



CORRIGÉ · F3. FONCTION LOGARITHME

Corrigé des trente et un exercices, feuille en main

RÉDACTION MODÈLE : la copie idéale, à imiter · MÉTHODE : la stratégie en une ligne, puis le calcul · COMMENTAIRES :
ce que la solution enseigne

I. GAMMES

EXERCICE 1 · APL-F3-01



Les allers-retours

MÉTHODE Les deux réciprocités, dans les deux sens, et la famille algébrique pour préparer le terrain quand l'exposant se complique.

1. $e^{\ln 5} = 5$. 2. $\ln(e^{-3}) = -3$. 3. $e^{-3 \ln 2} = (e^{\ln 2})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$. 4. $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$.
5. $\ln \frac{1}{e^2} = -\ln(e^2) = -2$. 6. $3 \ln 2 - \ln 4 = \ln 8 - \ln 4 = \ln 2$, donc $e^{3 \ln 2 - \ln 4} = 2$. 7. $\ln(e \times e^{-5}) = \ln(e^{-4}) = -4$. 8. $\exp(1 + \ln 7) = e^1 \times e^{\ln 7} = 7e$.

EXERCICE 2 · APL-F3-02



Tout en $\ln 2$ et $\ln 3$

MÉTHODE Décomposer l'argument en produit de puissances de 2 et de 3 ; si un autre facteur premier apparaît, la famille algébrique ne peut plus rien.

1. $96 = 2^5 \times 3 : \ln 96 = 5 \ln 2 + \ln 3$.
2. $\frac{16}{27} = \frac{2^4}{3^3} : \ln \frac{16}{27} = 4 \ln 2 - 3 \ln 3$.
3. $\ln \sqrt{27} = \frac{1}{2} \ln(3^3) = \frac{3}{2} \ln 3$.
4. $0,75 = \frac{3}{4} : \ln 0,75 = \ln 3 - 2 \ln 2$.
5. $\ln 1,5 + \ln 6 = \ln(1,5 \times 6) = \ln 9 = 2 \ln 3$.
6. Les propriétés du chapitre transforment produits, quotients et puissances ; or 5 n'est pas un produit de puissances de 2 et de 3 : aucune combinaison de $\ln 2$ et $\ln 3$ par la famille algébrique n'atteint $\ln 5$.

Le permis de logarithme

MÉTHODE *Un seul réflexe : résoudre $u(x) > 0$, et savoir le faire sur un trinôme, un quotient, une exponentielle et... un logarithme.*

- $2x - 6 > 0 \iff x > 3 : \mathcal{D}_1 =]3; +\infty[.$
- $x^2 - 1 > 0 \iff x < -1 \text{ ou } x > 1 : \mathcal{D}_2 =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[.$
- Le quotient $\frac{x+1}{3-x}$ est strictement positif quand numérateur et dénominateur ont le même signe strict : tableau de signes éclair, $\mathcal{D}_3 =]-1; 3[.$
- Le discriminant de $x^2 + x + 1$ vaut $\Delta = -3 < 0$: le trinôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{D}_4 = \mathbb{R}.$
- $1 - e^x > 0 \iff e^x < 1 \iff x < 0$ (stricte croissance de $\exp$) : $\mathcal{D}_5 =]-\infty; 0[.$
- Il faut d'abord $x > 0$ (permis du logarithme), puis $\ln x \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq 1 : \mathcal{D}_6 = [1; +\infty[.$

COMMENTAIRES

L'item 6 empile deux permis : celui du logarithme (strict), celui de la racine (large). L'ordre des contraintes n'est pas décoratif : c'est le second qui absorbe le premier.

Équations éclair

MÉTHODE *Domaine d'abord, transformation en équivalence ensuite, tri des candidats à la fin.*

- Domaine $]0; +\infty[: \ln x = 4 \iff x = e^4. \mathcal{S} = \{e^4\}.$
- Sur $\mathbb{R} : e^{3x} = 5 \iff 3x = \ln 5. \mathcal{S} = \left\{\frac{\ln 5}{3}\right\}.$
- Domaine : $x + 3 > 0$ et $2x - 1 > 0$, soit $x > \frac{1}{2}$. Sur ce domaine, l'équation équivaut à $x + 3 = 2x - 1$, soit $x = 4$, qui vérifie $4 > \frac{1}{2}$. $\mathcal{S} = \{4\}.$

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 4 · L'ÉQUATION LOGARITHMIQUE COMPLÈTE

Le domaine exige $x > 0$ et $x - 1 > 0$: on résout sur $\mathcal{D} =]1; +\infty[.$

Sur $\mathcal{D}$, la propriété fondamentale s'applique aux deux facteurs strictement positifs :

$$\ln x + \ln(x - 1) = \ln 6 \iff \ln(x(x - 1)) = \ln 6 \iff x^2 - x - 6 = 0,$$

la dernière équivalence venant de la stricte croissance de $\ln$. Le trinôme a pour racines 3 et -2 (discriminant 25).

Trions : $-2 \notin \mathcal{D}$, tandis que $3 \in \mathcal{D}$. Ainsi :

$$\mathcal{S} = \{3\}$$

COMMENTAIRES

La technique pivot de la partie I tient en trois temps : **domaine**, **équivalences**, **tri**. Le candidat -2 n'est pas une erreur de calcul, il est le produit normal de la transformation ; c'est le domaine qui juge.

Sans calculatrice

MÉTHODE Tout ramener à des comparaisons d'images par des fonctions strictement croissantes ($\ln$, $\exp$), ou à la bosse de l'exercice 11.

