



# CORRIGÉ • F1. LIMITES DE FONCTIONS ET CONTINUITÉ

Corrigé des trente exercices, feuille en main

RÉDACTION MODÈLE : la copie idéale, à imiter • MÉTHODE : la stratégie en une ligne, puis le calcul • COMMENTAIRES : ce que la solution enseigne

## I. LIRE L'INFINI

EXERCICE 1 • APL-F1-01



### Trois courbes au rapport

MÉTHODE Une asymptote se lit avec son équation complète : la nature (horizontale, verticale, oblique) ne suffit pas.

**Courbe (a).**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  : la droite d'équation  $x = 0$  est asymptote verticale.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$  : la droite d'équation  $y = 3$  (lue sur la graduation) est asymptote horizontale.

**Courbe (b).**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$  : asymptote horizontale d'équation  $y = -1$ , des deux côtés.  
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$  : asymptote verticale d'équation  $x = -1$ .

**Courbe (c).**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  : asymptote verticale d'équation  $x = 0$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , et la courbe longe la droite en pointillés, qui passe par les points (1 ; 0) et (3 ; 2) du quadrillage : asymptote oblique d'équation  $y = x - 1$ .

#### COMMENTAIRES

Une limite infinie en  $+\infty$  n'est **jamais** une asymptote à elle seule : c'est l'écart avec une droite qui doit tendre vers 0. La courbe (c) illustre les deux régimes en un seul dessin.

## Valeurs interdites, deux versants

## RÉDACTION MODÈLE – LIMITES DE PART ET D'AUTRE D'UNE VALEUR INTERDITE

1. Étudions séparément le numérateur et le dénominateur au voisinage de 2. D'une part,  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 1 > 0$ . D'autre part,  $x - 2 < 0$  pour  $x < 2$  et  $x - 2 > 0$  pour  $x > 2$ , avec  $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$ .

Le quotient d'une quantité tendant vers 1 par une quantité tendant vers 0 en restant strictement négative tend vers  $-\infty$ . Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty.$$

De même, le quotient d'une quantité tendant vers 1 par une quantité tendant vers 0 en restant strictement positive tend vers  $+\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$

2. Pour tout  $x \neq 2$  avec  $x \neq 0$ ,  $f(x) = \frac{3 - \frac{5}{x}}{1 - \frac{2}{x}}$  ; les termes en  $\frac{1}{x}$  tendent vers 0 en  $\pm\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ .

3. Asymptote verticale  $x = 2$  (limites infinies de signes opposés), asymptote horizontale  $y = 3$  des deux côtés. L'allure est celle d'une hyperbole centrée au point  $(2; 3)$ .

4. L'identité se vérifie en réduisant au même dénominateur : pour tout  $x \neq -1$ ,  $(2x - 2)(x + 1) + 2 = 2x^2 - 2 + 2 = 2x^2$ . En  $-1$  : le numérateur  $2x^2$  tend vers  $2 > 0$  et le dénominateur  $x + 1$  tend vers 0 en changeant de signe, donc  $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = +\infty$  : asymptote verticale  $x = -1$ . En  $\pm\infty$ ,  $g(x) - (2x - 2) = \frac{2}{x + 1} \rightarrow 0$  : asymptote **oblique** d'équation  $y = 2x - 2$ , et  $g$  tend vers  $\pm\infty$  en  $\pm\infty$ .

## Le tribunal des asymptotes

| N° | VERDICT | JUSTIFICATION                                                                                                                                                                                      |
|----|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | FAUX    | Contre-exemple : $f$ définie pour $x > 0$ par $f(x) = 2 + \frac{\sin x}{x}$ tend vers 2 et coupe la droite $y = 2$ en chaque multiple de $\pi$ : une infinité de fois.                             |
| 2  | FAUX    | Contre-exemple : $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ pour $x \neq 3$ , <b>prolongée par</b> $f(3) = 0$ . La fonction est définie en 3 et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ tout de même.              |
| 3  | VRAI    | Témoin : $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$ , $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ , qui tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$ : deux asymptotes horizontales distinctes. |
| 4  | FAUX    | Contre-exemple : $f(x) = x$ tend vers $+\infty$ sans aucune asymptote verticale (elle est définie et continue sur $\mathbb{R}$ ).                                                                  |
| 5  | VRAI    | $f(x) - (x + 5) = (f(x) - x) - 5 \rightarrow 5 - 5 = 0$ : c'est exactement la définition de l'asymptote oblique.                                                                                   |

## COMMENTAIRES

L'item 2 est le plus subtil : l'asymptote verticale est une affaire de **limite**, pas de domaine. On peut toujours décréter une valeur en un point, cela ne change aucune limite. Et l'item 1 enterre une légende tenace : « s'approcher sans jamais toucher » n'est pas la définition, la courbe a le droit de traverser autant qu'elle veut.

## II. L'ALGÈBRE DES LIMITES

EXERCICE 4 · APL-F1-04



### Opérations sans piège

MÉTHODE Aucune forme indéterminée ici : chaque limite suit d'un théorème d'opération, qu'on cite.

1. Somme :  $x^3 \rightarrow +\infty$  et  $\frac{5}{x} \rightarrow 0$ , donc  $+\infty$ . 2. Produit :  $2 - x \rightarrow +\infty$  et  $1 + x^2 \rightarrow +\infty$ , donc  $+\infty$ . 3. Quotient :  $x + 3 \rightarrow 3 > 0$  et  $x^2 \rightarrow 0^+$ , donc  $+\infty$ . 4. Quotient :  $-2$  est constant et  $\sqrt{x} + 1 \rightarrow +\infty$ , donc  $0$ . 5. Quotient de limites finies :  $\frac{1+1}{1+3} = \frac{1}{2}$ . 6. Composée :  $x^2 + 1 \rightarrow +\infty$  et  $\sqrt{X} \rightarrow +\infty$  quand  $X \rightarrow +\infty$ , donc  $+\infty$ .

