac - bd = -4$ et $ad + bc = 7$, d'où $\boxed{65 = 4^2 + 7^2}$.

4. Avec $a = 2, b = 1$ (c'est-à-dire $5 = 2^2 + 1^2$), $c = 2, d = 3$: $ac - bd = 4 - 3 = 1$ et $ad + bc = 6 + 2 = 8$, d'où $\boxed{65 = 1^2 + 8^2}$.

COMMENTAIRES

Pourquoi échanger les facteurs ne donne rien : l'identité de Diophante est la multiplication complexe, qui est commutative. C'est en remplaçant z par $\bar{z}$, autrement dit en échangeant a et b à l'intérieur d'une somme, que l'on change de résultat.

Un entier peut donc avoir plusieurs écritures comme somme de deux carrés, et leur nombre se lit sur sa décomposition en facteurs premiers. C'est le théorème des deux carrés, l'un des plus beaux de l'arithmétique, et l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ de l'exercice 28 en est le cadre naturel.

EXERCICE 20 · THE-C1-20

La conjugaison, seule symétrie de $\mathbb{C}$

MÉTHODE Une telle application est entièrement déterminée par l'image de i , et cette image n'a que deux valeurs possibles.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $c(c(z)) = \bar{\bar{z}} = z$, donc $c \circ c = \text{id}_{\mathbb{C}}$. Une application involutive est sa propre réciproque, donc $\boxed{c \text{ est bijective}}$.

2. D'une part $f(i)^2 = f(i^2)$ puisque f respecte le produit ; d'autre part $f(i^2) = f(-1) = -1$ puisque -1 est réel. Donc $f(i)^2 = -1$, c'est-à-dire $(f(i) - i)(f(i) + i) = 0$. Le corps $\mathbb{C}$ n'ayant pas de diviseur de zéro, $\boxed{f(i) = i \text{ ou } f(i) = -i}$.

3. Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $f(a + ib) = f(a) + f(i)f(b) = a + f(i)b$, car f respecte somme et produit et fixe les réels. Si $f(i) = i$, alors $f(a + ib) = a + ib$ et f est l'identité ; si $f(i) = -i$, alors $f(a + ib) = a - ib$ et $\boxed{f = c}$.

4. Le corps $\mathbb{C}$ possède donc $\boxed{\text{exactement deux}}$ telles symétries au-dessus de $\mathbb{R}$, tandis que $\mathbb{R}$ n'en possède qu'une, l'identité, puisque toute application fixant tous les réels est l'identité de $\mathbb{R}$.

COMMENTAIRES

Ce résultat dit que $\mathbb{C}$ ne peut pas être « retourné » autrement qu'en échangeant i et $-i$. Or ce choix est arbitraire : rien, dans la construction du cours, ne distingue $(0; 1)$ de $(0; -1)$. La conjugaison est la trace de cette indétermination fondamentale.

C'est le premier exemple de **groupe de Galois** que vous rencontrerez : celui de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$ a deux éléments.

EXERCICE 21 · APR-C1-21



Les nombres déployés

MÉTHODE Tout tient dans un calcul de deux lignes : trouver deux éléments non nuls de produit nul.

1. La formule $(ac + bd; ad + bc)$ est inchangée quand on échange les deux couples : $\odot$ est commutatif. L'associativité se vérifie en développant les deux côtés, qui donnent tous deux $(ace + adf + bcf + bde; acf + ade + bce + bdf)$. Enfin $(a; b) \odot (1; 0) = (a; b)$: le neutre est bien $(1; 0)$.

2. $j \odot j = (0; 1) \odot (0; 1) = (0 + 1; 0 + 0) = (1; 0)$, c'est-à-dire $j^2 = 1$ et non -1 .

3. $(1; 1) \odot (1; -1) = (1 - 1; -1 + 1) = (0; 0)$.

4. Deux éléments non nuls ont un produit nul : ce sont des **diviseurs de zéro**. Or dans un corps, si $xy = 0$ et $x \neq 0$, alors $y = x^{-1}(xy) = 0$. Donc **ce n'est pas un corps**, et $(1; 1)$ n'y est pas inversible.