- $3 \ln 2 = \ln 8$ et $2 \ln 3 = \ln 9$; comme $8 < 9$ et que $\ln$ est strictement croissante : $3 \ln 2 < 2 \ln 3$.
- Par stricte croissance de $\exp$, comparer $\ln 100$ et 5 revient à comparer 100 et e^5 . Or $e > 2,7$ donne $e^5 > 2,7^5 = 143,5 > 100$ (le calcul de $2,7^5$ se fait à la main : $2,7^2 = 7,29$, puis $7,29^2 \times 2,7$). Ainsi $\ln 100 < 5$.
- Chemin direct : $\frac{\ln 5}{5} < \frac{\ln 3}{3} \iff 3 \ln 5 < 5 \ln 3 \iff \ln 125 < \ln 243$, ce qui est vrai. (Chemin par l'exercice 11 : 3 et 5 sont tous deux au-delà de e , où la bosse décroît strictement.)
- Comparer $\ln 10$ et $\frac{7}{3}$ revient, par stricte croissance de $\exp$, à comparer $10^3 = 1000$ et e^7 . Or $e^7 > 2,7^7 = 1046 > 1000$: ainsi $3 \ln 10 < 7$, donc $\ln 10 < \frac{7}{3}$.

COMMENTAIRES

La morale des questions 2 et 4 : une comparaison avec $\ln$ se *transporte* par $\exp$ vers une comparaison d'entiers, où la main suffit. La valeur approchée $\ln 10 \approx 2,30$ du cours donne la bonne intuition, jamais la preuve : l'écart avec $\frac{7}{3}$ n'est que de 0,03.

II. L'OUTIL À SEUILS

Seuils en batterie

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1 · LE SEUIL RÉDIGÉ

Les deux membres de $0,85^n \leq 0,01$ sont strictement positifs : par stricte croissance de $\ln$, l'inéquation équivaut à

$$n \ln 0,85 \leq \ln 0,01.$$

Or $0 < 0,85 < 1$, donc $\ln 0,85 < 0$: la division renverse le sens de l'inégalité,

$$n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,85} \approx 28,34.$$

Le plus petit entier qui convient est donc $\boxed{n = 29}$.

- Même chemin, mais $\ln 1,03 > 0$: le sens est conservé, $n \geq \frac{\ln 3}{\ln 1,03} \approx 37,17$, d'où $n = 38$.
- L'inéquation équivaut à $0,6^n \leq 0,001$, puis ($\ln 0,6 < 0$, renversement) à $n \geq \frac{\ln 0,001}{\ln 0,6} \approx 13,52$: $n = 14$.

Le bilan du second degré

MÉTHODE Poser $X = \ln x$ ou $Y = e^x$, résoudre le trinôme, puis revenir à l'inconnue en triant ce que la fonction auxiliaire autorise.

1. Domaine $]0; +\infty[$. Posons $X = \ln x : X^2 - 3X + 2 = 0$ a pour racines 1 et 2. Donc $\ln x = 1$ ou $\ln x = 2 : S = \{e; e^2\}$.
2. Posons $Y = e^x : Y^2 - 3Y - 4 = 0$ a pour racines 4 et -1 . Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$: la racine -1 n'est la valeur de e^x pour aucun réel, on l'écarte. Reste $e^x = 4$, d'où $S = \{\ln 4\}$ (c'est-à-dire $2 \ln 2$).
3. Domaine $]0; +\infty[$, et $\ln(x^2) = 2 \ln x$ sur ce domaine. Avec $X = \ln x : X^2 \leq 2X \iff X(X-2) \leq 0 \iff 0 \leq X \leq 2$, c'est-à-dire $1 \leq x \leq e^2$. $S = [1; e^2]$.

COMMENTAIRES

Question 2 : écarter $Y = -1$ avec la raison (la stricte positivité de l'exponentielle) vaut autant de points que la résolution. Question 3 : $\ln(x^2) = 2 \ln x$ n'est licite que parce que le domaine impose $x > 0$; pour $x < 0$, il aurait fallu écrire $2 \ln |x|$.

Inéquations complètes

MÉTHODE Domaine, transformation en équivalence, et retour au second degré ou au tableau de signes; le domaine a toujours le dernier mot.

1. Domaine : $3 - x > 0$ et $x > 0$, soit $]0; 3[$. Sur ce domaine, $2 \ln x = \ln(x^2)$ et, par stricte croissance de $\ln$:

$$\ln(3 - x) \geq \ln(x^2) \iff 3 - x \geq x^2 \iff x^2 + x - 3 \leq 0.$$

Les racines du trinôme sont $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$; sur le domaine, seule compte la contrainte $x \leq \frac{\sqrt{13}-1}{2} \approx 1,30$, la racine négative étant hors domaine. Ainsi $S =]0; \frac{\sqrt{13}-1}{2}]$.

2. Domaine $]0; +\infty[$ (qui rend $x + 2 > 0$ automatique). L'inéquation équivaut à $\ln(x(x+2)) < \ln 3$, puis à $x^2 + 2x - 3 < 0$, dont les racines sont 1 et -3 : le trinôme est strictement négatif sur $] -3; 1[$. Avec le domaine : $S =]0; 1[$.

3. Domaine $]0; +\infty[$. Sur ce domaine, $x > 0$ entraîne $e^x > 1$, donc $e^x - 1 > 0$: le premier facteur est strictement positif partout. Le produit est donc du signe de $\ln x + 1$, positif ou nul si et seulement si $x \geq e^{-1}$. Ainsi $S = [\frac{1}{e}; +\infty[$.

La règle des 72

MÉTHODE Le seuil de doublement en équation, puis la tangente en 1 pour comprendre l'approximation des banquiers.