EXERCICE 5 · APL-F1-05



### Le terme qui commande

1. En factorisant par le terme dominant :  $-2x^3 + 5x^2 - 7$  se comporte comme  $-2x^3$ , d'où  $-\infty$  en  $+\infty$  et  $+\infty$  en  $-\infty$ . Pour le quotient, en factorisant haut et bas par  $x^2$  :  $\frac{5x^2 - 1}{2x^2 + x + 1} \rightarrow \frac{5}{2}$  en  $\pm\infty$ .
2. En  $+\infty$ , quotient de termes dominants  $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ . En  $3^+$  : le numérateur tend vers  $7 > 0$  ; le dénominateur  $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$  tend vers  $0$  en restant strictement positif (produit de deux facteurs strictement positifs pour  $x > 3$ ). Le quotient tend donc vers  $+\infty$ .
3. Pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{9x^2 + 1}{x^2 + x} \rightarrow 9$  (factorisation par  $x^2$ ). Par le théorème de la limite d'une composée, appliqué avec  $u(x) = \frac{9x^2 + 1}{x^2 + x} \rightarrow 9$  et  $v(X) = \sqrt{X} \rightarrow 3$  quand  $X \rightarrow 9$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{9x^2 + 1}{x^2 + x}} = 3$ .

EXERCICE 6 · APL-F1-06



### Conjuguées en régime soutenu

1.  $\forall x \geq 0$ ,  $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = \frac{5}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x}} \rightarrow 0$  (dénominateur vers  $+\infty$ ).

RÉDACTION MODÈLE – LA QUANTITÉ CONJUGUÉE, PUIS FACTORISER PAR  $x$

2. La forme est indéterminée ( $\infty - \infty$ ). Multiplions et divisons par la quantité conjuguée, qui ne s'annule pas pour  $x > 0$  :

$$\forall x > 0, \quad \sqrt{4x^2 + x} - 2x = \frac{(4x^2 + x) - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x} = \frac{x}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x}.$$

Pour  $x > 0$ ,  $\sqrt{4x^2 + x} = x\sqrt{4 + \frac{1}{x}}$ , donc en factorisant le dénominateur par  $x > 0$  :

$$\forall x > 0, \quad \sqrt{4x^2 + x} - 2x = \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2}.$$

Comme  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ , la composée par la racine donne  $\sqrt{4 + \frac{1}{x}} \rightarrow 2$ , et le quotient tend vers  $\frac{1}{2+2}$ .  
Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{4x^2 + x} - 2x \right) = \frac{1}{4}$$

3. Même méthode avec  $\sqrt{A} - B$  où  $B = x + 1$  : pour  $x > 1$ ,

$$\sqrt{x^2 + 3x} - (x + 1) = \frac{x^2 + 3x - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x + 1} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3x} + x + 1} = \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1 + \frac{1}{x}} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

4.  $\forall x \in ]-1; 0] \cup ]0; +\infty[$ ,  $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$  quand  $x \rightarrow 0$ .

#### COMMENTAIRES

Le réflexe : la conjuguée fait disparaître les radicaux du **numérateur**, puis la factorisation par  $x$  solde l'indétermination restante. En 4, aucune limite infinie : la conjuguée sert aussi près d'un point fini.

EXERCICE 7 · APR-F1-07



## Les radicaux emboîtés

1. Les deux termes tendent vers  $+\infty$  : forme  $\infty - \infty$ . Le pari raisonnable, au vu de l'exercice précédent (question 1 : limite nulle ; question 2 : limite  $\frac{1}{4}$ ), est une limite finie.

2. En multipliant par la quantité conjuguée (strictement positive pour  $x > 0$ ), le numérateur devient  $(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}) - x = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ , d'où l'expression annoncée.

3. Factorisons par  $\sqrt{x}$  : pour tout  $x > 0$ ,

$$\frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}} + 1}.$$

Or  $\frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}} \rightarrow 0$ , donc le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) = \frac{1}{2}$$

4. ★ La limite vaut encore  $\frac{1}{2}$  : le radical supplémentaire vit tout au fond de la tour, et sa contribution est écrasée par les mêmes factorisations. Plus généralement, pour toute tour finie  $\sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ , la conjuguée donne un numérateur  $\sqrt{x + (\text{tour plus courte})} \sim \sqrt{x}$  et un dénominateur  $\sim 2\sqrt{x}$  : limite  $\frac{1}{2}$  pour toutes les hauteurs.

## III. ENCADRER ET LONGER

EXERCICE 8 · APL-F1-08



## Gendarmes en patrouille

## RÉDACTION MODÈLE – RÉDIGER UN ENCADREMENT

1. Pour tout  $x > 0$ , on a  $-1 \leq \sin x \leq 1$ , donc  $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$ , et, en divisant par  $x > 0$  (l'inégalité est conservée) :

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x} \leq \frac{2 + \sin x}{x} \leq \frac{3}{x}.$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$  : les deux encadrants ont la même limite finie. Par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x} = 0$$

2.  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $x + 3 \cos x \geq x - 3$ , et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3) = +\infty$  : par le théorème de comparaison,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3 \cos x) = +\infty$ .

3.  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $-\frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{\cos(5x)}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2 + 1}$ , et les encadrants tendent vers 0 en  $-\infty$  : gendarmes, limite 0.

4. Pour tout  $x > 1$  :  $x + \sin x \leq x + 1$  et  $x - \sin x \geq x - 1 > 0$ , d'où  $\frac{x + \sin x}{x - \sin x} \leq \frac{x + 1}{x - 1}$  ; de même  $\frac{x + \sin x}{x - \sin x} \geq \frac{x - 1}{x + 1}$ . En factorisant par  $x$ , les deux encadrants tendent vers 1 : par les gendarmes,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = 1$ .

EXERCICE 9 · SYN-F1-09



## La famille à un paramètre

MÉTHODE En  $-\infty$ , c'est l'exponentielle qui commande ; en  $+\infty$ , elle s'efface : la même famille change deux fois de patron.

1. Écrivons, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_k(x) = k e^{-x} + (x - 2)$ . En  $-\infty$ , posons  $X = -x \rightarrow +\infty$  :  $(x - 2) = -(X + 2)$  et  $k e^{-x} = k e^X$ , donc  $f_k(x) = e^X (k - \frac{X+2}{e^X})$ . Par croissances comparées,  $\frac{X+2}{e^X} \rightarrow 0$ , donc la parenthèse tend vers  $k$  : si  $k > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = +\infty$  ; si  $k < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = -\infty$  ; si  $k = 0$ ,  $f_0$  est affine et tend vers  $-\infty$ .

