



CORRIGÉ • F2. COMPLÉMENTS DE DÉRIVATION ET CONVEXITÉ

Corrigé des trente et un exercices, feuille en main

RÉDACTION MODÈLE : la copie idéale, à imiter • MÉTHODE : la stratégie en une ligne, puis le calcul • COMMENTAIRES :
ce que la solution enseigne

I. LA CHAÎNE DE MONTAGE

EXERCICE 1 • APL-F2-01



Gammes sur les quatre formes

MÉTHODE Nommer la forme (u^n , $\sqrt{u}$, $\frac{1}{u}$, e^u), vérifier le permis, dériver de l'extérieur vers l'intérieur.

1. $f_1 = u^5$ avec $u(x) = 2x + 1$, dérivable sur $\mathbb{R}$ (affine) : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 5 \times 2 \times (2x + 1)^4 = 10(2x + 1)^4$.

RÉDACTION MODÈLE – LE PERMIS DE DÉRIVER, PUIS LA FORMULE COMPOSÉE

2. Posons $u(x) = 3x + 2$: la fonction u est dérivable sur $I =]-\frac{2}{3}; +\infty[$ comme fonction affine, et $\forall x \in I$, $u(x) = 3x + 2 > 0$. Le permis de la racine est donc accordé : $f_2 = \sqrt{u}$ est dérivable sur I , et

$$\forall x \in I, \quad f_2'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \boxed{\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}}.$$

3. $f_3 = \frac{1}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$, dérivable et sans zéro sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_3'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.

4. $f_4 = e^u$, $u(x) = 5x - 1$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_4'(x) = 5e^{5x-1}$.

5. $f_5 = u^3$, $u(x) = x^2 - 4x$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_5'(x) = 3(2x - 4)(x^2 - 4x)^2 = 6(x - 2)(x^2 - 4x)^2$.

6. $f_6 = \sqrt{u}$, $u(x) = x^2 + 9 \geq 9 > 0$ sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_6'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

7. $f_7 = e^u$, $u(x) = 2x - x^2$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_7'(x) = (2 - 2x)e^{2x-x^2}$.

8. $f_8 = \frac{1}{u^2}$ avec $u(x) = 3x - 1 > 0$ sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$: $f_8'(x) = -\frac{2 \times 3}{(3x - 1)^3} = -\frac{6}{(3x - 1)^3}$.

COMMENTAIRES

Le réflexe qui sauve : écrire la couche extérieure *avant* de dériver. Les items 5 et 8 se traitent aussi en développant, mais dix fois plus lentement : la chaîne est un gain, pas un détour.

EXERCICE 2 · APL-F2-02



Poupées à deux étages

MÉTHODE Deux couches : on dérive l'extérieure, on multiplie par la dérivée de l'intérieure, qui est elle-même une composée.

1. Sur $]0; +\infty[$, $\sqrt{x} > 0$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ y est dérivable : $g'_1(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.
2. $u(x) = x^2 + e^x \geq e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, dérivable : $g'_2(x) = \frac{2x + e^x}{2\sqrt{x^2 + e^x}}$.
3. $u(x) = e^x + e^{-x}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = e^x - e^{-x}$: $g'_3(x) = 3(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})^2$.
4. $u(x) = 1 + e^{-x} > 1 > 0$, $u'(x) = -e^{-x}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'_4(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}.$$

Vérification demandée : $g_4(x)(1 - g_4(x)) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \times \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = g'_4(x)$.

COMMENTAIRES

La sigmoïde g_4 est l'exemple le plus recyclé du chapitre : c'est la logistique de l'exercice 22 en version réduite ($K = 1$), et l'identité $g'_4 = g_4(1 - g_4)$ est l'équation différentielle qui l'engendrera au chapitre F5. Retenir la forme du calcul, il resservira.

EXERCICE 3 · APL-F2-03



Le permis de dériver

MÉTHODE Deux ensembles distincts : là où la formule a un sens (permis de définir), là où la dérivée composée est licite (permis de dériver). Ils peuvent différer au bord.

1. $4 - x^2 \geq 0 \iff x \in [-2; 2]$: définition sur $[-2; 2]$. La racine exige $u > 0$ pour dériver : dérivabilité sur $] -2; 2[$, avec $h'_1(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$.
2. Définition et dérivabilité sur $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$, réunion des trois intervalles $] -\infty; -3[$, $] -3; 3[$ et $] 3; +\infty[$, sur chacun desquels la forme $\frac{1}{u}$ s'applique : $h'_2(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 9)^2}$.
3. $e^x - 1 \geq 0 \iff x \geq 0$ (stricte croissance de l'exponentielle, sans logarithme) : définition sur $[0; +\infty[$, dérivabilité sur $] 0; +\infty[$ où $e^x - 1 > 0$, avec $h'_3(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$: définition sur $\mathbb{R}$ tout entier. Sur $] 0; +\infty[$, $h_4 = x$ donne $h'_4 = 1$; sur $] -\infty; 0[$, $h_4 = -x$ donne $h'_4 = -1$; en 0, les pentes latérales 1 et -1 diffèrent : **non dérivable en 0** (l'angle de la valeur absolue, chapitre F1). Dérivabilité sur $\mathbb{R}^*$.

COMMENTAIRES

L'item 4 est le garde-fou de la feuille : appliquer aveuglément $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ en 0 produirait une division par zéro. Le permis n'est pas une formalité, c'est lui qui détecte l'angle.

EXERCICE 4 · THE-F2-04



Les corollaires, démontrés

MÉTHODE Chaque ligne du tableau = le théorème général avec un v de référence ; la ligne u^n se refait par récurrence, sans composée.

1. Prenons $v = \exp$, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $v' = \exp$, et $u(I) \subseteq \mathbb{R}$: le théorème donne e^u dérivable sur I et $(e^u)' = v'(u) \times u' = u' e^u$.

2. Prenons $v : X \mapsto \sqrt{X}$, dérivable sur $J =]0; +\infty[$ avec $v'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$. L'hypothèse $u > 0$ sur I assure $u(I) \subseteq J$: le théorème donne $\sqrt{u}$ dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

3. **Initialisation** ($n = 1$) : $(u^1)' = u' = 1 \times u' \times u^0$.

Hérédité : supposons $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par la dérivée d'un produit :

$$(u^{n+1})' = (u \times u^n)' = u' u^n + u \times n u' u^{n-1} = (n+1) u' u^n.$$

Conclusion : par le principe de récurrence, la formule vaut pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 5 · SYN-F2-05



La sous-tangente de l'exponentielle

MÉTHODE Écrire la tangente, chercher son zéro : le facteur e^a , jamais nul, se simplifie et la position a disparaît de la distance.