COMMENTAIRES

Un seul signe a changé, et tout s'écroule. La différence tient à ce que $X^2 - 1$ se factorise sur $\mathbb{R}$, en $(X - 1)(X + 1)$, alors que $X^2 + 1$ ne s'y factorise pas. **C'est l'irréductibilité de $X^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$ qui fait de $\mathbb{C}$ un corps**, et rien d'autre.

EXERCICE 22 · APR-C1-22



Les nombres duaux, et la conclusion

RÉDACTION MODÈLE – LA SYNTHÈSE DES TROIS PRODUITS

1. La formule $(ac; ad + bc)$ est symétrique en les deux couples : $\otimes$ est commutatif. Pour l'associativité :

$$[(a; b) \otimes (c; d)] \otimes (e; f) = (ac; ad + bc) \otimes (e; f) = (ace; acf + (ad + bc)e),$$

tandis que

$$(a; b) \otimes [(c; d) \otimes (e; f)] = (a; b) \otimes (ce; cf + de) = (ace; a(cf + de) + bce).$$

Les deux valent $(ace; acf + ade + bce)$. Enfin $(a; b) \otimes (1; 0) = (a; 0 + b) = (a; b)$: le neutre est $(1; 0)$.

2. $\varepsilon \otimes \varepsilon = (0; 1) \otimes (0; 1) = (0; 0 + 0) = (0; 0)$, autrement dit $\varepsilon^2 = 0$.

3. L'élément $\varepsilon = (0; 1)$ est non nul. S'il était inversible, il existerait $(u; v)$ tel que $\varepsilon \otimes (u; v) = (1; 0)$. Or la première coordonnée de ce produit vaut $0 \times u = 0$, qui ne peut valoir 1. Donc ε **n'est pas inversible**, bien qu'il soit non nul.

4. Parmi les trois produits commutatifs, associatifs, distributifs et unitaires que l'on peut mettre sur $\mathbb{R}^2$ en prolongeant celui de $\mathbb{R}$, celui de $\mathbb{C}$ est donc **le seul** à en faire un corps : les déployés ont des diviseurs de zéro, les deux un élément non nul et non inversible.

Le produit du chapitre C1 n'a donc rien d'un choix parmi d'autres. Sous ces quatre hypothèses, c'est *l'unique* manière de faire du plan un corps, et c'est très exactement ce qu'affirmait le théorème d'unicité du cours.

COMMENTAIRES

Les quatre hypothèses de la question 4 comptent toutes. Le produit $(a; b) * (c; d) = (ac; 0)$ est commutatif, associatif et distributif, mais il n'admet aucun élément neutre, et il n'est aucun des trois. Une classification sans ses hypothèses est une phrase creuse.

Les trois algèbres correspondent aux trois façons dont X^2 peut se comporter modulo un trinôme réel : $j^2 = -1$, $j^2 = +1$, $j^2 = 0$. Les nombres deux ne sont pas une curiosité : $\varepsilon^2 = 0$ est exactement ce dont on a besoin pour dériver automatiquement, et ils sont utilisés en calcul formel.

EXERCICE 23 · APR-C1-23



Le corps $\mathbb{Q}(i)$

MÉTHODE Tout repose sur la formule de l'inverse : elle ne fait intervenir que des sommes, produits et quotients de rationnels.

1. Pour a, b, c, d rationnels, $(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$ et $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$: les coordonnées obtenues sont rationnelles, car $\mathbb{Q}$ est stable par somme, différence et produit.

2. Soit $z = a + ib$ non nul, avec a et b rationnels. Alors $a^2 + b^2$ est un rationnel non nul et

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i,$$

dont les deux coordonnées sont rationnelles : $\boxed{\frac{1}{z} \in \mathbb{Q}(i)}$.

3. Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{Q}$ et i . Étant stable par produit, K contient ib pour tout $b \in \mathbb{Q}$; étant stable par somme, il contient $a + ib$ pour tous a, b rationnels. Donc $\mathbb{Q}(i) \subset K$: $\mathbb{Q}(i)$ est bien **le plus petit** de ces sous-corps.

4. Supposons $\sqrt{2} = a + ib$ avec $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$. En élevant au carré : $2 = (a^2 - b^2) + 2abi$. Par unicité de la forme algébrique, $2ab = 0$ et $a^2 - b^2 = 2$.

Si $b = 0$, alors $\sqrt{2} = a \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit l'irrationalité de $\sqrt{2}$ démontrée en seconde.

Si $a = 0$, alors $-b^2 = 2$, impossible pour un réel b .