2.  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f_k(x) - (x - 2) = k e^{-x} \rightarrow 0$  en  $+\infty$  : la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x - 2$  est asymptote oblique à toutes les courbes  $\mathcal{C}_k$ .

3. Le signe de l'écart  $k e^{-x}$  est celui de  $k$  (l'exponentielle est strictement positive) :  $\mathcal{C}_k$  est au-dessus de  $\Delta$  si  $k > 0$ , en dessous si  $k < 0$ , pour tout  $x$ .

4.  $\mathcal{C}_0$  est la droite  $\Delta$ . Le tracé attendu :  $\Delta$ , la courbe  $\mathcal{C}_1$  au-dessus (passant par  $(0; -1)$ ), la courbe  $\mathcal{C}_{-2}$  en dessous (passant par  $(0; -4)$ ), toutes deux collées à  $\Delta$  vers la droite et happées par l'exponentielle vers la gauche.

## Borné contre explosif

1.  $\forall x \geq 0, x^2 + f(x) \geq x^2 + 1 \rightarrow +\infty$  : comparaison, limite  $+\infty$ . Et pour  $x > 0$  :  $\frac{1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{3}{x}$ , gendarmes, limite 0.
2.  $\forall x \geq 0, xf(x) \geq x \rightarrow +\infty$  : comparaison, limite  $+\infty$ . Le théorème du produit ne s'appliquait pas directement : il exige que *chaque* facteur ait une limite, or rien ne garantit que  $f$  en ait une.
3. Non. Témoin :  $f$  définie par  $\forall x \geq 0, f(x) = 2 + \sin x$ , qui vérifie bien  $1 \leq f(x) \leq 3$  et n'a pas de limite en  $+\infty$  (elle repasse une infinité de fois par 1 et par 3).
4. ★ Soit  $\delta > 0$  et  $A$  tel que  $\forall x \geq A, f(x) \geq 1 + \delta$ . Pour  $x \geq \max(A, 1)$ , la croissance des puissances donne  $(f(x))^x \geq (1 + \delta)^x \geq (1 + \delta)^{\lfloor x \rfloor}$ , et l'inégalité de Bernoulli (chapitre A0), appliquée à l'entier  $\lfloor x \rfloor$ , donne  $(1 + \delta)^{\lfloor x \rfloor} \geq 1 + \lfloor x \rfloor \delta \geq 1 + (x - 1)\delta$ . Or  $1 + (x - 1)\delta \rightarrow +\infty$  : par comparaison,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^x = +\infty$ .

## IV. LES CROISSANCES COMPARÉES

## La batterie de duels

**MÉTHODE** Un seul théorème arbitre tout : à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance.

1.  $+\infty$  (croissances comparées,  $n = 5$ ).
2.  $\frac{x^2 + 1}{e^x} = \frac{x^2}{e^x} + \frac{1}{e^x} \rightarrow 0$ .
3. 0 (croissances comparées en  $-\infty$ ,  $n = 4$ ).
4.  $e^x - 10x^3 = e^x \left(1 - 10 \frac{x^3}{e^x}\right) \rightarrow +\infty$  (la parenthèse tend vers 1).
5. En divisant haut et bas par  $e^x$  :  $\frac{1 + x/e^x}{1 - x/e^x} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$ .
6.  $x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} \rightarrow 0$ .

## La ROC prolongée

1.  $\psi$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme différence de la fonction exponentielle et d'une fonction polynôme, et :  $\forall x \geq 0, \psi'(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ .

### RÉDACTION MODÈLE – LA FONCTION AUXILIAIRE DES CROISSANCES COMPARÉES

2. D'après l'inégalité établie au cours :  $\forall x \geq 0, e^x > \frac{x^2}{2}$ , c'est-à-dire  $\psi'(x) > 0$ . La fonction  $\psi$  est donc strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ . Comme  $\psi(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$ , la croissance donne :  $\forall x \geq 0, \psi(x) \geq \psi(0) > 0$ , c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall x \geq 0, e^x > \frac{x^3}{6}}$$

3. En divisant par  $x^2 > 0$  :  $\forall x > 0, \frac{e^x}{x^2} > \frac{x}{6}$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{6} = +\infty$ , le théorème de comparaison donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

4. Chaque étage fabrique le suivant : l'inégalité  $e^x > \frac{x^n}{n!}$  sert de signe de dérivée à la fonction auxiliaire  $x \mapsto e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ , qui livre l'inégalité de l'étage  $n+1$ , donc la limite  $\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

#### COMMENTAIRES

C'est une récurrence déguisée en escalier : la **conclusion** d'un étage devient l'**outil** de l'étage suivant. La preuve du cours ( $n = 1$ ) contenait déjà tout le mécanisme.

#### EXERCICE 13 · SYN-F1-13



### Portrait asymptotique de $x^2 e^{-x}$

1. En  $+\infty$  :  $f(x) = \frac{x^2}{e^x} \rightarrow 0$  (croissances comparées) : la droite  $y = 0$  est asymptote horizontale en  $+\infty$ .  
En  $-\infty$  :  $x^2 \rightarrow +\infty$  et  $e^{-x} \rightarrow +\infty$ , produit  $+\infty$  (aucune indétermination).

2.  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0$ , avec égalité uniquement en  $x = 0$  : la courbe ne **traverse** jamais son asymptote, elle reste au-dessus (et la rencontre une seule fois, en  $x = 0$ , loin du régime asymptotique).