1. Après T années à $t\%$, le capital est multiplié par $(1 + \frac{t}{100})^T$. Dans le modèle continu, le doublement a lieu quand $(1 + \frac{t}{100})^T = 2$, soit, en prenant le logarithme des deux membres (strictement positifs) : $T \ln(1 + \frac{t}{100}) = \ln 2$, d'où

$$T(t) = \frac{\ln 2}{\ln(1 + \frac{t}{100})}.$$

Valeurs à 10^{-2} près : $T(2) = 35,00$, $T(8) = 9,01$, $T(12) = 6,12$.

2. La règle annonce 36, 9 et 6 : excellente autour de $t = 8$ (écart un centième), elle surestime d'un an à 2% et d'un dixième à 12%. C'est autour de 8% que $72/t$ colle le mieux à la vraie valeur.

3. Avec l'approximation $\ln(1 + \frac{t}{100}) \approx \frac{t}{100}$:

$$T(t) \approx \frac{\ln 2}{t/100} = \frac{100 \ln 2}{t} \approx \frac{69,3}{t} :$$

la règle exacte serait celle du 69,3. Les banquiers ont préféré 72, à peine plus grand (ce qui compense le fait que $\ln(1 + u) < u$ rend T réel un peu plus grand que $69,3/t$), et surtout divisible par 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 et 12 : la règle se pratique de tête pour tous les taux usuels.

III. ÉTUDES TYPE BAC

La première étude

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1 · LES LIMITES AUX BORNES

En 0^+ . Quand $x \rightarrow 0^+$: $\frac{x^2}{2} \rightarrow 0$ et $\ln x \rightarrow -\infty$, donc $-\ln x \rightarrow +\infty$. Par somme : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

En $+\infty$. La forme est indéterminée ($+\infty - \infty$). Factorisons par le terme dominant : pour tout $x > 0$,

$$f(x) = x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\ln x}{x^2} \right).$$

Par croissances comparées (théorème du cours, § 5, cas $n = 2$), $\frac{\ln x}{x^2} \rightarrow 0$: le facteur entre parenthèses tend vers $\frac{1}{2} > 0$, et $x^2 \rightarrow +\infty$. Par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme différence de fonctions dérivables (polynôme et $\ln$), et

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$

Sur le domaine, $x > 0$ et $x + 1 > 0$: $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

3. Le tableau montre que f atteint en 1 son minimum $f(1) = \frac{1}{2}$. Ainsi $\forall x \in]0; +\infty[$, $\frac{x^2}{2} - \ln x \geq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \ln x \leq \frac{x^2 - 1}{2}$$

avec égalité si et seulement si $x = 1$ (le minimum n'est atteint qu'en ce point, la monotonie étant stricte de part et d'autre).

4. f' est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$, $f''(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$: la fonction f est convexe sur $]0; +\infty[$.

EXERCICE 11 · SYN-F3-11



La bosse

MÉTHODE L'étude modèle de $\frac{\ln x}{x}$: quotient dérivable, zéro unique du numérateur de g' , croissances comparées aux deux bouts. Le tableau resservira quatre fois dans la feuille.

1. En 0^+ : $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc, par produit, $g(x) = \ln x \times \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$. En $+\infty$: par le théorème des croissances comparées du cours (§ 5), $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2. g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

du signe de $1 - \ln x$: positif pour $x < e$, négatif au-delà.

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$		+ 0 -	
g	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

Le maximum vaut $g(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$, atteint en $x = e$: ce sont les coordonnées lues sur la figure.

3. $g(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$; et $g(x) < 0 \iff \ln x < 0 \iff x \in]0; 1[$ (le dénominateur est strictement positif).

4. On a $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{e}$ (car $e < 4$). Sur $]0; e[$, g est continue et strictement croissante de $-\infty$ vers $\frac{1}{e}$: le corollaire du TVI donne une unique solution dans cet intervalle. Sur $]e; +\infty[$, g est continue et strictement décroissante de $\frac{1}{e}$ vers 0, et $\frac{1}{4} > 0$: une unique solution également. L'équation $g(x) = \frac{1}{4}$ possède donc exactement deux solutions.

Prolonger l'impossible

MÉTHODE L'étude de $x \ln x$, puis le prolongement en 0 : la ROC du cours autorise le point, le taux d'accroissement juge la tangente.

1. C'est la démonstration exigible du cours (§ 5) : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$. Le point vert (0 ; 0) de la figure est le prolongement que cette limite autorise.
2. h est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit, et $\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) = \ln x + 1$, qui s'annule en e^{-1} , négatif avant, positif après. En $+\infty$, $h(x) \rightarrow +\infty$ (produit de deux facteurs tendant vers $+\infty$).

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$h'(x)$		— 0 +	
h	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

(La borne 0 du tableau enregistre la limite de la question 1, pas une valeur : le domaine reste ouvert en 0.)

3. $h(1) = 0$ et $h'(1) = 1$: la tangente en 1 a pour équation $y = x - 1$. De plus h' est dérivable sur $]0; +\infty[$ avec $\forall x \in]0; +\infty[, h''(x) = \frac{1}{x} > 0$: h est convexe, et sa courbe est donc au-dessus de chacune de ses tangentes (chapitre F2), en particulier : $\forall x \in]0; +\infty[, x \ln x \geq x - 1$.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 4 · LE TAUX D'ACCROISSEMENT DU PROLONGEMENT

Notons encore h la fonction prolongée par $h(0) = 0$. Elle est dérivable en 0 si et seulement si le taux d'accroissement en 0 admet une limite finie. Or, pour tout $x > 0$:

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{x \ln x}{x} = \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty.$$

Le taux n'a pas de limite finie : la fonction prolongée **n'est pas dérivable en 0**. Géométriquement, la courbe arrive en l'origine avec une tangente verticale.