1. $T_a : y = e^a(x - a) + e^a$. Elle coupe l'axe des abscisses lorsque $e^a(x - a + 1) = 0$, soit, comme $e^a \neq 0$, en $x = a - 1$.

2. Pour construire la tangente au point M d'abscisse a : projeter M sur l'axe des abscisses, reculer d'une unité, et joindre le point obtenu à M . Trois tangentes aux abscisses 0, 1, 2 : les droites joignant $(-1; 0)$ à $(0; 1)$, $(0; 0)$ à $(1; e)$, $(1; 0)$ à $(2; e^2)$.

3. Pour $x \mapsto e^{kx}$: tangente $y = k e^{ka}(x - a) + e^{ka}$, nulle lorsque $k(x - a) + 1 = 0$, soit $x = a - \frac{1}{k}$: sous-tangente constante $\frac{1}{k}$.

COMMENTAIRES

La sous-tangente constante caractérise les exponentielles : c'est en cherchant toutes les courbes qui la possèdent que Leibniz, en 1684, referma le problème de de Beaune. Une propriété géométrique qui équivaut à une équation différentielle : le programme du chapitre F5 en germe.

II. L'ÉTAGE AU-DESSUS

EXERCICE 6 · APL-F2-06



La seconde couche

MÉTHODE Dériver deux fois, en rejustifiant entre les deux : la dérivée d'un produit reste un produit.

1. $f_1(x) = x^4 - 2x^3$ (polynôme) : $f'_1(x) = 4x^3 - 6x^2$, puis $\forall x \in \mathbb{R}, f''_1(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$.
2. Sur $] -1; +\infty[$, forme $\frac{1}{u}$ avec $u(x) = x + 1 \neq 0$: $f'_2(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$, puis $f''_2(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$.
3. Sur $]0; +\infty[$, produit $x \times \sqrt{x}$: $f'_3(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, puis $f''_3(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$.
4. Produit : $f'_4(x) = (x+1)e^x$, puis $f''_4(x) = (x+2)e^x$.

RÉDACTION MODÈLE – LA DÉRIVÉE SECONDE D'UN PRODUIT À FACTEUR COMPOSÉ

5. Dérivons deux fois, en rejustifiant à chaque étage. La fonction f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de $x \mapsto 2x + 1$ (affine) et de $x \mapsto e^{-x}$ (composée de l'exponentielle et d'une affine). Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'_5(x) = 2e^{-x} + (2x + 1) \times (-e^{-x}) = (1 - 2x)e^{-x}.$$

La dérivée f'_5 est un produit de même nature, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et f_5 est deux fois dérivable avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''_5(x) = -2e^{-x} + (1 - 2x) \times (-e^{-x}) = \boxed{(2x - 3)e^{-x}}.$$

EXERCICE 7 · SYN-F2-07



Le drone sur son rail

MÉTHODE Vitesse et accélération sont deux dérivées successives ; les régimes se lisent en croisant leurs signes.

1. $x'(t) = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t - 2)(t - 4)$ et $x''(t) = 6t - 18 = 6(t - 3)$.

t	0	2	3	4	6	
$x'(t)$	+	0	-	-	0	+
$x''(t)$	-	-	0	+	+	+

2. Le drone avance sur $[0; 2[$ et $]4; 6]$, recule sur $]2; 4[$; demi-tours à $t = 2$ (en $x = 20$ m) et $t = 4$ (en $x = 16$ m).
3. Mouvement *accéléré* quand x' et x'' ont le même signe : sur $]2; 3[$ (marche arrière qui s'amplifie) et $]4; 6]$; *freiné* sur $[0; 2[$ et $]3; 4[$. La marche arrière est la plus rapide à $t = 3$ ($x'(3) = -3$ m/s, au point $x = 18$ m).
4. Rapport de vol : parti de 0, le drone file jusqu'à 20 m en freinant dès le départ, recule ensuite jusqu'à 16 m (pointe de recul à $t = 3$), puis repart en avant en accélérant jusqu'à 36 m à $t = 6$.

COMMENTAIRES

La question 3 sépare deux idées que le langage courant colle : ralentir n'est pas reculer. Le signe de x' dit le **sens**, l'accord des signes de x' et x'' dit le **régime** : c'est la lecture cinématique du § 2 du cours, et l'inflexion de x tombe à $t = 3$, au maximum de la *vitesse de recul*.

EXERCICE 8 · SYN-F2-08



Qui est qui ?

MÉTHODE Une seule attribution résiste au croisement des trois tests : zéros de l'une aux extremums de l'autre, signes, courbure.

$$\boxed{B = f, \quad C = f', \quad A = f''}$$

Trois arguments croisés. **(i)** B a un maximum local en $x = -1$ et un minimum local en $x = 1$; or C s'annule exactement en ± 1 , en passant du positif au négatif puis l'inverse : C est la dérivée de B. **(ii)** C, parabole, a son minimum en 0 ; or A s'annule en 0 en passant du négatif au positif : A est la dérivée de C. **(iii)** Cohérence de courbure : B est concave puis convexe avec inflexion en 0, et A (candidate f'') est négative avant 0, positive après. On lit même quantitativement : la pente de A vaut 2,4 et le minimum de C vaut $-1,2$, compatibles avec le triplet $g(x) = 0,4x^3 - 1,2x$.

III. LES TROIS REGARDS

EXERCICE 9 · APL-F2-09



Lire la courbure

MÉTHODE Convexe : la courbe tient l'eau ; concave : elle la verse ; inflexion : la bascule.

1. Convexe sur environ $[-3; -1,2]$ et $[1,2; 3]$, concave sur $[-1,2; 1,2]$. **2.** Points d'inflexion vers $x \approx -1,2$ et $x \approx 1,2$. **3.** $f'''(-2) > 0$, $f'''(0) < 0$, $f'''(2) > 0$. **4.** En chaque inflexion, la tangente **traverse** la courbe en son point de contact : au-dessous d'un côté, au-dessus de l'autre.

EXERCICE 10 · APL-F2-10



Le signe de f'' en batterie

MÉTHODE Polynômes : f'' se factorise ; exponentielles : le facteur e^u , strictement positif, sort du tableau de signes.