3. Comparons par quotients, pour  $x > 0$  :  $\frac{x^2 e^{-x}}{x^{10} e^{-x}} = \frac{1}{x^8} \rightarrow 0$ , donc  $x^2 e^{-x}$  s'écrase plus vite que  $x^{10} e^{-x}$  ; et  $\frac{x^{10} e^{-x}}{e^{-x/2}} = \frac{x^{10}}{e^{x/2}} \rightarrow 0$  (croissances comparées après substitution), donc  $x^{10} e^{-x}$  s'écrase plus vite que  $e^{-x/2}$ .  
Classement, du plus rapide au plus lent vers 0 :

$$x^2 e^{-x}, \quad x^{10} e^{-x}, \quad e^{-x/2}.$$

4. ★ Pour tout  $a > 0$ , posons  $X = ax \rightarrow +\infty$  :  $x^2 e^{-ax} = \frac{1}{a^2} \frac{X^2}{e^X} \rightarrow 0$ . La limite est nulle pour **tout**  $a > 0$  : seul compte le signe de  $a$ , pas sa taille. Même argument pour  $x^n e^{-ax}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## V. CONTINUITÉ ET TVI

#### EXERCICE 14 · APL-F1-14



### L'art du raccord

**MÉTHODE** Rendre continue en un point, c'est faire coïncider la valeur avec la limite.

1. Pour  $x \neq 1$ ,  $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ . La fonction  $f$  est continue en 1 si et seulement si  $f(1) = 2$  :  $\boxed{a = 2}$ .

2. Par la quantité conjuguée : pour  $x \neq 1$  (et  $x \geq -3$ ),  $g(x) = \frac{(x+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \rightarrow \frac{1}{4}$

quand  $x \rightarrow 1$ . Donc  $\boxed{b = \frac{1}{4}}$ .

3. Sur  $]-\infty; 2[$  et sur  $[2; +\infty[$ ,  $h$  coïncide avec des fonctions polynômes : elle y est continue. Reste le raccord en 2 :  $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = 2 + m$  et  $h(2) = 4 - 6 + 5 = 3$ . La continuité sur  $\mathbb{R}$  équivaut à  $2 + m = 3$  :

$$\boxed{m = 1}.$$

## Compter les solutions sans calculer

1. Sur chacun des trois intervalles  $[-4; -1]$ ,  $[-1; 2]$ ,  $[2; 5]$ , la fonction est continue et strictement monotone, et 0 est compris entre les valeurs aux bornes ( $-2 < 0 < 3$ , puis  $-5 < 0 < 3$ , puis  $-5 < 0 < 4$ ) : le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires donne une solution **unique** par intervalle. Au total : trois solutions.

2. Pour  $k = 3,5$  : sur  $[-4; -1]$  et  $[-1; 2]$ , toutes les valeurs de  $f$  sont majorées par  $3 < 3,5$  : aucune solution ; sur  $[2; 5]$ ,  $-5 < 3,5 < 4$  : une unique solution. Total : **une** solution. Pour  $k = -6$  : toutes les valeurs de  $f$  sont dans  $[-5; 4]$ , et  $-6 < -5$  : **aucune** solution.

3. Les solutions de  $f(x) = 0$  vivent respectivement dans  $] -4; -1[$ ,  $] -1; 2[$  et  $] 2; 5[$  (les bornes sont exclues car  $f$  n'y vaut jamais 0).

## Le tribunal de la continuité

| N° | VERDICT     | JUSTIFICATION                                                                                                                                                                  |
|----|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | <b>VRAI</b> | Théorème du cours : dérivable en tout point entraîne continue en tout point.                                                                                                   |
| 2  | <b>FAUX</b> | Contre-exemple : $x \mapsto  x $ , continue sur $\mathbb{R}$ mais non dérivable en 0 (pentes $-1$ et $+1$ ).                                                                   |
| 3  | <b>VRAI</b> | Par l'absurde : si $f$ prenait une valeur strictement négative et une strictement positive, le TVI (hypothèse de continuité vérifiée) fournirait un zéro, exclu par hypothèse. |
| 4  | <b>FAUX</b> | Sans continuité, rien n'oblige à traverser : la fonction en escalier valant $-1$ sur $[0; 0,5]$ et $1$ ensuite vérifie $f(0) < 0 < f(1)$ et ne s'annule jamais.                |
| 5  | <b>FAUX</b> | Contre-exemple : $f(x) = (x - 0,3)(x - 0,7)$ , continue, avec $f(0) = f(1) = 0,21 > 0$ , donc $f(0) \cdot f(1) > 0$ , et pourtant $f$ s'annule en $0,3$ et $0,7$ .             |

### COMMENTAIRES

Le TVI est une implication à sens unique : signes contraires aux bornes  $\Rightarrow$  zéro (item 3, via la contraposée), mais signes égaux n'interdisent **rien** (item 5 : la courbe peut plonger et remonter). L'item 4 rappelle que la continuité n'est pas décorative : c'est elle qui interdit de sauter.

## L'équation $g(x) = 0$ , de bout en bout

1.  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (polynôme) et  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ . D'où le tableau, avec  $g(-1) = -1$  et  $g(1) = -5$  :

|         |           |      |      |           |
|---------|-----------|------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$  | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | +         | 0    | 0    | +         |
| $g$     | $-\infty$ | $-1$ | $-5$ | $+\infty$ |

2.  $g(-1) = -1 + 3 - 3 = -1 < 0$ . Sur  $] -\infty; 1]$ , le maximum de  $g$  vaut  $g(-1) = -1 < 0$  (lu au tableau) :  $g$  y est strictement négative, donc ne s'y annule pas.

### RÉDACTION MODÈLE – LE COROLLAIRE DU TVI, TOUTES HYPOTHÈSES CITÉES

3. Sur  $[1; +\infty[$ , la fonction  $g$  est **continue** (car polynomiale) et **strictement croissante** (tableau de la question 1). De plus  $g(1) = -5 < 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ . Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, étendu à l'intervalle  $[1; +\infty[$  en remplaçant la valeur à la borne infinie par la limite, l'équation  $g(x) = 0$  admet une **unique** solution  $\alpha$  dans  $]1; +\infty[$ .

Comme  $g$  ne s'annule pas sur  $] -\infty; 1]$  (question 2),  $\alpha$  est l'unique solution dans  $\mathbb{R}$ . Enfin  $g(2) = 8 - 6 - 3 = -1 < 0$  et  $g(3) = 27 - 9 - 3 = 15 > 0$  : la stricte croissance localise

$$\alpha \in ]2; 3[$$

4.  $g(2,1) = 9,261 - 6,3 - 3 = -0,039 < 0$  et  $g(2,2) = 10,648 - 6,6 - 3 = 1,048 > 0$ , donc  $\alpha \in ]2,1; 2,2[$  : encadrement d'amplitude 0,1.