COMMENTAIRES

Le trio de la question 4 est un grand classique : *prolongeable* (la limite existe), *continu* (par construction), mais *non dérivable* (le taux explose). Les trois notions sont distinctes, et c'est cette fonction-là qu'on cite pour le prouver.

EXERCICE 13 · SYN-F3-13



La famille à un paramètre

MÉTHODE Cas $k \leq 0$ par stricte monotonie; cas $k > 0$ ramené à la bosse de l'exercice 11 par division; la tangence ferme la discussion.

1. Pour $k \leq 0$, la fonction $\varphi_k : x \mapsto \ln x - kx$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ avec $\varphi'_k(x) = \frac{1}{x} - k > 0$: strictement croissante. Ses limites sont $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$ (somme de deux termes dont l'un tend vers $+\infty$, l'autre étant positif ou tendant vers $+\infty$). Le corollaire du TVI donne une unique solution.
2. Pour $x > 0$, on peut diviser par $x \neq 0$: $\ln x = kx \iff \frac{\ln x}{x} = k$. Le nombre de solutions de (E_k) est donc le nombre d'antécédents de k par la fonction g de l'exercice 11. Son tableau donne : **deux** solutions si $0 < k < \frac{1}{e}$ (une sur chaque branche, TVI strict), **une** si $k = \frac{1}{e}$ (le maximum), **aucune** si $k > \frac{1}{e}$.
3. Sur la figure : la droite verte ($k = 0,3 < \frac{1}{e}$) coupe la courbe deux fois, la grise ($k = 0,55$) jamais, et la rouge, $y = \frac{x}{e}$, touche la courbe *sans la traverser* au point $(e; 1)$: c'est le cas de tangence, frontière entre les deux régimes.
4. ★ La tangente à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse a a pour équation $y = \frac{x}{a} + \ln a - 1$. Elle passe par l'origine si et seulement si $\ln a - 1 = 0$, c'est-à-dire $a = e$: la tangente vaut alors $y = \frac{x}{e}$, de pente $\frac{1}{e}$. La valeur critique est retrouvée sans l'exercice 11.

EXERCICE 14 · SYN-F3-14



L'équation sans formule

MÉTHODE Une différence strictement croissante, le corollaire du TVI, puis la calculatrice en balayage encadré.

1. d est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme, et $\forall x \in]0; +\infty[, d'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$: d est strictement croissante.
2. d est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0; +\infty[$; $d(1) = 0 - 1 = -1 < 0$ et $d(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'un unique réel $x^* \in]1; e[$ tel que $d(x^*) = 0$; la stricte croissance sur tout le domaine assure qu'il n'y a aucune autre solution ailleurs.
3. Balayage au centième (valeurs recalculées) : $d(1,76) \approx -0,003 < 0$ et $d(1,77) \approx 0,006 > 0$, d'où l'encadrement $1,76 < x^* < 1,77$.
4. Pour $x > 0$, en multipliant par $x > 0$ (sens conservé, équivalence) : $\ln x = \frac{1}{x} \iff x \ln x = 1$. Les deux équations ont exactement les mêmes solutions : x^* est aussi l'unique solution de $x \ln x = 1$.

EXERCICE 15 · SYN-F3-15



La suite au point fixe

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1 · LA RÉCURRENCE DE MINORATION

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

Initialisation. $u_0 = 2 \geq 1$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons $u_n \geq 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, et montrons que $u_{n+1} \geq 1$. Par stricte

croissance de $\ln$ sur $]0; +\infty[: u_n \geq 1$ entraîne $\ln u_n \geq \ln 1 = 0$, donc

$$u_{n+1} = 1 + \ln u_n \geq 1 + 0 = 1.$$

Conclusion. Par le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question 1, $u_n \geq 1 > 0$, et l'inégalité de la tangente s'applique : $\ln u_n \leq u_n - 1$. Ainsi

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \ln u_n - u_n \leq 1 + (u_n - 1) - u_n = 0 :$$

la suite (u_n) est décroissante.

3. Décroissante et minorée par 1, la suite converge (théorème de la limite monotone, chapitre A1) vers une limite $\ell \geq 1$. La fonction $x \mapsto 1 + \ln x$ est continue sur $[1; +\infty[$: l'image de la suite convergente (u_n) converge vers l'image de la limite (chapitre F1), et le passage à la limite dans $u_{n+1} = 1 + \ln u_n$ donne $\ell = 1 + \ln \ell$.

4. L'équation $x = 1 + \ln x$ sur $[1; +\infty[$ s'écrit $x - 1 - \ln x = 0$, c'est-à-dire : le cas d'égalité de l'inégalité $\ln x \leq x - 1$. Or le cours précise que cette égalité n'a lieu qu'en $x = 1$: l'unique solution est 1, et comme $\ell \geq 1$ vérifie l'équation, $\boxed{\ell = 1}$. C'est précisément le cas d'égalité qui rend la limite *unique* : sans lui, tout point de tangence aurait pu accueillir la suite.

5. ★ Posons $\varepsilon_n = u_n - 1 \geq 0$. Alors $\varepsilon_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \ln u_n = \ln(1 + \varepsilon_n)$. Or, près de 0, $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon$ (la tangente en 1, encore elle) : chaque itération reproduit l'écart presque à l'identique, au lieu de le multiplier par un facteur strictement plus petit que 1. La contraction est de plus en plus molle à mesure qu'on approche : c'est la signature d'un point fixe dont la pente vaut exactement 1, et la raison du freinage interminable.