- $f_1''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$: concave sur $]-\infty; 2]$, convexe sur $[2; +\infty[$, inflexion en $(2; 3)$.
- $f_2''(x) = 12x^2 + 24x = 12x(x + 2)$: convexe sur $]-\infty; -2]$ et $[0; +\infty[$, concave sur $[-2; 0]$, deux inflexions $(-2; -16)$ et $(0; 0)$.

RÉDACTION MODÈLE – L'ÉTUDE DE CONVEXITÉ COMPLÈTE

3. Étudions la convexité de f_3 . La fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une affine et de l'exponentielle : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_3(x) = (x+2)e^x$ puis $f''_3(x) = (x+3)e^x$. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, le signe de f''_3 est celui de $x+3$:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f''_3(x)$	$-$	0	$+$
$\mathcal{C}_{f_3}$	<i>concave</i>		<i>convexe</i>

Donc f_3 est concave sur $]-\infty; -3]$ et convexe sur $[-3; +\infty[$; comme f''_3 s'annule en changeant de signe en -3 , la courbe admet le point d'inflexion $(-3; -2e^{-3})$.

4. Quotient $\frac{1}{u}$ avec $u = 1 + x^2 \neq 0$: $f'_4(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, puis $f''_4(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$. Le dénominateur est strictement positif : signe de $6x^2 - 2$, négatif entre $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Concave sur $[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}]$, convexe à l'extérieur, inflexions $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{3}{4})$.

EXERCICE 11 · THE-F2-11



Par les cordes

MÉTHODE Tout se joue sur une identité algébrique : développer, comparer, factoriser.

1. Développons la différence : en posant $m = (1-t)a + tb$,

$$\begin{aligned}(1-t)a^2 + tb^2 - m^2 &= (1-t)a^2 + tb^2 - (1-t)^2a^2 - 2t(1-t)ab - t^2b^2 \\ &= (1-t)ta^2 + t(1-t)b^2 - 2t(1-t)ab = t(1-t)(a-b)^2.\end{aligned}$$

Comme $t(1-t) \geq 0$ pour $t \in [0; 1]$ et $(a-b)^2 \geq 0$, la différence est positive : c'est l'inégalité des cordes pour la fonction carré, qui est donc convexe sur $\mathbb{R}$. Elle est nulle si et seulement si $t(1-t) = 0$ ou $a = b$, c'est-à-dire $t \in \{0; 1\}$ ou $a = b$.

2. Pour $f(x) = mx + p$: $f((1-t)a + tb) = m((1-t)a + tb) + p = (1-t)f(a) + tf(b)$, par linéarité. Les deux inégalités de définition sont des égalités : f est convexe et concave.

3. Si f et g vérifient chacune l'inégalité des cordes, leur somme l'obtient en additionnant membre à membre : $(f+g)((1-t)a + tb) \leq (1-t)(f+g)(a) + t(f+g)(b)$.

EXERCICE 12 · SYN-F2-12



Le tribunal de la convexité

N°	VERDICT	JUSTIFICATION
1	FAUX	Contre-exemple : $x \mapsto x - 1$, affine donc convexe (exercice 11), et strictement négative sur $] -\infty ; 1[$.
2	FAUX	Contre-exemple du cours : $x \mapsto x^4$ en $a = 0$: $f''(0) = 0$ mais $f'' = 12x^2 \geq 0$ ne change pas de signe, aucune inflexion.
3	VRAI	Par les cordes : $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$; g croissante conserve l'inégalité, puis g convexe majore $g((1-t)f(a) + tf(b))$ par $(1-t)g(f(a)) + tg(f(b))$.
4	FAUX	Contre-exemple : $f(x) = (x-1)^2$ et $g(x) = (x+1)^2$, convexes ; leur produit $h(x) = (x^2-1)^2$ vérifie $h''(x) = 12x^2 - 4$, donc $h''(0) = -4 < 0$: h n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.
5	VRAI	Par les cordes appliquées aux extrémités : tout point de $[a; b]$ s'écrit $(1-t)a + tb$, donc $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \leq \max(f(a), f(b))$.
6	VRAI	★ Si f n'est pas constante, deux points $a < b$ donnent une corde de pente $p \neq 0$; l'inégalité des trois pentes (§ 3.2, parcours ★) force, du côté où p pousse, $f(x) \geq f(b) + p(x-b) \rightarrow +\infty$ (cas $p > 0$; symétrique si $p < 0$) : f n'est pas majorée.

COMMENTAIRES

L'item 3 est le plus rentable de la feuille : composer une convexe par une convexe *croissante* préserve la convexité, et c'est lui qui justifiera en une ligne, plus tard, la convexité de fonctions comme e^{x^2} . L'item 6, lui, dit qu'une convexe non constante finit toujours par exploser d'un côté : le bol ne se referme jamais.

IV. LA COURBE ET SES TANGENTES

EXERCICE 13 · APL-F2-13

★★ ■ ⌚

Au-dessus, au-dessous

MÉTHODE *Position tangente-courbe : par le théorème quand f'' a un signe constant, par factorisation quand il change.*

- $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc $T_1 : y = -(x-1) + 1 = 2 - x$. Sur $]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$: f est convexe, donc sa courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes (théorème du § 4) : $\forall x > 0, \frac{1}{x} \geq 2 - x$.
- $g'(x) = 3x^2$, $T_1 : y = 3x - 2$. Factorisons : $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - (3x - 2) = (x-1)^2(x+2)$, du signe de $x+2$. La courbe est au-dessus de T_1 sur $[-2; +\infty[$, au-dessous sur $] -\infty; -2]$, et la *recoupe* en $x = -2$. Aucune contradiction : le théorème exige $f'' \geq 0$ sur l'intervalle entier, or $g''(x) = 6x$ change de signe en 0 ; la garantie « au-dessus » ne vaut que sur un intervalle où f'' garde un signe constant, ici $[0; +\infty[$.

La manivelle à inégalités

RÉDACTION MODÈLE – LA MACHINE À INÉGALITÉS, VERSION CONCAVE

1. Établissons l'inégalité par la position tangente-courbe. La fonction racine est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$, avec $\forall x > 0$, $(\sqrt{x})'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$: elle y est **concave**, donc sa courbe est au-dessous de chacune de ses tangentes (théorème du § 4, version concave). Sa tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \frac{1}{2}(x - 1) + 1 = \frac{x+1}{2}$. Il s'ensuit :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2},$$

et l'inégalité vaut encore en $x = 0$, où elle se lit directement ($0 \leq \frac{1}{2}$). D'où :

$$\boxed{\forall x \in [0; +\infty[, \quad \sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}}$$

2. $x \mapsto x^4$ est convexe sur $\mathbb{R}$ ($12x^2 \geq 0$) ; sa tangente en 1 est $y = 4x - 3$; la courbe la domine : $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 \geq 4x - 3$.