## La dichotomie, chronomètre en main

1.  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (polynôme),  $h(1) = -3 < 0$  et  $h(2) = 7 > 0$  : le TVI fournit au moins une racine dans  $]1; 2[$ . De plus  $\forall x \in [1; 2], h'(x) = 3x^2 + 2x > 0$  :  $h$  est strictement croissante sur  $[1; 2]$ , la racine  $\beta$  y est unique.

2. Trois coups de ciseau (signes calculés) :  $h(1,5) = 0,625 > 0$  donc  $\beta \in ]1; 1,5[$ ;  $h(1,25) \approx -1,48 < 0$  donc  $\beta \in ]1,25; 1,5[$ ;  $h(1,375) \approx -0,51 < 0$  donc  $\beta \in ]1,375; 1,5[$ .

3. Après  $k$  étapes, la longueur vaut  $\frac{1}{2^k}$  (division par deux à chaque coup). On veut  $\frac{1}{2^k} < 10^{-9}$ , c'est-à-dire  $2^k > 10^9$  : comme  $2^{29} \approx 5,4 \times 10^8$  et  $2^{30} \approx 1,07 \times 10^9$ , il faut  $k = 30$  étapes.

4. ★ Jamais : à toute étape, l'intervalle contient une infinité de rationnels et d'irrationnels ; aucune mesure de longueur finie ne peut trancher la nature arithmétique de  $\beta$ . L'approximation localise, elle ne *qualifie* pas : l'irrationalité est un énoncé à démontrer, pas à mesurer.

## VI. LES SUITES RÉCURRENTES

EXERCICE 19 · APL-F1-19



## Escalier ou toile ?

1. Lecture sur le quadrillage (pas 0,5) :  $u_1 = 1$  et  $u_2 = 1,5$ . La suite semble croissante, et les marches se resserrent vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de la droite  $y = x$  : le point fixe, d'abscisse 2.
2. La suite saute de part et d'autre du point fixe en s'éloignant à chaque étape : le point fixe **repousse**.
3. La fonction  $f$ , croissante et de pente douce, produit l'escalier : c'est le diagramme (A), et son point fixe résout  $\frac{x+2}{2} = x$ , soit  $x = 2$ . La fonction  $g$ , de pente  $-1,6$ , produit la toile divergente : diagramme (B), point fixe  $3,2 - 1,6x = x$ , soit  $x = \frac{16}{13}$ . Le verdict est dans le coefficient directeur :  $|\frac{1}{2}| < 1$  attire (et le signe  $+$  fait un escalier),  $|-1,6| > 1$  repousse (et le signe  $-$  fait une spirale).

EXERCICE 20 · SYN-F1-20



## Le point fixe double

1. Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 3$ . **Initialisation** :  $u_0 = 1 < 3$ .  
**Hérédité** : supposons  $u_n < 3$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $6 - u_n > 3 > 0$  (la suite est bien définie et  $u_n \neq 6$ ), donc  $u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n} < \frac{9}{3} = 3$ .  
**Conclusion** : par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 3$ .
2. La fonction  $x \mapsto \frac{9}{6 - x}$  est continue sur  $] -\infty ; 6[$ , intervalle qui contient tous les  $u_n$  et le candidat limite. Si  $u_n \rightarrow \ell$  avec  $\ell < 6$ , le théorème du point fixe donne  $\ell = \frac{9}{6 - \ell}$ , soit  $\ell^2 - 6\ell + 9 = 0$ , c'est-à-dire  $(\ell - 3)^2 = 0$  : le point fixe  $\ell = 3$  est **double** (racine double du trinôme).

## RÉDACTION MODÈLE – LA SUITE AUXILIAIRE D'UN POINT FIXE DOUBLE

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n < 3$  donc  $u_n - 3 \neq 0$  et  $v_n$  est bien défini. Calculons, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} - 3 = \frac{9}{6 - u_n} - 3 = \frac{9 - 18 + 3u_n}{6 - u_n} = \frac{3(u_n - 3)}{6 - u_n},$$

d'où, en passant à l'inverse (aucun facteur nul) :

$$v_{n+1} = \frac{6 - u_n}{3(u_n - 3)} = \frac{3 - (u_n - 3)}{3(u_n - 3)} = \frac{1}{u_n - 3} - \frac{1}{3} = v_n - \frac{1}{3}.$$

Ainsi  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3}$  : la suite  $(v_n)$  est **arithmétique** de raison  $-\frac{1}{3}$ , de premier terme  $v_0 = \frac{1}{1 - 3} = -\frac{1}{2}$ .

4.  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -\frac{1}{2} - \frac{n}{3} = -\frac{3 + 2n}{6}$ , d'où  $u_n = 3 + \frac{1}{v_n} = 3 - \frac{6}{3 + 2n}$ , et  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3}$ . La convergence est **lente** : l'écart  $\frac{6}{3 + 2n}$  décroît comme  $\frac{3}{n}$ . Une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  partant du même écart 2 serait à  $2 \cdot \frac{1}{16} = 0,125$  de sa limite au rang 4, quand  $u_4 = \frac{27}{11} \approx 2,45$  en est encore à 0,55.

## COMMENTAIRES

Au point fixe double, la pente de l'itération vaut exactement 1 : l'aimant est à sa limite de puissance, et la convergence dégénère du régime géométrique au régime en  $\frac{1}{n}$ . La suite auxiliaire **mesure** ce phénomène au lieu de le subir.

## EXERCICE 21 · SYN-F1-21



## Deux points fixes en compétition

1.  $f(\ell) = \ell \iff 8(\ell - 1) = \ell(\ell + 2) \iff \ell^2 - 6\ell + 8 = 0 \iff \ell = 2 \text{ ou } \ell = 4$  (et  $2, 4 > -2$  : recevables).
2. Pour tout  $x > -2$  :  $f(x) - x = \frac{8x - 8 - x^2 - 2x}{x + 2} = \frac{-(x^2 - 6x + 8)}{x + 2} = \frac{-(x - 2)(x - 4)}{x + 2}$ . Sur  $[2; 4]$ , le numérateur  $-(x - 2)(x - 4)$  est positif ou nul et  $x + 2 > 0$  : donc  $\forall x \in [2; 4]$ ,  $f(x) \geq x$ .