Les deux cas étant exclus, $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(i)}$.

COMMENTAIRES

$\mathbb{Q}(i)$ est donc strictement compris entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{C}$, et il en existe une infinité d'autres : $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, et ainsi de suite. La question de savoir quels nombres appartiennent à quelle **extension** est le point de départ de la théorie de Galois, celle-là même qui expliquera, un siècle après Cardan, pourquoi certaines équations résistent aux radicaux.

C'est aussi le vrai contenu du *casus irreducibilis* du cours : les racines de $x^3 = 6x + 2$ n'habitent aucune extension obtenue par radicaux réels.

V. SUR LES TRACES DE CARDAN

EXERCICE 24 · SYN-C1-24



Cardan sans détour

MÉTHODE Calculer Δ_C , en tirer u^3 et v^3 par somme et produit, puis remonter à $x = u + v$.

1. Ici $p = 9$ et $q = 28$, donc $\Delta_C = 14^2 - 3^3 = 196 - 27 = \boxed{169}$, strictement positif. Le théorème du cours est une *équivalence* : il affirme seulement que (H) **n'a pas** trois racines réelles distinctes. Il ne dit pas combien elle en a.

2. On cherche u et v tels que $u^3 + v^3 = 28$ et $u^3 v^3 = \left(\frac{9}{3}\right)^3 = 27$. Ce sont les racines de $T^2 - 28T + 27 = 0$, soit $T = 1$ et $T = 27$. En prenant les racines cubiques réelles, $u = 3$ et $v = 1$, d'où $\boxed{x = 4}$. Contrôle : $4^3 = 64 = 9 \times 4 + 28$.

3. $x^3 - 9x - 28 = (x - 4)(x^2 + 4x + 7)$, et le trinôme a pour discriminant $16 - 28 = -12$, d'où les deux autres racines $\boxed{-2 \pm i\sqrt{3}}$.

COMMENTAIRES

La question 1 est un exercice de **logique** déguisé : une équivalence ne se lit pas à l'envers sans précaution. Pour affirmer qu'il y a exactement une racine réelle, il faudrait refaire l'étude du signe de $f(-c)f(c)$ menée au cours.

La question 3, elle, le montre *a posteriori*.

EXERCICE 25 · SYN-C1-25



Cardan avec détour

RÉDACTION MODÈLE – LE GESTE DE BOMBELLI, LES DEUX CONDITIONS VÉRIFIÉES

1. Ici $p = 30$ et $q = 36$, donc

$$\Delta_C = \left(\frac{36}{2}\right)^2 - \left(\frac{30}{3}\right)^3 = 18^2 - 10^3 = 324 - 1000 = -676.$$

Il est strictement négatif : d'après le théorème du cours, (K) possède **trois racines réelles distinctes**. Et pourtant la formule va réclamer $\sqrt{-676}$.

2. En convenant que $\sqrt{-676} = 26i$, la méthode donne $u^3 = 18 + 26i$ et $v^3 = 18 - 26i$, de sorte que la formule réclame

$$x = \sqrt[3]{18 + 26i} + \sqrt[3]{18 - 26i}.$$

3. Calculons $(3 + i)^3$. D'abord $(3 + i)^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i$, puis

$$(3 + i)^3 = (8 + 6i)(3 + i) = 24 + 8i + 18i + 6i^2 = 18 + 26i.$$

Posons donc $u = 3 + i$ et $v = 3 - i$, et vérifions les **deux** conditions de la méthode.

Condition sur le produit : $uv = (3 + i)(3 - i) = 9 + 1 = 10$, donc $3uv = 30 = p$.

Condition sur la somme des cubes : $u^3 + v^3 = (18 + 26i) + (18 - 26i) = 36 = q$.

Les deux étant satisfaites, la clé s'applique et

$$x = u + v = (3 + i) + (3 - i) = \boxed{6},$$

ce que confirme $6^3 = 216 = 30 \times 6 + 36$.

4. $x^3 - 30x - 36 = (x - 6)(x^2 + 6x + 6)$, et le trinôme a pour discriminant $36 - 24 = 12 > 0$: les deux autres racines sont $\boxed{-3 \pm \sqrt{3}}$, réelles elles aussi. Les trois racines de (K) sont donc bien réelles et distinctes.