3. L'inverse est convexe sur $]0; +\infty[$ (exercice 13) ; tangente en 2 : $y = -\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2} = \frac{4-x}{4}$; d'où $\forall x > 0, \frac{1}{x} \geq \frac{4-x}{4}$.

4. Cordes de $x \mapsto x^4$ (convexe) avec $t = \frac{1}{2}$: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \leq \frac{a^4+b^4}{2}$ pour tous réels a, b .

COMMENTAIRES

Le mode d'emploi tient en deux choix : *qui* est convexe (ou concave), et *où* l'on pose la tangente. Le point de tangence se lit dans l'inégalité cible : c'est l'abscisse où elle devient égalité ($x = 1$ aux questions 1 et 2, $x = 2$ à la question 3, $a = b$ à la question 4).

La ROC du chapitre, en miroir

RÉDACTION MODÈLE – LA ROC MIROIR, TOUTES ÉTAPES RÉDIGÉES

Étape 1 : poser l'écart. Fixons $a \in I$ et posons, pour tout $x \in I$: $g(x) = f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)]$. Montrer le théorème revient à montrer que g est négative sur I .

Étape 2 : dériver l'écart. g est dérivable sur I comme différence de f et d'une fonction affine, et $\forall x \in I, g'(x) = f'(x) - f'(a)$.

Étape 3 : le signe de g' . Par hypothèse $f'' \leq 0$ sur I , donc f' est décroissante sur I . Si $x \leq a$, alors $f'(x) \geq f'(a)$, donc $g'(x) \geq 0$; si $x \geq a$, alors $g'(x) \leq 0$.

Étape 4 : conclure. g est donc croissante avant a , décroissante après : elle atteint en a son **maximum** sur I . Or $g(a) = 0$. Il s'ensuit :

$$\forall x \in I, \quad g(x) \leq 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{f(x) \leq f'(a)(x - a) + f(a)}$$

La courbe d'une fonction concave est au-dessous de chacune de ses tangentes.

COMMENTAIRES

Mot pour mot la démonstration exigible, avec trois inversions de sens : décroissante au lieu de croissante, maximum au lieu de minimum, au-dessous au lieu d'au-dessus. Savoir refaire ce miroir, c'est la preuve que l'on a compris l'original, et c'est un grand classique d'épreuve.

EXERCICE 16 · SYN-F2-16

La famille e^{kx} contre ses cordes

MÉTHODE Le zéro de φ'_k se lit par comparaison à $e^0 = 1$, sans logarithme ; le reste est une étude de signe.

1. φ_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'_k(x) = k e^{kx} - k = k(e^{kx} - 1)$. Or $e^{kx} > 1 \iff kx > 0$. **Cas** $k > 0$: $e^{kx} - 1$ est du signe de x , donc $\varphi'_k < 0$ sur $]-\infty; 0[$ et $\varphi'_k > 0$ sur $]0; +\infty[$. **Cas** $k < 0$: $e^{kx} - 1$ est du signe de $-x$, et le facteur $k < 0$ rétablit le même tableau. Dans les deux cas, φ_k décroît puis croît, avec un minimum en 0.

2. $\varphi_k(0) = 1 - 0 - 1 = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_k(x) \geq 0$, c'est-à-dire $e^{kx} \geq 1 + kx$. En une ligne par le cours : $x \mapsto e^{kx}$ est convexe ($k^2 e^{kx} \geq 0$) et sa tangente en 0 est $y = 1 + kx$.

3. Appliquons la question 2 en $\frac{x}{n}$ (au lieu de kx) : $e^{x/n} \geq 1 + \frac{x}{n}$. Pour $x \geq 0$, les deux membres sont positifs ($1 + \frac{x}{n} \geq 1$), et la fonction $t \mapsto t^n$ est croissante sur $[0; +\infty[$: l'élévation à la puissance n conserve l'ordre, d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq 0, e^x \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$.

EXERCICE 17 · APR-F2-17



Jensen en action

MÉTHODE Jensen à poids égaux, appliqué à la bonne fonction ; le cas $n = 4$ se fabrique avec trois cordes.

1. La racine est concave sur $[0; +\infty[$: sa concavité, établie sur l'ouvert, s'étend à $[0; +\infty[$ par continuité (cours, § 4.2). Jensen renversé donne $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{3} \leq \sqrt{\frac{a+b+c}{3}}$, puis, en multipliant par 3 : $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq 3\sqrt{\frac{a+b+c}{3}} = \sqrt{3(a+b+c)}$.

2. Le carré est convexe : $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$, soit $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$. Cas d'égalité par l'identité du coup de pouce : $3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$, nulle si et seulement si $a = b = c$. Lecture statistique : le carré de la moyenne de trois notes ne dépasse jamais la moyenne de leurs carrés, et il n'y a égalité que pour trois notes identiques ; l'écart entre les deux est, à un facteur près, la variance.

3. Notons $m_{12} = \frac{x_1+x_2}{2}$ et $m_{34} = \frac{x_3+x_4}{2}$. Trois cordes ($t = \frac{1}{2}$ à chaque fois) :

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_4}{4}\right) = f\left(\frac{m_{12} + m_{34}}{2}\right) \leq \frac{f(m_{12}) + f(m_{34})}{2} \leq \frac{\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \frac{f(x_3)+f(x_4)}{2}}{2},$$

qui est bien la moyenne des quatre $f(x_i)$.

V. ÉTUDES COMPLÈTES

EXERCICE 18 · SYN-F2-18



Une cubique de bout en bout

RÉDACTION MODÈLE – L'ÉTUDE COMPLÈTE TYPE BAC

Menons l'étude complète de f .

Dérivées. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$ et $f''(x) = 12x - 18 = 6(2x - 3)$.

Limites. Par le terme dominant (F1) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Variations et convexité.

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	-	0	+
f	$-\infty$		2		1		$+\infty$
$f''(x)$		-	-	0	+	+	

Maximum local $(1; 2)$, minimum local $(2; 1)$; concave sur $]-\infty; \frac{3}{2}]$, convexe sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$; f'' s'annule en changeant de signe en $\frac{3}{2}$: point d'inflexion $\Omega(\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$, avec la tangente en Ω de pente $f'(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{2}$: $y = -\frac{3}{2}(x - \frac{3}{2}) + \frac{3}{2}$. Le tracé joint extremums, Ω et cette tangente qui traverse.