## RÉDACTION MODÈLE – INTERVALLE STABLE ET MONOTONIE PAR RÉCURRENCE

3. Écrivons, pour tout  $x > -2$ ,  $f(x) = 8 - \frac{24}{x+2}$  : quand  $x$  croît,  $\frac{24}{x+2}$  décroît, donc  $f$  est **croissante** sur  $] -2; +\infty[$ . Par croissance,  $f([3; 4]) = [f(3); f(4)] = [3, 2; 4] \subseteq [3; 4]$  : l'intervalle  $[3; 4]$  est **stable** par  $f$ .

Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [3; 4]$ . **Initialisation** :  $u_0 = 3 \in [3; 4]$ .

**Hérédité** : si  $u_n \in [3; 4]$ , la stabilité donne  $u_{n+1} = f(u_n) \in [3; 4]$ .

**Conclusion** : par récurrence, tous les  $u_n$  restent dans  $[3; 4]$ .

Enfin, d'après la question 2,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$  puisque  $u_n \in [3; 4] \subseteq [2; 4]$  : la suite  $(u_n)$  est **croissante**, et elle est majorée par 4.

4. Croissante et majorée,  $(u_n)$  converge (théorème de la limite monotone) vers un réel  $\ell \in [3; 4]$ . La fonction  $f$  étant continue sur  $[3; 4]$ ,  $\ell$  est un point fixe :  $\ell = 2$  ou  $\ell = 4$ . Or  $2 \notin [3; 4]$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ .

5. ★ Si  $u_0 = 2$  : la suite est constante égale à 2 (point fixe). Si  $u_0 = 1,9$  :  $u_1 = \frac{8 \times 0,9}{3,9} \approx 1,85$ , puis  $u_2 \approx 1,76$  : la suite s'écarte de 2 vers le bas. Vocabulaire des Coulisses : 2 est un **ressort** (pente de  $f$  supérieure à 1 en 2), 4 un **aimant** : partir *sur* le ressort immobilise, partir à côté éjecte.

## EXERCICE 22 · APR-F1-22



## La récurrence aux radicaux

1.  $f(x) = x \iff \sqrt{3+x^2} = 2 \iff 3+x^2 = 4 \iff x^2 = 1$  (l'élévation au carré est une équivalence, les deux membres étant positifs) : les points fixes sont  $-1$  et  $1$ .

2.  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) - x = 2 - \sqrt{3+x^2}$ , et :  $2 - \sqrt{3+x^2} > 0 \iff \sqrt{3+x^2} < 2 \iff 3+x^2 < 4 \iff x^2 < 1 \iff -1 < x < 1$ . Les bornes sont exactement les deux points fixes : entre eux la courbe est au-dessus de la droite  $y = x$ , au-delà elle passe dessous.

3.  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  (admis), donc  $f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = [2 - \sqrt{3}; 1] \subseteq [0; 1]$  puisque  $2 - \sqrt{3} \approx 0,27 \geq 0$  : l'intervalle  $[0; 1]$  est stable.

4. Par récurrence (initialisation  $u_0 = 0$ , hérédité par stabilité) :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0; 1]$ . La question 2 donne alors  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$  (avec égalité seulement si  $u_n = 1$ ) : la suite est croissante et majorée par 1, donc converge (limite monotone) vers  $\ell \in [0; 1]$ . Par continuité de  $f$  (fonction composée de fonctions continues),  $\ell$  est un point fixe :  $\ell = -1$  ou  $\ell = 1$ , et seul 1 appartient à  $[0; 1]$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

5. ★ Parce que la suite vit dans  $[0; 1] : \forall n, u_n \geq 0$ , et le passage à la limite dans une inégalité large donne  $\ell \geq 0$ . Le point fixe  $-1$  est inaccessible depuis  $[0; 1]$  : un théorème d'identification ne choisit pas à votre place, il faut toujours localiser la limite.

## VII. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 23 · SYN-F1-23



### Héron, I<sup>er</sup> siècle : la racine des Babyloniens

MÉTHODE Un carré parfait au numérateur : toute la convergence de Héron tient dans cette identité.

1. Pour tout  $x > 0$  :  $\frac{1}{2} \left( x + \frac{2}{x} \right) - \sqrt{2} = \frac{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}{2x} = \frac{(x - \sqrt{2})^2}{2x} \geq 0$ . Une récurrence immédiate montre que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$  ; l'identité appliquée à  $x = u_n$  donne alors :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq \sqrt{2}$ .

2. Pour tout  $n \geq 1$  :  $u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0$  puisque  $u_n \geq \sqrt{2}$  (question 1) donne  $u_n^2 \geq 2$ . La suite est décroissante à partir du rang 1.

3. Décroissante (dès le rang 1) et minorée par  $\sqrt{2}$ , la suite converge (limite monotone) vers  $\ell \geq \sqrt{2} > 0$ . La fonction  $x \mapsto \frac{1}{2} \left( x + \frac{2}{x} \right)$  est continue sur  $]0; +\infty[$  :  $\ell$  est un point fixe,  $\ell = \frac{1}{2} \left( \ell + \frac{2}{\ell} \right)$ , soit  $\ell^2 = 2$ , et comme  $\ell > 0$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}$ .

4.  $u_1 = \frac{3}{2} = 1,5$  ;  $u_2 = \frac{17}{12} \approx 1,41667$  ;  $u_3 = \frac{577}{408} \approx 1,4142157$ . Face à  $\sqrt{2} = 1,414213562 \dots$  :  $u_1$  approche  $\sqrt{2}$  à  $10^{-1}$  près,  $u_2$  a **deux** décimales exactes,  $u_3$  en a **cinq** (erreurs successives :  $9 \times 10^{-2}$ , puis  $2,5 \times 10^{-3}$ , puis  $2 \times 10^{-6}$  : le nombre de chiffres fiables double à peu près à chaque tour). La tablette YBC 7289 donne  $1,414212 \dots$  : la précision de  $u_3$ , dix-huit siècles avant Héron.

EXERCICE 24 · SYN-F1-24



### Fibonacci, 1225 : neuf décimales sans algèbre

1.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (polynôme) et  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$ , trinôme de discriminant  $\Delta = 16 - 120 = -104 < 0$  et de coefficient dominant positif :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ .

2.  $f$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , avec  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$  : le corollaire du TVI (version étendue aux limites) donne une unique solution réelle  $\alpha$ . Comme  $f(1) = -7 < 0$  et  $f(2) = 16 > 0$ ,  $\alpha \in ]1; 2[$ .

3.  $f(1,5) = 2,875 > 0$  donc  $\alpha \in ]1; 1,5[$  ;  $f(1,25) \approx -2,42 < 0$  donc  $\alpha \in ]1,25; 1,5[$  : amplitude 0,25. La valeur de Fibonacci,  $1,3688 \dots$ , est bien dans l'intervalle.

4. Il faut  $\frac{1}{2^k} \leq 10^{-9}$ , soit  $k = 30$  étapes (car  $2^{30} \approx 1,07 \times 10^9$ ). Trente découpages, autant d'évaluations d'un polynôme de degré 3, à la main, en écriture sexagésimale : la performance de 1225 est stupéfiante, et l'on pense que Fibonacci utilisait une méthode plus fine que la dichotomie, jamais retrouvée.

## Brouwer, 1911 : le point fixe inévitable

1.  $g$  est continue sur  $[0; 1]$  comme différence de fonctions continues. Comme  $f(0) \in [0; 1]$ ,  $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$ ; comme  $f(1) \in [0; 1]$ ,  $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ .
2. Si  $g(0) = 0$  ou  $g(1) = 0$ , alors 0 ou 1 est un point fixe. Sinon  $g(0) > 0 > g(1)$  :  $g$  est continue sur  $[0; 1]$  et 0 est compris entre  $g(0)$  et  $g(1)$ , donc le théorème des valeurs intermédiaires fournit  $c \in ]0; 1[$  tel que  $g(c) = 0$ , c'est-à-dire  $f(c) = c$ . Dans tous les cas,  $f$  admet au moins un point fixe.
3. Non : la fonction identité,  $\forall x \in [0; 1]$ ,  $f(x) = x$ , est continue de  $[0; 1]$  dans lui-même et tous ses points sont fixes.
4. Sur l'intervalle ouvert :  $f$  définie par  $\forall x \in ]0; 1[$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{2}$  est continue, à valeurs dans  $] \frac{1}{2}; 1[ \subseteq ]0; 1[$ , et  $f(x) = x$  imposerait  $x = 1 \notin ]0; 1[$  : aucun point fixe. Sans continuité :  $f$  définie sur  $[0; 1]$  par  $f(x) = 1$  pour tout  $x \leq \frac{1}{2}$ , et  $f(x) = 0$  pour tout  $x > \frac{1}{2}$ ; sur le premier morceau  $f(x) = 1 \neq x$ , sur le second  $f(x) = 0 \neq x$  : aucun point fixe.

## Borsuk, 1933 : le tour du monde des températures

1.  $d(\theta)$  mesure l'écart de température entre le point d'angle  $\theta$  et son antipode. La fonction  $\theta \mapsto T(\theta + \pi)$  est continue (composée de  $T$ , continue, et d'une translation), donc  $d$  est continue sur  $[0; \pi]$  comme différence de fonctions continues.
2.  $d(0) + d(\pi) = [T(\pi) - T(0)] + [T(2\pi) - T(\pi)] = T(2\pi) - T(0) = 0$  puisque  $T(2\pi) = T(0)$ . Deux réels de somme nulle sont ou bien tous deux nuls, ou bien de signes stricts contraires.
3. Si  $d(0) = 0$ , c'est gagné. Sinon  $d(0)$  et  $d(\pi)$  sont de signes contraires, et  $d$  est continue sur  $[0; \pi]$  : le TVI fournit  $\theta_0$  tel que  $d(\theta_0) = 0$ , c'est-à-dire  $T(\theta_0 + \pi) = T(\theta_0)$  : deux antipodes à même température. Physiquement, la température ponctuelle fluctue (fronts, turbulence), mais la grandeur moyenne à l'échelle du kilomètre varie continûment : l'hypothèse est une idéalisation raisonnable.
4. L'argument n'utilise que la continuité et la périodicité : il vaut pour la pression atmosphérique, l'altitude du relief le long de l'équateur, la concentration en dioxyde de carbone, etc.

## Cauchy, 1821 : prouver le théorème du chapitre

1. Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f(a_n) \leq 0 < f(b_n)$ . **Initialisation** :  $f(a_0) = f(a) < 0$  et  $f(b_0) = f(b) > 0$ .  
**Hérédité** : supposons la propriété au rang  $n$ . Si  $f(m_n) \leq 0$ , alors  $a_{n+1} = m_n$  et  $b_{n+1} = b_n$  donnent  $f(a_{n+1}) = f(m_n) \leq 0 < f(b_n) = f(b_{n+1})$ ; sinon  $f(m_n) > 0$ , et  $a_{n+1} = a_n$ ,  $b_{n+1} = m_n$  donnent  $f(a_{n+1}) \leq 0 < f(m_n) = f(b_{n+1})$ .  
**Conclusion** : la propriété vaut pour tout  $n$ .
2. À chaque étape,  $a_{n+1} \in \{a_n, m_n\}$  avec  $m_n \geq a_n$  :  $(a_n)$  est croissante; symétriquement  $(b_n)$  est décroissante. Et le passage de  $[a_n; b_n]$  à  $[a_{n+1}; b_{n+1}]$  divise la longueur par 2, d'où, par récurrence immédiate :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ .
3.  $(a_n)$  est croissante et majorée par  $b$  (car  $a_n \leq b_n \leq b_0 = b$ ) : elle converge, par le théorème de la limite

monotone du chapitre A1 (toute suite croissante et majorée converge). De même  $(b_n)$ , décroissante et minorée par  $a$ , converge. Comme  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ , les deux limites sont égales : notons  $c$  leur valeur commune, qui vérifie  $a \leq c \leq b$ .

#### RÉDACTION MODÈLE – PASSER À LA LIMITE PAR CONTINUITÉ

4. La fonction  $f$  est continue en  $c$ , et  $a_n \rightarrow c$  : le théorème « image d'une suite convergente » du paragraphe 5 donne  $f(a_n) \rightarrow f(c)$ . Or  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f(a_n) \leq 0$  : par passage à la limite dans une inégalité large,  $f(c) \leq 0$ .