EXERCICE 16 · SYN-F3-16



La meilleure constante

MÉTHODE Un portrait de famille complet (limites, tableau paramétré, convexité), une discussion par le signe du minimum, et la récolte d'une inégalité optimale.

Partie A.

1. En 0^+ : $x \rightarrow 0$ et $-k \ln x \rightarrow +\infty$ (car $k > 0$), donc par somme $f_k(x) \rightarrow +\infty$. En $+\infty$, factorisons par x : $f_k(x) = x(1 - k \frac{\ln x}{x})$. Par croissances comparées (cours, § 5), $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$: la parenthèse tend vers 1, et par produit $f_k(x) \rightarrow +\infty$.

2. f_k est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme, et $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'_k(x) = 1 - \frac{k}{x} = \frac{x-k}{x}$, du signe de $x - k$.

x	0	k	$+\infty$
$f'_k(x)$		- 0 +	
f_k	$+\infty$	$k(1 - \ln k)$	$+\infty$

Le minimum, atteint en $x = k$, vaut $f_k(k) = k - k \ln k = k(1 - \ln k)$.

3. f'_k est dérivable et $\forall x \in]0; +\infty[$, $f''_k(x) = \frac{k}{x^2} > 0$: chaque f_k est convexe, et sa courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes (chapitre F2).

Partie B.

4. Comme $k > 0$, le minimum $k(1 - \ln k)$ est du signe de $1 - \ln k$: strictement positif si $k < e$, nul si $k = e$, strictement négatif si $k > e$.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 5 · LA DISCUSSION PARAMÉTRÉE

Cas $0 < k < e$. Le minimum de f_k est strictement positif : $\forall x \in]0; +\infty[, f_k(x) > 0$. L'équation n'a **aucune solution**.

Cas $k = e$. Le minimum vaut 0 et n'est atteint qu'en $x = k = e$ (stricte monotonie de part et d'autre) : l'équation a **une unique solution**, $x = e$.

Cas $k > e$. Sur $]0; k]$: f_k est continue (car dérivable) et strictement décroissante, avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_k(x) = +\infty$ et $f_k(k) = k(1 - \ln k) < 0$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires garantit une unique solution dans $]0; k[$. Sur $[k; +\infty[$: f_k est continue et strictement croissante, de $f_k(k) < 0$ vers $+\infty$: une unique solution également. Au total, **exactement deux solutions**.

6. Pour $x > 0$, $f_k(x) = 0 \iff x = k \ln x \iff \ln x = \frac{x}{k}$: les solutions sont les abscisses d'intersection de la courbe de $\ln$ avec la droite $y = \frac{x}{k}$, de pente $\frac{1}{k}$. Or la figure de l'exercice 13 montre exactement ces droites : pente $\frac{1}{k} < \frac{1}{e}$ (c'est-à-dire $k > e$), deux intersections ; pente $\frac{1}{e}$ ($k = e$), la tangence ; pente supérieure ($k < e$), aucune. Les deux discussions coïncident, cas par cas.

Partie C.

7. Le cas $k = e$ de la partie B dit que le minimum de f_e vaut 0 : $\forall x \in]0; +\infty[, x - e \ln x \geq 0$, c'est-à-dire

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \ln x \leq \frac{x}{e}$$

avec égalité si et seulement si $x = e$. C'est une amélioration stricte de $\ln x < x$: la pente de la borne passe de 1 à $\frac{1}{e} \approx 0,37$. Et la constante est la meilleure possible : pour tout $k > e$, la partie B fournit des réels où $x - k \ln x < 0$, c'est-à-dire où $\ln x > \frac{x}{k}$: aucune pente plus petite que $\frac{1}{e}$ ne majore $\ln$ partout.

8. La tangente à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse e passe par $(e; 1)$ avec la pente $\ln'(e) = \frac{1}{e}$: son équation est $y = 1 + \frac{x-e}{e} = \frac{x}{e}$. La droite de la question 7 est cette tangente, et l'inégalité dit que la courbe (concave) est sous elle : la question 4 de l'exercice 13 est démontrée.

9. Par la question 7 appliquée en $x = \pi \neq e$ (inégalité stricte) : $\ln \pi < \frac{\pi}{e}$, donc $e \ln \pi < \pi$, c'est-à-dire $\ln(\pi^e) < \ln(e^\pi)$, et par stricte croissance de $\ln$: $\pi^e < e^\pi$.

10. ★ Pour $k > e$: $f_k(1) = 1 > 0$ et $f_k(e) = e - k < 0$, avec $1 < e < k$: les deux valeurs sont prises sur l'intervalle $]0; k]$ où f_k est strictement décroissante et continue. L'unique zéro de cette branche, a_k , est donc dans $]1; e[$. De $f_k(a_k) = 0$ on tire $\ln a_k = \frac{a_k}{k}$, d'où l'encadrement

$$0 < \ln a_k = \frac{a_k}{k} \leq \frac{e}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Par le théorème des gendarmes, $\ln a_k \rightarrow 0$, et par composition avec l'exponentielle, continue en 0 : $a_k = e^{\ln a_k} \rightarrow e^0 = 1$.

COMMENTAIRES

Tout le format examen est là : une **fonction auxiliaire paramétrée** dont le signe du minimum pilote la discussion, le TVI *strictement monotone* invoqué branche par branche, et une inégalité récoltée en identifiant le cas critique. La question 10 enchaîne trois théorèmes (TVI, gendarmes, composition) en cinq lignes : c'est la densité attendue en fin d'épreuve.

IV. LES DÉMONSTRATIONS PROMISES

EXERCICE 17 · THE-F3-17



La propriété fondamentale

MÉTHODE Comparer les exponentielles des deux membres : si elles coïncident, l'injectivité d'exp conclut.