COMMENTAIRES

Vérifier les deux conditions n'est pas une formalité. La clé du cours n'autorise à conclure que si $3uv = p$ et $u^3 + v^3 = q$. Un couple qui ne satisfait que la seconde ne dit rien de l'équation : ainsi $u = 0$ et $v = \sqrt[3]{36}$ vérifient bien $u^3 + v^3 = 36 = q$, mais $3uv = 0 \neq 30$, et de fait $u + v = \sqrt[3]{36} \approx 3,302$ n'est pas racine de (K) .

Et voilà le scandale de Cardan reproduit à l'identique : les trois racines sont réelles, l'une est l'entier 6, et le seul chemin passe par $26i$.

EXERCICE 26 · SYN-C1-26

★★★★★ ☆

La solution de Viète

RÉDACTION MODÈLE – LA RÉDUCTION TRIGONOMETRIQUE

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, en écrivant $3\theta = 2\theta + \theta$ et en développant :

$$\cos(3\theta) = \cos(2\theta) \cos \theta - \sin(2\theta) \sin \theta = (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta.$$

En remplaçant $\sin^2 \theta$ par $1 - \cos^2 \theta$:

$$\cos(3\theta) = 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta + 2 \cos^3 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta.$$

2. Posons $x = 2c \cos \theta$ avec $c = \sqrt{\frac{p}{3}}$, de sorte que $p = 3c^2$. Alors

$$x^3 - px - q = 8c^3 \cos^3 \theta - 3c^2 \times 2c \cos \theta - q = 2c^3 (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) - q,$$

c'est-à-dire, d'après la question 1, $x^3 - px - q = 2c^3 \cos(3\theta) - q$. L'équation $x^3 = px + q$ équivaut donc à

$$\boxed{2c^3 \cos(3\theta) = q}$$

3. La condition $\Delta_C < 0$ s'écrit $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3 = c^6$, soit $\frac{q^2}{4} < c^6$, c'est-à-dire $|q| < 2c^3$. Ainsi $\left|\frac{q}{2c^3}\right| < 1$, et il existe bien un réel 3θ dont c'est le cosinus.

4. Pour (K) : $p = 30$ donne $c = \sqrt{10}$ et $2c^3 = 20\sqrt{10} \approx 63,246$. Alors $\cos(3\theta) = \frac{36}{63,246} \approx 0,56921$, d'où $3\theta \approx 0,96525$ et $\theta \approx 0,32175$. Enfin

$$x = 2\sqrt{10} \cos(0,32175) \approx 6,3246 \times 0,94868 = \boxed{6,000}$$

On retrouve la racine de l'exercice 25.

5. Aucune racine carrée de nombre négatif n'apparaît : la méthode n'emploie que le cosinus, l'arc cosinus et des réels. L'affirmation « le détournement est inévitable » doit donc s'entendre au sens strict du *casus irreducibilis* : ce qui est impossible, c'est d'écrire les racines au moyen d'une **formule à base de radicaux réels**. Ce n'est pas d'y accéder par des moyens réels.

COMMENTAIRES

C'est la nuance la plus importante du chapitre. Le *casus irreducibilis* interdit une certaine *forme d'écriture*, pas un résultat. Viète a publié sa solution vers 1593, deux siècles et demi avant que l'on sache pourquoi elle était nécessaire.

Détail rassurant : la paramétrisation $x = 2c \cos \theta$ n'oublie aucune racine. En posant $f(x) = x^3 - px - q$ avec $p = 3c^2$, un calcul direct donne

$$f(-2c) = f(c) = -(2c^3 + q) \quad \text{et} \quad f(-c) = f(2c) = 2c^3 - q.$$

Or $\Delta_C < 0$ équivaut à $|q| < 2c^3$, donc la première quantité est strictement négative et la seconde strictement positive. Le signe de f alterne ainsi en $-2c, -c, c, 2c$: le théorème des valeurs intermédiaires place une racine dans chacun des trois intervalles $]-2c; -c[$, $]-c; c[$ et $]c; 2c[$. Les trois sont donc dans $[-2c; 2c]$, c'est-à-dire atteintes par $2c \cos \theta$.