De même,  $f(b_n) \rightarrow f(c)$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f(b_n) > 0$  : la limite d'une suite à termes strictement positifs est **positive ou nulle** (l'inégalité stricte ne survit pas au passage à la limite), donc  $f(c) \geq 0$ .

Des deux inégalités :  $f(c) = 0$  : le théorème des valeurs intermédiaires est démontré.

5. La continuité de  $f$  n'a servi qu'à un seul endroit, mais il est décisif : le passage de  $a_n \rightarrow c$  à  $f(a_n) \rightarrow f(c)$ . Quant à la propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$ , elle se cache dans le théorème de la limite monotone (question 3) : c'est lui qui fabrique le réel  $c$ , et c'est lui qui serait faux sur  $\mathbb{Q}$ .

#### COMMENTAIRES

Relisez la preuve avec la fonction en escalier de l'exercice 16 (item 4) : tout fonctionne jusqu'à la question 3 incluse, le réel  $c$  existe bel et bien, mais sans continuité  $f(a_n) \rightarrow f(c)$  s'effondre, et  $f(c)$  peut valoir  $\pm 1$ . La continuité n'est pas un ornement : c'est la charnière.

EXERCICE 28 · APR-F1-28

★★★★★ ★

### Baritomba, 2005 : la table bancale, démontrée

1. Dire que  $g(\theta) = 0$ , c'est dire que le quatrième pied affleure exactement le sol, sans flotter ( $g > 0$ ) ni exiger d'enfoncer la table ( $g < 0$ ) : les quatre pieds touchent, la table est stable.
2. Comparons les positions  $\theta = 0$  et  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Après un quart de tour, les pieds de la diagonale mesurée occupent **exactement** les positions qu'occupait l'autre diagonale au départ, et réciproquement. Or, au départ, l'autre diagonale était celle qui reposait au sol pendant que la diagonale mesurée flottait de  $g(0)$ . Mesurer  $g(\frac{\pi}{2})$ , c'est donc mesurer l'écart de l'ancienne diagonale « au sol » : pour poser les trois pieds de la configuration tournée, il faut cette fois enfoncer la diagonale mesurée de la même quantité, d'où  $g(\frac{\pi}{2}) = -g(0)$ . En particulier  $g(0)$  et  $g(\frac{\pi}{2})$  sont de signes contraires, ou tous deux nuls.
3. La fonction  $g$  est continue sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$  (admis), et 0 est compris entre  $g(0)$  et  $g(\frac{\pi}{2})$  (question 2) : le théorème des valeurs intermédiaires fournit  $\theta^* \in [0; \frac{\pi}{2}]$  tel que  $g(\theta^*) = 0$  : il existe un angle qui stabilise la table.
4. Le sol **continu** exclut les marches d'escalier et les trous nets ; la **pente limitée** (les auteurs démontrent le théorème jusqu'à 35 degrés) garantit que trois pieds peuvent toujours porter ; les **pieds égaux et ponctuels** excluent les tables bancales *par construction*, que la rotation ne soigne pas ; et la rotation « sur place » idéalise le geste. Le théorème répare les sols, pas les meubles.

## VIII. PYTHON, LE LABORATOIRE

EXERCICE 29 · SYN-F1-29



## La dichotomie au compteur

1. et 2. Le compte rendu du script :

| eps    | $10^{-1}$ | $10^{-3}$ | $10^{-6}$ | $10^{-9}$ | $10^{-12}$ |
|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| étapes | 4         | 10        | 20        | 30        | 40         |

La boucle s'arrête dès que la longueur  $\frac{1}{2^n}$  passe sous eps : le compte est le plus petit  $n$  tel que  $2^n > 10^k$ . Ainsi  $2^4 = 16 > 10$ ,  $2^{10} = 1024 > 10^3$ ,  $2^{20} > 10^6$ ,  $2^{30} > 10^9$ ,  $2^{40} > 10^{12}$ .

3. Chaque tranche de trois décimales coûte dix étapes : soit  $\frac{10}{3} \approx 3,33$  étapes par décimale, en accord avec  $\log_2(10) \approx 3,32$ .

4. L'affichage des intervalles montre la valeur de Fibonacci prisonnière jusqu'à l'étape 31, puis **expulsée à l'étape 32**, quand la largeur  $2^{-32} \approx 2,3 \times 10^{-10}$  passe sous l'écart entre la valeur historique et la vraie racine ( $\approx 3,2 \times 10^{-10}$ , sur la dixième décimale). Rien de contradictoire : neuf décimales exactes signifient une erreur plus petite que  $10^{-9}$ , pas plus petite que  $10^{-10}$ . La dichotomie a mesuré, huit siècles plus tard, l'épaisseur exacte du trait de plume de Fibonacci.

EXERCICE 30 · SYN-F1-30



## Le microscope à monstres

1.  $W_0$  est un simple cosinus. Chaque terme supplémentaire ajoute des oscillations trois fois plus serrées et deux fois plus basses : des rides sur les rides, et la silhouette générale reste celle des premiers termes.

2. Non : là où une parabole zoomée devient vite indiscernable d'une droite (sa tangente),  $W_8$  zoomée re-présente des rides à la nouvelle échelle, semblables aux anciennes. Le zoom ne lisse rien : c'est l'auto-similarité de la construction.

3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $|W_8(x)| \leq \sum_{n=0}^8 \left(\frac{1}{2}\right)^n |\cos(3^n \pi x)| \leq \sum_{n=0}^8 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - (1/2)^9}{1 - 1/2} = 2 - \frac{1}{2^8} < 2$  (somme géométrique du chapitre A1).

4. ★ Le tracé ne montre jamais que  $W_N$ , une somme **finie** de fonctions dérivables, donc une fonction parfaitement lisse : ses rides s'arrêtent à l'échelle  $3^{-N}$ . La vraie  $W$  est la **limite** de ces sommes : sa rugosité à toutes les échelles n'existe qu'après le passage à la limite, celui-là même qu'aucun écran, aucune imprimante et aucun crayon ne peut effectuer. Le monstre commence exactement là où le dessin s'arrête.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les scripts complets et exécutables du laboratoire, le zoom sans fond dans la fonction de Weierstrass et les récits étendus de la partie VII vous attendent sur le compagnon numérique.