1. Soient $a > 0$ et $b > 0$. Par réciprocity : $e^{\ln(ab)} = ab$. Par la propriété fonctionnelle de l'exponentielle puis la réciprocity : $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} e^{\ln b} = ab$. Les deux exponentielles sont égales ; or exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc *injective* : deux réels de même image sont égaux. Ainsi :

$$\forall (a, b) \in]0; +\infty[^2, \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

2. Pour $b > 0$: $\ln b + \ln \frac{1}{b} = \ln(b \times \frac{1}{b}) = \ln 1 = 0$, d'où $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$. Puis, pour $a > 0$ et $b > 0$: $\ln \frac{a}{b} = \ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.

EXERCICE 18 · THE-F3-18



La puissance, par récurrence

MÉTHODE Récurrence sur $\mathbb{N}$ appuyée sur la propriété fondamentale, puis le passage à l'inverse pour $\mathbb{Z}$, et l'astuce du carré pour la racine.

1. Soit $a > 0$ fixé. **Initialisation** ($n = 0$) : $\ln(a^0) = \ln 1 = 0 = 0 \times \ln a$. **Hérédité** : supposons $\ln(a^n) = n \ln a$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors, par la propriété fondamentale (exercice 17) :

$$\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln a = (n+1) \ln a.$$

Conclusion : par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(a^n) = n \ln a$.

2. Pour $n < 0$, posons $m = -n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(a^n) = \ln \frac{1}{a^m} = -\ln(a^m) = -m \ln a = n \ln a$ (l'inverse vient de l'exercice 17). La formule vaut donc sur $\mathbb{Z}$.

3. Pour $a > 0$: $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$, donc, par la propriété fondamentale, $2 \ln \sqrt{a} = \ln a$, c'est-à-dire : $\forall a \in]0; +\infty[$, $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

EXERCICE 19 · THE-F3-19



Les deux moyennes

MÉTHODE La concavité place la corde sous l'arc au milieu, puis l'exponentielle croissante transporte l'inégalité des logarithmes vers les nombres.

1. Soient $a > 0$ et $b > 0$. La fonction $\ln$ est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ avec $\forall x \in]0; +\infty[$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$: elle est concave (cours, § 4). La propriété des milieux du chapitre F2 donne alors, pour la corde

joignant les points d'abscisses a et b :

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{\ln a + \ln b}{2} = \frac{1}{2} \ln(ab) = \ln \sqrt{ab},$$

les deux dernières égalités venant de la famille algébrique (exercices 17 et 18). L'exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle conserve le sens :

$$\forall (a, b) \in]0; +\infty[^2, \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

2. L'égalité dans la propriété des milieux n'a lieu que si la corde touche l'arc en son milieu, c'est-à-dire (concavité stricte, la dérivée seconde ne s'annulant jamais) si $a = b$; et réciproquement, $a = b$ donne $\sqrt{a^2} = a = \frac{a+a}{2}$. Égalité si et seulement si $a = b$.

3. ♦ Sans logarithme : $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ se développe en $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, qui est l'inégalité. Les deux voies s'étendent à trois nombres, mais à des prix différents : la voie algébrique demande l'identité $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$, positive pour $x, y, z \geq 0$ (avec $x = \sqrt[3]{a}$, etc.) ; la voie concave demande l'inégalité de Jensen à trois points, démontrée en parcours étoilé au chapitre F2, là où la propriété des milieux ne fournit que deux points.

EXERCICE 20 · THE-F3-20



Les croissances comparées, à la carte

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1 · LE CHANGEMENT DE VARIABLE $X = \ln x$

Posons, pour $x > 1$, $X = \ln x$, de sorte que $x = e^X$. Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $X = \ln x \rightarrow +\infty$ (limite du cours, § 5). Le quotient s'écrit alors tout entier en fonction de X :

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{e^X}.$$

Or le chapitre F1 a établi : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ (inverse d'une quantité tendant vers $+\infty$). Par composition de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

2. Même geste : avec $X = \ln x$, $\sqrt{x} = e^{X/2}$, donc $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{X}{e^{X/2}} = 2 \frac{X/2}{e^{X/2}}$. En posant $Y = X/2 \rightarrow +\infty$, le quotient vaut $2 \frac{Y}{e^Y} \rightarrow 0$ par la question 1 (ou directement par F1). D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \geq 1$: $\ln x \geq 0$ et $x^n \geq x > 0$, donc

$$0 \leq \frac{\ln x}{x^n} \leq \frac{\ln x}{x}.$$

Le membre de droite tend vers 0 (question 1) : par le théorème des gendarmes, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

COMMENTAIRES

Un seul changement de variable, décliné trois fois : c'est le geste signature du chapitre (il a démontré la dérivabilité de $\ln$ et la ROC $x \ln x \rightarrow 0$). La question 3 montre qu'un encadrement bien choisi évite de refaire le travail : les gendarmes sont aussi un outil d'économie.

EXERCICE 21 · THE-F3-21



Le changement de base

MÉTHODE Tout redescend à $\ln$ par la définition ; les propriétés de $\log_a$ sont celles de $\ln$, divisées par une constante.

1. Pour $x > 0$ et $y > 0$: $\log_a(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y$. Et pour $n \in \mathbb{Z}$: $\log_a(a^n) = \frac{\ln(a^n)}{\ln a} = \frac{n \ln a}{\ln a} = n$ (exercice 18, et $\ln a \neq 0$ car $a \neq 1$).