2. $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$: l'inflexion est au milieu des extremums.

3. ★ Le développement donne, pour tout $h \in \mathbb{R}$: $f(\frac{3}{2} + h) + f(\frac{3}{2} - h) = 3 = 2f(\frac{3}{2})$ (les termes en h^2 et les termes impairs se compensent). Géométriquement, Ω est **centre de symétrie** de la courbe : le point d'inflexion d'une cubique est toujours son centre, et c'est pour cela qu'il tombe au milieu des extremums.

EXERCICE 19 · SYN-F2-19



La rationnelle aux deux asymptotes

MÉTHODE La forme $x + 1 + \frac{4}{x-1}$ fait tout : limites, oblique, position, dérivées.

1. Division ou identification : $x^2 + 3 = (x-1)(x+1) + 4$, donc $a = b = 1, c = 4$.

2. En $1^\pm$: $\frac{4}{x-1} \rightarrow \pm\infty$, asymptote verticale $x = 1$. En $\pm\infty$: $g(x) - (x+1) = \frac{4}{x-1} \rightarrow 0$, asymptote oblique $y = x + 1$, et $g \rightarrow \pm\infty$. Position : $\frac{4}{x-1} > 0$ pour $x > 1$ (courbe au-dessus de l'oblique), < 0 pour $x < 1$ (au-dessous).

3. $g'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
g	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$	6	$+\infty$

Maximum local $(-1; -2)$, minimum local $(3; 6)$.

4. $g''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$: concave sur $]-\infty; 1[$, convexe sur $]1; +\infty[$. La convexité change de part et d'autre de 1, mais $1 \notin \mathcal{D}_g$: un point d'inflexion est un point *de la courbe*, et il n'y a pas de point de la courbe en $x = 1$. Aucune inflexion.

5. Tracé : deux branches d'hyperbole généralisée, chacune coincée entre ses deux asymptotes, avec les extremums locaux $(-1; -2)$ et $(3; 6)$.

COMMENTAIRES

La question 4 est le piège conceptuel de la partie : changer de convexité ne suffit pas, il faut un point où basculer. Même moralité qu'à l'exercice 13 : les théorèmes du chapitre vivent sur des **intervalles**, et $\mathcal{D}_g$ n'en est pas un.

EXERCICE 20 · SYN-F2-20



La famille $x e^{-ax}$

MÉTHODE Une seule étude paramétrée ; les lieux s'obtiennent en éliminant a entre l'abscisse et l'ordonnée du point suivi.

1. Posons $t = ax$ ($t \rightarrow +\infty$ avec x , car $a > 0$) : $f_a(x) = \frac{1}{a} t e^{-t} = \frac{1}{a} \cdot \frac{t}{e^t} \rightarrow 0$ par croissances comparées (F1). Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = 0$.

2. $f'_a(x) = (1 - ax) e^{-ax}$, du signe de $1 - ax$: croissante sur $[0; \frac{1}{a}]$, décroissante ensuite ; maximum en $x = \frac{1}{a}$, de valeur $f_a(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a} e^{-1} = \frac{1}{e a}$. Tableau : de $f_a(0) = 0$, montée jusqu'à $\frac{1}{e a}$, descente vers 0.

3. $f''_a(x) = -a e^{-ax} + (1 - ax)(-a) e^{-ax} = a(ax - 2) e^{-ax}$, du signe de $ax - 2$: concave sur $[0; \frac{2}{a}]$, convexe ensuite ; inflexion en $(\frac{2}{a}; \frac{2}{a} e^{-2})$.

4. Sommet : $x_s = \frac{1}{a}$ et $y_s = \frac{1}{e a} = \frac{x_s}{e}$; quand a parcourt $]0; +\infty[$, x_s parcourt $]0; +\infty[$: les sommets décrivent la droite $y = \frac{x}{e}$ privée de l'origine. De même $y_i = \frac{2}{a} e^{-2} = x_i e^{-2}$: les inflexions décrivent $y = \frac{x}{e^2}$ privée de l'origine. Sur le tracé, f_1 et f_2 culminent sur la première droite et basculent sur la seconde.

COMMENTAIRES

Éliminer le paramètre entre x et y : le geste, nouveau, reviendra en force avec les familles de fonctions du bac. Et le résultat surprend : les sommets s'alignent, non sur une courbe compliquée, mais sur une droite passant par l'origine, de pente $\frac{1}{e}$.

La famille des cloches

MÉTHODE Tout est composée de $u = -ax^2$; le paramètre ne change que l'échelle horizontale.

1. $g_a(0) = 1$ pour tout a ; $-ax^2 \rightarrow -\infty$ et $e^X \rightarrow 0$: limites nulles en $\pm\infty$. $g_a(-x) = e^{-a(-x)^2} = g_a(x)$: la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. $g'_a(x) = -2ax e^{-ax^2}$, du signe de $-x$: croissante sur $]-\infty; 0]$, décroissante sur $[0; +\infty[$, maximum $(0; 1)$.
2. $g''_a(x) = -2a e^{-ax^2} + (-2ax)(-2ax) e^{-ax^2} = 2a(2ax^2 - 1) e^{-ax^2}$, du signe de $2ax^2 - 1$: concave sur $[-\frac{1}{\sqrt{2a}}; \frac{1}{\sqrt{2a}}]$, convexe à l'extérieur; les épaules sont les inflexions $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2a}}$.
3. Quand a augmente, $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ diminue : les épaules se rapprochent de l'axe, la cloche se resserre. Sur le tracé, $g_{1/4}$ est la plus évasée, g_2 la plus étroite; toutes culminent en $(0; 1)$. Le paramètre a règle la *largeur* de la cloche, rien d'autre.
4. ★ $g_a(\pm \frac{1}{\sqrt{2a}}) = e^{-a \cdot \frac{1}{2a}} = e^{-1/2}$, indépendant de a : toutes les épaules sont à la même hauteur $\approx 0,61$. Avec $a = \frac{1}{2\sigma^2}$, l'abscisse des épaules vaut σ : sur une cloche de Gauss, l'écart type se *lit*, c'est la distance du sommet à l'inflexion.

La promesse du cours : le pic, sans logarithme

MÉTHODE Tout piloter par u : sa dérivée est proportionnelle à lui-même, et le signe de N'' se lit sur $u - 1$.