Et ici θ vaut exactement $\arctan \frac{1}{3}$, puisque $\cos \theta = \frac{6}{2\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

EXERCICE 27 · APR-C1-27



Ferrari et le quatrième degré

MÉTHODE Compléter le carré avec un paramètre libre, puis choisir ce paramètre pour que le reste soit lui aussi un carré.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x^2 + \lambda)^2 = x^4 + 2\lambda x^2 + \lambda^2$. Or (G) s'écrit $x^4 = -4x + 1$, donc

$$(x^2 + \lambda)^2 = 2\lambda x^2 - 4x + (1 + \lambda^2).$$

2. Le membre de droite est un trinôme en x , de discriminant $16 - 8\lambda(1 + \lambda^2)$. Il est un carré parfait si et seulement si ce discriminant est nul, soit $8\lambda^3 + 8\lambda - 16 = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\lambda^3 + \lambda - 2 = 0}$.

3. $\lambda = 1$ convient ($1 + 1 - 2 = 0$). Le membre de droite devient alors $2x^2 - 4x + 2 = 2(x - 1)^2$, d'où $\boxed{(x^2 + 1)^2 = 2(x - 1)^2}$.

4. L'équation équivaut à $x^2 + 1 = \pm\sqrt{2}(x - 1)$, soit deux trinômes :

— $x^2 + \sqrt{2}x + (1 - \sqrt{2}) = 0$, de discriminant $4\sqrt{2} - 2 > 0$: deux racines **réelles**,

$$\boxed{x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}} \quad \text{soit environ } 0,249 \text{ et } -1,663.$$

— $x^2 - \sqrt{2}x + (1 + \sqrt{2}) = 0$, de discriminant $2 - 4(1 + \sqrt{2}) = -2 - 4\sqrt{2} < 0$: deux racines **complexes conjuguées**,

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2 + 4\sqrt{2}}}{2}} \quad \text{soit environ } 0,707 \pm 1,384i.$$

L'équation (G) , de degré 4, a donc bien quatre racines dans $\mathbb{C}$: deux réelles et deux conjuguées.

COMMENTAIRES

Le quatrième degré se ramène au troisième, qui se ramène au second : c'est tout le programme de la Renaissance italienne, achevé par Ferrari vers 1540. La **résolvante** $\lambda^3 + \lambda - 2$ est la clé, et sa racine évidente est un cadeau de l'énoncé.

Trois siècles plus tard, Abel et Galois démontreront qu'on ne peut pas aller plus loin : le **cinquième degré** n'est pas résoluble par radicaux. La chaîne s'arrête à Ferrari.

VI. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 28 · APR-C1-28

★★★★★ ☆ ⌚

Les entiers de Gauss

MÉTHODE La norme transforme une question multiplicative sur $\mathbb{Z}[i]$ en une question sur les entiers naturels.

1. Pour a, b, c, d entiers, $(a + ib) + (c + id)$ et $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$ ont des coordonnées entières : $\mathbb{Z}[i]$ est stable par somme et par produit.
2. $N(zz') = (zz')\overline{(zz')} = z\bar{z}z'\bar{z}' = N(z)N(z')$. Écrite en coordonnées, cette égalité est l'identité de Diophante de l'exercice 19.
3. Si z est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$, il existe $w \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $zw = 1$. En prenant les normes, $N(z)N(w) = N(1) = 1$. Or $N(z)$ et $N(w)$ sont des entiers naturels, donc $N(z) = 1$.
4. $N(z) = 1$ s'écrit $a^2 + b^2 = 1$ avec a et b entiers, ce qui impose $(a; b) \in \{(1; 0), (-1; 0), (0; 1), (0; -1)\}$. Réciproquement ces quatre nombres sont inversibles, d'inverses respectifs $1, -1, -i$ et i :

les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont $1, -1, i, -i$

COMMENTAIRES

Le passage à la norme est le geste à retenir : il transporte une question sur $\mathbb{Z}[i]$, où l'on ne sait presque rien, vers $\mathbb{N}$, où l'on sait tout. C'est exactement ainsi que l'on démontre que $\mathbb{Z}[i]$ possède une division euclidienne, donc un algorithme d'Euclide, donc un théorème de Bézout.

Comparez avec $\mathbb{Z}$, dont les seuls inversibles sont 1 et -1 : passer aux entiers de Gauss double le nombre d'unités, et c'est pourquoi les factorisations y sont uniques « à une unité près », cette unité pouvant prendre quatre valeurs au lieu de deux.