2. Pour toutes bases licites a et b et tout $x > 0$:

$$\frac{\log_a x}{\log_a b} = \frac{\ln x / \ln a}{\ln b / \ln a} = \frac{\ln x}{\ln b} = \log_b x,$$

la simplification par $\ln a \neq 0$ étant licite, et $\log_a b \neq 0$ car $b \neq 1$.

3. De $2^{E(x)} = x$ on tire, en prenant le logarithme népérien des deux membres (strictement positifs) : $E(x) \ln 2 = \ln x$, donc $E(x) = \frac{\ln x}{\ln 2} = \log_2 x$. Alors

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{E(x) \ln 2}{\ln 10} = E(x) \times \log 2 :$$

la relation observée au défi de l'activité est démontrée, et la fonction E de la classe s'appelait $\log_2$.

EXERCICE 22 · THE-F3-22



Le compteur de chiffres

MÉTHODE Encadrer N entre deux puissances de 10, transporter par $\log$ croissante, et lire la partie entière.

1. Un entier $N \geq 1$ s'écrit avec exactement d chiffres ($d \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si il est au moins égal au plus petit entier à d chiffres, 10^{d-1} , et strictement inférieur au plus petit entier à $d+1$ chiffres, 10^d : $10^{d-1} \leq N < 10^d$.

2. En appliquant $\log$, strictement croissante, à l'encadrement : $d-1 \leq \log N < d$. C'est exactement dire que $d-1 = \lfloor \log N \rfloor$, d'où $d = \lfloor \log N \rfloor + 1$.

3. $\log(2^{100}) = 100 \log 2 \approx 30,103$: 2^{100} a 31 chiffres. $\log(7^{49}) = 49 \log 7 \approx 41,410$: 7^{49} a 42 chiffres.

V. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 23 · APR-F3-23



La table de Stifel (1544)

MÉTHODE Diviser = soustraire les exposants ; extraire une racine = diviser l'exposant, quand la table le permet.

1. Les exposants négatifs permettent la **division** : soustraire les exposants. $64 \div 128 = 2^{6-7} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$; et $\frac{1}{8} \times 32 = 2^{-3+5} = 2^2 = 4$.
2. La table extrait les racines dont l'exposant se divise : racine carrée = exposant divisé par 2 (possible pour les exposants pairs), racine cubique = divisé par 3. Ainsi $\sqrt{64} = 2^{6/2} = 2^3 = 8$ et $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 2^{-3/3} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$. En revanche $\sqrt{2} = 2^{1/2}$ a un exposant non entier : la racine carrée de 2 échappe à la table (comme celle de tout 2^n avec n impair).
3. En langage moderne, la table met en scène : $\forall (a, b) \in]0; +\infty[^2$, $\log_2(ab) = \log_2 a + \log_2 b$ et $\log_2 \frac{a}{b} = \log_2 a - \log_2 b$; et, pour les racines : $\forall a \in]0; +\infty[$, $\log_2 \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_2 a$. Ce que Stifel ne pouvait pas faire, combler les trous entre les exposants entiers, est exactement ce que l'activité du chapitre a fait avec la calculatrice.

EXERCICE 24 · APR-F3-24



Le comma du guitariste

MÉTHODE Traduire les rapports de fréquences en puissances de $2^{1/12}$, puis comparer deux empilements par leurs logarithmes.

1. La frette 12 raccourcit la corde du facteur $2^{-12/12} = \frac{1}{2}$: mi-corde, et la fréquence double (l'octave). La frette k est à la distance $d_k = 65(1 - 2^{-k/12})$ du sillet ; pour $k = 7$: $d_7 = 65(1 - 2^{-7/12}) \approx 21,62$ cm, conforme.
2. $2^{7/12} \approx 1,498$ contre $\frac{3}{2} = 1,500$: écart de deux millièmes. La quinte de la guitare est très légèrement basse : fausse pour un accordeur électronique, juste pour presque toutes les oreilles.
3. Le rapport des deux empilements vaut

$$\frac{(3/2)^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531\,441}{524\,288} \approx 1,0136.$$

Sous forme exponentielle : e^c avec $c = \ln \frac{3^{12}}{2^{19}} = \boxed{12 \ln 3 - 19 \ln 2} \approx 0,0136$.

4. ★ Supposons $(\frac{3}{2})^p = 2^q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Alors $3^p = 2^{p+q}$: le membre de gauche est impair (les puissances de 3 le sont), celui de droite est pair (car $p+q \geq 2 \geq 1$). Contradiction : aucun empilement de quintes justes ne retombe sur un empilement d'octaves. Cette impossibilité prolonge l'exercice 27 : elle équivaut à l'irrationalité de $\log_2 3$, la quinte et l'octave sont incommensurables.

EXERCICE 25 · APR-F3-25

 e^π ou π^e ?

MÉTHODE Prendre le logarithme des deux camps, diviser par $\pi e > 0$, et reconnaître la bosse.

1. Par stricte croissance de $\ln$, comparer e^π et π^e revient à comparer $\pi \ln e$ et $e \ln \pi$, puis, en divisant par $\pi e > 0$ (sens conservé), à comparer $\frac{\ln e}{e}$ et $\frac{\ln \pi}{\pi}$.
2. La fonction g de l'exercice 11 atteint en e son maximum, et elle est *strictement décroissante* sur $[e; +\infty[$. Comme $\pi > e : g(\pi) < g(e)$, c'est-à-dire $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e}$. En remontant la chaîne de la question 1 : $e \ln \pi < \pi$, donc $e^\pi > \pi^e$.
3. ★ Pour $x > 0$ et $x \neq e$: le maximum de g est atteint *uniquement* en e (stricte monotonie de part et d'autre), donc $g(x) < g(e) = \frac{1}{e}$, c'est-à-dire $e \ln x < x$, soit $\ln(x^e) < \ln(e^x)$ et enfin $e^x > x^e$. Le nombre e bat tout le monde à ce jeu, et il est le seul invaincu : c'est une caractérisation de plus du champion de l'analyse.