1. u est dérivable sur $[0; +\infty[$ (exponentielle composée d'une affine) et strictement positive; $u'(t) = 99 \times (-0,6) e^{-0,6t} = -0,6 u(t)$. Quand $t \rightarrow +\infty$, $u(t) \rightarrow 0$, donc $N(t) = \frac{1000}{1+u(t)} \rightarrow 1000$: tout le lycée, asymptotiquement.
2. Forme $\frac{1000}{1+u}$ avec $1+u \neq 0$:

$$N' = -1000 \frac{u'}{(1+u)^2} = -1000 \frac{-0,6 u}{(1+u)^2} = \frac{600 u}{(1+u)^2} > 0 :$$

N est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ (la rumeur ne régresse jamais).

RÉDACTION MODÈLE – LA DÉRIVÉE EN CHAÎNE PILOTÉE PAR u

3. N' est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables ($1+u$ ne s'annulant pas). Dérivons $N' = 600 u (1+u)^{-2}$:

$$\begin{aligned} N'' &= 600 u' (1+u)^{-2} + 600 u \times (-2)(1+u)^{-3} u' \\ &= 600 u' (1+u)^{-3} [(1+u) - 2u] = 600 (-0,6 u) \frac{1-u}{(1+u)^3} = \frac{360 u (u-1)}{(1+u)^3}, \end{aligned}$$

soit :

$$\forall t \geq 0, \quad N''(t) = \frac{360 u(t) (u(t) - 1)}{(1+u(t))^3}$$

4. Comme $u > 0$ et $(1+u)^3 > 0$, le signe de N'' est celui de $u - 1$. Or u est strictement décroissante de $u(0) = 99$ vers 0 : elle traverse la valeur 1 une seule fois, et N'' passe alors du positif au négatif. À cet

instant, $N = \frac{1000}{1+1} = 500$: **l'inflexion tombe exactement à la mi-hauteur**, convexe avant (l'emballlement), concave après (la décélération). La calculatrice situe le franchissement vers $t^* \approx 7,66$: le où est prouvé, seule la *date* attendra le logarithme.

COMMENTAIRES

Le tour de force est dans le choix de la variable : en raisonnant sur u plutôt que sur t , l'équation $N'' = 0$ se résout *sans* logarithme, et la propriété fameuse de la logistique (inflexion à $K/2$) sort en trois lignes. C'est la réponse théorique au jour de bascule de l'activité, et au « pic passé » des épidémiologistes : le pic des nouveaux cas, c'est N' maximal, c'est $N'' = 0$, c'est la mi-hauteur.

EXERCICE 23 · APR-F2-23

 $x^4 + kx^2$: la discussion

MÉTHODE Deux trinômes en x^2 commandent tout : $2x^2 + k$ pour les extremums, $6x^2 + k$ pour les inflexions.

1. $h'_k(x) = 4x^3 + 2kx = 2x(2x^2 + k)$. Si $k \geq 0$: $2x^2 + k \geq 0$, donc h'_k est du signe de x (pour $k = 0$, $h'_0 = 4x^3$ également) : un unique extremum, le minimum $(0; 0)$. Si $k < 0$: trois zéros 0 et $\pm\sqrt{-\frac{k}{2}}$; le tableau donne deux *minima* en $\pm\sqrt{-\frac{k}{2}}$, de valeur $-\frac{k^2}{4}$, et un maximum local en $(0; 0)$: la double cuvette.

2. $h''_k(x) = 12x^2 + 2k$. Si $k > 0$: $h''_k > 0$, convexe, aucune inflexion. Si $k = 0$: $h''_0 = 12x^2$ s'annule en 0 *sans changer de signe* : aucune inflexion non plus. Si $k < 0$: deux racines $\pm\sqrt{-\frac{k}{6}}$ où h''_k change de signe : exactement deux inflexions. Le compte est 0 ou 2, jamais 1 : les inflexions d'une quartique paire vont par paires symétriques.

3. Récapitulatif :

	$k < 0$	$k = 0$	$k > 0$
extremums	deux minima $\pm\sqrt{-\frac{k}{2}}$, max local 0	minimum 0	minimum 0
inflexions	$\pm\sqrt{-\frac{k}{6}}$	aucune	aucune
silhouette	double cuvette	cuvette aplatie	cuvette

4. En $k = 0$, les deux minima et les deux inflexions du cas $k < 0$ fusionnent en 0 et s'y annihilent : $h''_0 = 12x^2$ garde un zéro, trace de la collision, mais sans changement de signe. C'est exactement le contre-exemple du cours : $f''(0) = 0$ sans inflexion n'est pas une bizarrerie, c'est la photographie d'une transition.

VI. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

Archimède, vers 250 av. J.-C. : l'écart de la corde

MÉTHODE La corde est une droite par deux points de la parabole ; l'écart est un trinôme concave, donc son maximum est à l'annulation de sa dérivée.

1. Pente de la corde : $\frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b$; en passant par $(a ; a^2)$: $y = a^2 + (a + b)(x - a) = (a + b)x - ab$.

2. À l'abscisse $m = \frac{a+b}{2}$:

$$e(m) = (a + b) \frac{a + b}{2} - ab - \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 = \frac{(a + b)^2}{4} - ab = \frac{(a - b)^2}{4} = \frac{(b - a)^2}{4}.$$

3. $e(x) = -x^2 + (a + b)x - ab$ est un trinôme de coefficient dominant -1 : une parabole concave ($e'' = -2 < 0$), avec $e'(x) = -2x + (a + b)$ nul en $x = m$: l'écart croît jusqu'à m puis décroît, et son maximum est bien l'écart médian.

4. Remplacer $b - a$ par $\frac{b-a}{2}$ divise $\frac{(b-a)^2}{4}$ par 4. À chaque génération, les triangles inscrits d'Archimède perdent ainsi un facteur 4 d'aire totale, et l'aire du segment parabolique s'obtient en empilant $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{4}{3}$ fois le premier triangle.

Perlin, 1985 : la courbe qui anime les jeux vidéo

MÉTHODE Un polynôme de degré 3, quatre contraintes de raccord : tout se vérifie par calcul direct.

1. $S(0) = 0$, $S(1) = 1$; $S'(x) = 6x - 6x^2 = 6x(1 - x)$, donc $S'(0) = S'(1) = 0$. La courbe part de $(0 ; 0)$ et arrive en $(1 ; 1)$ avec des tangentes horizontales aux deux bouts : le raccord avec l'immobilité (avant 0, après 1) se fait sans à-coup de vitesse, contrairement à la droite, qui démarre et s'arrête en pente 1.