EXERCICE 29 · APR-C1-29

★★★★★ ☆ ⌚

La suite $z_{n+1} = az_n + b$

MÉTHODE Le point fixe transforme une suite arithmético-géométrique en une suite géométrique : c'est le réflexe de première, transposé à $\mathbb{C}$.

1. $\omega = a\omega + b$ équivaut à $\omega(1 - a) = b$, et comme $a \neq 1$ le facteur $1 - a$ est non nul : $\omega = \frac{b}{1 - a}$, unique.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} - \omega = (az_n + b) - (a\omega + b) = a(z_n - \omega)$. La suite $(z_n - \omega)$ est donc géométrique de raison a , d'où $z_n - \omega = a^n(z_0 - \omega)$.

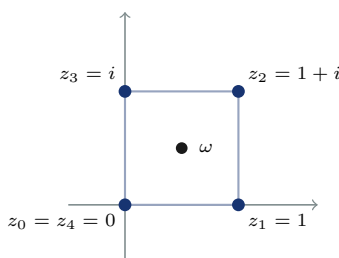
3. Avec $a = i$, $b = 1$ et $z_0 = 0$: $\omega = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$, et $z_n = \omega(1 - i^n)$. Donc

$$z_1 = \omega(1 - i) = 1, \quad z_2 = 2\omega = 1 + i, \quad z_3 = \omega(1 + i) = i, \quad z_4 = 0.$$

4. La suite est **périodique de période 4**, et les points obtenus sont les quatre sommets d'un carré :

$$\boxed{0, \quad 1, \quad 1+i, \quad i}$$

dont $\omega = \frac{1+i}{2}$ est le centre.



COMMENTAIRES

Le point fixe est le centre de la figure : ce n'est pas un hasard. Multiplier par i étant un quart de tour, la relation $z_{n+1} - \omega = i(z_n - \omega)$ dit exactement que l'on tourne d'un quart de tour **autour de** ω à chaque étape, ce qui ramène au point de départ en quatre coups.

C'est le premier exemple de **similitude** du cours, et le chapitre C2 en fera la théorie complète.

EXERCICE 30 · APR-C1-30



Un produit étonnamment réel

MÉTHODE Calculer, s'étonner, puis chercher la raison du côté des angles.

1. $(1+i)(1+2i) = -1+3i$, puis $(-1+3i)(1+3i) = -1-9 = \boxed{-10}$. Trois facteurs franchement complexes, et un produit **réel**, qui plus est négatif.

2. $(2+i)(3+i) = 6+2i+3i-1 = 5+5i = \boxed{5(1+i)}$.

3. Les angles de $1+i$, $1+2i$ et $1+3i$ sont respectivement $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $\arctan 2$ et $\arctan 3$. Le produit vaut -10 , réel strictement négatif, donc d'angle π . En ajoutant les angles, la somme des trois vaut π à un tour près. Or chacune des trois arctangentes appartient à $]0; \frac{\pi}{2}[$, donc leur somme appartient à $]0; \frac{3\pi}{2}[$: le seul réel de cet intervalle congru à π modulo 2π est π lui-même. D'où

$$\boxed{\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi}$$

4. De même, $2+i$ a pour angle $\arctan \frac{1}{2}$ et $3+i$ pour angle $\arctan \frac{1}{3}$, tandis que $5(1+i)$ a pour angle $\frac{\pi}{4}$. La somme des deux vaut donc $\frac{\pi}{4}$ à un tour près ; elle appartient à $]0; \pi[$, ce qui ne laisse qu'une possibilité :

$$\boxed{\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}}$$

COMMENTAIRES

Une identité trigonométrique démontrée par une multiplication d'entiers. C'est le mécanisme des *formules de Machin*, qui ont servi pendant trois siècles à calculer les décimales de π : Machin obtient en 1706 une centaine de décimales à partir de $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$. Son record tombera dès 1719 devant de Lagny, mais c'est *sa méthode* qui servira jusqu'aux premiers ordinateurs.

Retenez le procédé : **une égalité entre complexes est deux égalités réelles**, l'une sur les longueurs, l'autre sur les angles. C'est tout le programme du chapitre C2.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les prolongements des exercices 21 et 22 sur les autres façons de multiplier le plan, le récit complet du duel de 1548, et les formules de Machin : sur le compagnon numérique du chapitre.