2. $\forall x \in]0 ; 1[$, $S'(x) = 6x(1 - x) > 0$: S est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

3. $S''(x) = 6 - 12x$: convexe sur $[0 ; \frac{1}{2}]$ (l'animation accélère), concave sur $[\frac{1}{2} ; 1]$ (elle freine), bascule au point d'inflexion $(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$, où la vitesse S' est maximale ($S'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$).

4. $S(1 - x) = 3(1 - x)^2 - 2(1 - x)^3 = 1 - 3x^2 + 2x^3 = 1 - S(x)$: la courbe est symétrique par rapport à son inflexion, le freinage est le miroir exact du démarrage.

COMMENTAIRES

Tout le chapitre en une seule petite courbe : raccord réglé par les dérivées aux bords, régimes lus sur S'' , inflexion au maximum de vitesse. La version moderne des moteurs, le *smootherstep* $6x^5 - 15x^4 + 10x^3$ de Perlin (2002), impose en plus $S'' = 0$ aux bords : raccord parfait jusqu'à l'accélération.

Cramer, 1728 : le juste prix, calculé

MÉTHODE Le prix moyen s'additionne terme à terme ; le plaisir moyen est une somme géométrique déguisée, que la formule d'A1 achève.

1. Chaque terme vaut $\frac{1}{2^k} \times 2^{k-1} = \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}$, donc $E_n = \frac{n}{2}$. Quand n grandit, le prix moyen dépasse tout seuil : au sens de la moyenne des gains, le jeu illimité vaut plus que toute somme, voilà le paradoxe.
2. $\frac{1}{2^k} \sqrt{2^{k-1}} = \frac{(\sqrt{2})^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{2})^{k-1}}{2^{k-1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{k-1}$: P_n est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Comme $|q| < 1$, le résultat encadré d'A1 donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1/2}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} \approx 1,71.$$

4. L'équivalent certain vérifie $\sqrt{G} = \frac{1}{2 - \sqrt{2}}$, soit $G = \left(\frac{1}{2 - \sqrt{2}} \right)^2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2} \approx \boxed{2,91 \text{ ducats}}$. Personne ne paie davantage parce que le plaisir attendu du jeu équivaut à celui d'un gain sûr de moins de trois ducats : le bon sens calculait déjà en utilité.
5. La racine carrée est **concave** (§ 3 du cours) : elle écrase les grands gains, et rester sous ses cordes (définition de la concavité) traduit exactement la préférence d'un gain moyen sûr à un pari écartelé entre deux extrêmes. Sans cette concavité, P_n divergerait comme E_n .

Huygens, 1646 : la chaîne n'est pas une parabole

MÉTHODE Un contact d'ordre deux rend les courbes indiscernables au crayon ; la convexité de l'écart les sépare partout ailleurs.

1. $c(0) = 1 = p(0)$; $c'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ donc $c'(0) = 0 = p'(0)$; $c''(x) = c(x)$ donc $c''(0) = 1 = p''(0)$: mêmes valeur, pente et courbure au sommet.
2. $(e^{x/2} - e^{-x/2})^2 = e^x - 2 + e^{-x} = 2c(x) - 2$, d'où $c(x) - 1 = \frac{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2}{2} \geq 0$, avec égalité seulement en $x = 0$.
3. $g'' = c'' - p'' = c - 1 \geq 0$: g est convexe sur $\mathbb{R}$.
4. g' est croissante (car $g'' \geq 0$) et $g'(0) = 0$: $g' \leq 0$ avant 0, ≥ 0 après, donc g décroît puis croît et atteint en 0 son minimum $g(0) = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $c(x) \geq p(x)$. Pour le caractère strict : $g'' = c - 1 > 0$ pour $x \neq 0$, donc g' est strictement monotone de part et d'autre, et $g(x) > 0$ pour $x \neq 0$. En une ligne, alternativement : g est convexe et sa tangente en 0 est l'axe des abscisses, que la courbe domine. La chaînette dépasse sa doublure partout hors du sommet, mais l'écart, nul à l'ordre deux, ne se voit qu'aux grandes amplitudes : Galilée avait vu l'approximation, Huygens a vu la différence.

Jensen, 1906 : l'inégalité pondérée par la tangente

MÉTHODE Deux inégalités de tangente, combinées avec les bons poids : le terme en $f'(m)$ s'annule par construction du barycentre.

1. m est compris entre a et b (barycentre à coefficients positifs), et un intervalle contient tout réel compris entre deux de ses points : $m \in I$.

2. f est convexe et deux fois dérivable : sa courbe domine sa tangente en m (théorème du § 4). En $x = a$ puis $x = b$:

$$f(a) \geq f'(m)(a - m) + f(m), \quad f(b) \geq f'(m)(b - m) + f(m).$$

3. Multiplions par $\lambda \geq 0$ et $1 - \lambda \geq 0$ puis additionnons :

$$\lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \geq f'(m) \underbrace{[\lambda a + (1 - \lambda)b - m]}_{=0} + f(m) = f(\lambda a + (1 - \lambda)b).$$

La tangente disparaît parce que m est *précisément* le barycentre des points d'évaluation avec les mêmes poids : le miracle est un choix.

4. Avec le carré et $\lambda = \frac{1}{3}$: $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \left(\frac{a + 2b}{3} \right)^2 \leq \frac{a^2 + 2b^2}{3}$

COMMENTAIRES

C'est la preuve de Hölder (1889) modernisée : là où la récurrence du cours empile des cordes, la tangente attrape *tous* les poids d'un coup. Comparer les deux démonstrations, c'est comparer deux styles : la combinatoire contre la géométrie.

Fibonacci, 1202 : la corde des marchands converge

MÉTHODE La convexité place la corde au-dessus de l'arc : chaque coupe tombe donc du côté négatif, et la suite monte, coïncée sous la racine.

1. Le croquis montre l'arc sous la corde. Comme $f(c_n) < 0 < f(b)$, la corde joignant $(c_n, f(c_n))$ à $(b, f(b))$ a des ordonnées de signes opposés à ses extrémités : étant une droite (strictement monotone en ordonnée le long du segment), elle coupe l'axe une seule fois, en un point c_{n+1} strictement compris entre c_n et b .

RÉDACTION MODÈLE – LA CONVEXITÉ COMME OUTIL DE PREUVE

2. Montrons que chaque coupe tombe du côté négatif. La fonction f est convexe sur $[a; b]$, donc sur $[c_n; b]$: par définition, sa corde y est **au-dessus** de l'arc. Au point $c_{n+1} \in]c_n; b[$, l'ordonnée de la corde vaut 0 (c'est sa définition), et celle de l'arc vaut $f(c_{n+1})$. Il s'ensuit :

$$f(c_{n+1}) \leq 0.$$

La convexité ne décore pas : elle dicte le côté où tombe chaque coupe.

3. La question 1 donne $c_{n+1} > c_n$: la suite est strictement croissante. Elle est majorée par ρ , car $f > 0$

sur $] \rho ; b]$: un point x_0 de cet intervalle où $f(x_0) = 0$ serait immédiatement un second zéro ; un point où $f(x_0) < 0$ en créerait un par le TVI entre x_0 et b (où $f(b) > 0$). Les deux cas contredisent l'unicité admise. Comme $f(c_n) < 0$ pour tout n , il vient $c_n \leq \rho$. Croissante et majorée, (c_n) converge (théorème de la limite monotone, A1) vers un réel $\ell \leq \rho < b$.

4. La relation s'écrit $c_{n+1} = c_n - f(c_n) \frac{b - c_n}{f(b) - f(c_n)}$. Par continuité de f (chapitre F1) et opérations sur les limites, le passage à la limite donne

$$\ell = \ell - f(\ell) \frac{b - \ell}{f(b) - f(\ell)}, \quad \text{d'où} \quad f(\ell) \frac{b - \ell}{f(b) - f(\ell)} = 0.$$

Or $b - \ell > 0$ et $f(b) - f(\ell) \geq f(b) > 0$: il reste $f(\ell) = 0$, donc $\ell = \rho$ par unicité. Les hypothèses ont chacune servi : la **convexité** à l'étage 2, la **monotonie bornée** (A1) à l'étage 3, la **continuité** (F1) à l'étage 4.

5. ★ Supposons deux zéros $z_1 < z_2$. La pente de la corde de a à z_1 vaut $\frac{0-f(a)}{z_1-a} > 0$, celle de z_1 à z_2 vaut 0 : l'inégalité des trois pentes appliquée à $a < z_1 < z_2$ exigerait $\frac{-f(a)}{z_1-a} \leq 0$, contradiction. Le zéro est unique.

VII. PYTHON, LE LABORATOIRE

EXERCICE 30 · SYN-F2-30

★★ ■ ⏳

La fausse position, d'un seul côté

MÉTHODE La théorie de l'exercice 29, exécutée : la borne b ne bouge jamais, parce que chaque coupe tombe côté négatif.

1. $f''(x) = 6x + 4 > 0$ sur $[1; 2]$: convexe ; et $f(1) = -7 < 0 < 16 = f(2)$: changement de signe.
2. À l'exécution, la borne $b = 2$ **ne bouge jamais** : chaque c vérifie $f(c) < 0$ strictement (car $c \neq \rho$, le zéro étant unique), donc $f(a)f(c) > 0$ et c'est la branche `else` qui s'exécute. Six décimales stables de 1,368808... dès l'étape 8.
3. C'est l'exercice 29, question 2 : f étant convexe avec $f(b) > 0$, la corde est au-dessus de l'arc, donc chaque coupe tombe du côté où $f \leq 0$, le gauche. Le résultat du chapitre qui prédit tout : la corde d'une fonction convexe domine son arc.
4. Huit étapes contre vingt pour six décimales justes : la corde va plus de deux fois plus vite que le ciseau sur cette équation, tout en gardant, comme lui, un encadrement à chaque instant. Comptage automatique : le critère d'arrêt doit porter sur $|f(c)|$ (ou sur la stabilité de a), jamais sur la largeur $b - a$, qui ne tend pas vers 0 ici puisque b ne bouge pas.

```
1 def fausse_position(f, a, b, eps):
2     n = 0
3     c = a
4     while abs(f(c)) > eps:
5         c = b - f(b) * (b - a) / (f(b) - f(a))
6         if f(a) * f(c) <= 0:
7             b = c
8         else:
9             a = c
10        n = n + 1
11    return c, n
```

Pour $\text{eps} = 10^{-6}$, ce script renvoie $(1,3688080 \dots ; 9)$: neuf tours, et non huit, car il en faut un de plus pour constater la stabilité que l'œil, à la question 2, lisait dès la huitième valeur.

COMMENTAIRES

Détail honnête : ici l'encadrement $[a; b]$ ne rétrécit que d'un côté, donc $b - a$ ne tend pas vers 0 ; le bon critère d'arrêt porte sur la stabilité de a (ou sur $|f(a)|$), pas sur la largeur. C'est le prix de la borne fixe, et la raison pour laquelle les bibliothèques modernes hybrident corde et ciseau.

EXERCICE 31 · SYN-F2-31



Le détecteur d'inflexions

MÉTHODE $d1$ = pente discrète, $d2$ = courbure discrète ; le détecteur cherche un changement de signe de $d2$, pas une annulation.

1. Sur rumeur : $d1 = [5, 10, 20, 35, 65, 95, 130, 140, 115, 80, 45, 25]$ (les nouveaux du jour de l'activité), puis $d2 = [5, 10, 15, 30, 30, 35, 10, -25, -35, -35, -20]$. Chaque terme de $d2$ mesure la *variation* de la pente d'un jour au suivant : c'est la dérivée de la dérivée, en version discrète.

2. `detecte_bascule(rumeur)` renvoie `8` (changement de signe entre $d2[6] = 10$ et $d2[7] = -25$) ; `detecte_bascule(video)` renvoie `None` ($d2 = [2, 3, 5, 10, 16, 29, 48]$, toujours positive). Accord complet avec l'activité : bascule au jour 8 pour la rumeur, aucune bascule pour la vidéo.

3. Le test traduit : « f'' s'annule en changeant de signe » (propriété de détection du § 5). Avec `or`, le détecteur renverrait 2 sur les deux listes, dès le premier $d2[j] > 0$: il verrait une bascule dans toute zone convexe, exactement l'erreur que le contre-exemple x^4 du cours interdit.

4. ★ Le maximum de $d1$ vaut 140, au jour 8 : le détecteur et le maximum désignent ici le *même* jour, il n'y a pas de décalage. Il pourrait y en avoir un d'une journée (l'activité opposait pentes graphiques et nouveaux du jour) : des mesures discrètes quotidiennes ne datent rien de plus fin qu'une journée, et tout écart d'un jour entre deux définitions de la bascule est du bruit d'échantillonnage, pas une contradiction.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les scripts complets du laboratoire, le tableau de la course à trois entre la dichotomie, la corde et la tangente, et le détecteur d'inflexions lâché sur de vraies données épidémiques : la suite vous attend sur le compagnon numérique du chapitre.