EXERCICE 26 · APR-F3-26



Le couple unique

MÉTHODE Le logarithme sépare les variables : l'équation symétrique devient une égalité de valeurs de la bosse.

1. Pour $x > 0$ et $y > 0$, par définition $x^y = e^{y \ln x} > 0$. Par stricte croissance (donc injectivité) de $\ln$: $x^y = y^x \iff y \ln x = x \ln y$, et, en divisant par $xy > 0$: $\iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$.
2. Il s'agit donc de trouver deux abscisses distinctes où la bosse g prend la même valeur. Le tableau de l'exercice 11 montre que g est strictement monotone sur chacune de ses deux branches : deux abscisses distinctes de même image sont nécessairement une sur chaque branche. De plus la valeur commune doit être strictement positive (les valeurs de la branche droite le sont), ce qui force $x > 1$: l'une des deux abscisses est dans $]1; e[$, l'autre dans $]e; +\infty[$.
3. Le seul entier de $]1; e[$ est 2 (car $2 < e < 3$). Son partenaire vérifie $\frac{\ln y}{y} = \frac{\ln 2}{2}$, et $y = 4$ convient ($\frac{\ln 4}{4} = \frac{2 \ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2}$) ; la stricte décroissance de g sur $]e; +\infty[$ interdit tout autre partenaire. Ainsi $(2; 4)$ est, à l'échange près, le seul couple d'entiers distincts vérifiant $x^y = y^x$.
4. ★ Sur la figure de l'exercice 11, le couple se lit en coupant la bosse par l'horizontale $y = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,347$: elle rencontre la courbe en $x = 2$ et $x = 4$. Et la même figure montre que *toute* horizontale $y = c$ avec $0 < c < \frac{1}{e}$ coupe la bosse en exactement deux abscisses : il existe une infinité de couples de réels distincts solutions, un pour chaque hauteur de coupe ; les entiers n'en attrapent qu'un.

EXERCICE 27 · APR-F3-27



Aucune fraction

MÉTHODE Supposer la fraction, chasser les dénominateurs, et faire s'affronter deux mondes multiplicatifs incompatibles (pair contre impair ; zéro final contre pas de zéro).

1. Supposons $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ (le nombre est strictement positif car $3 > 1$). Alors $2^{p/q} = 3$, donc $2^p = 3^q$: le membre de gauche est pair (car $p \geq 1$), celui de droite impair. Contradiction : $\log_2 3$ est irrationnel.

2. Analysons $\log n$ pour $1 \leq n \leq 10$. D'abord $\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$ sont rationnels. Supposons maintenant $\log n = \frac{p}{q}$ rationnel pour un n avec $2 \leq n \leq 9$; comme $1 < n < 10$, on a $0 < \log n < 1$, donc on peut prendre $p, q \in \mathbb{N}^*$. Alors $n^q = 10^p$: ce nombre se termine par $p \geq 1$ zéros. Or le chiffre des unités de n^q ne dépend que de celui de n , et un entier dont le chiffre des unités n'est pas 0 n'a jamais de puissance finissant par 0 (les chiffres des unités des puissances de 2, 3, ..., 9 décrivent des cycles qui ne contiennent pas 0). Contradiction. Conclusion : parmi les entiers de 1 à 10, seuls $n = 1$ et $n = 10$ ont un logarithme décimal rationnel.

3. La question 1 dit au guitariste que $\log_2 3$, donc $\log_2 \frac{3}{2} = \log_2 3 - 1$, n'est pas rationnel : aucun nombre entier de quintes ne vaudra jamais un nombre entier d'octaves. Le comma de l'exercice 24 n'est pas un accident de fabrication, c'est un théorème d'arithmétique : la gamme parfaitement juste ne peut pas exister.

EXERCICE 28 · APR-F3-28

★★★★★ ★ ⌚

La marche harmonique

MÉTHODE L'inégalité de la tangente, déclinée en deux choix de x , encadre chaque pas $\ln(k+1) - \ln k$; la somme télescopique.

1. L'inégalité du cours, $\forall t \in]0; +\infty[, \ln t \leq t - 1$, donne, en posant $t = 1 + x$ (licite pour $x > -1$) : $\forall x \in]-1; +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Choix $x = \frac{1}{k}$: $\ln(1 + \frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k}$, et $\ln(1 + \frac{1}{k}) = \ln \frac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k$: c'est la majoration. Choix $x = -\frac{1}{k+1}$ (licite car $-\frac{1}{k+1} > -1$) : $\ln(1 - \frac{1}{k+1}) \leq -\frac{1}{k+1}$, et le membre de gauche vaut $\ln \frac{k}{k+1} = -(\ln(k+1) - \ln k)$; en changeant de signe (sens renversé) : $\ln(k+1) - \ln k \geq \frac{1}{k+1}$. D'où l'encadrement :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 3 · LA SOMMATION TÉLESCOPIQUE

La minoration de H_n . Sommons la majoration de la question 2 pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n.$$

La somme de gauche télescope : tous les termes intermédiaires s'annulent deux à deux, il reste $\ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$. Ainsi $\ln(n+1) \leq H_n$.

La majoration de H_n . Sommons cette fois la minoration de la question 2 pour k allant de 1 à $n-1$ (pour $n \geq 2$) :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln n.$$

Le membre de gauche est $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = H_n - 1$. Ainsi $H_n \leq 1 + \ln n$ pour $n \geq 2$, et le cas $n = 1$ se vérifie directement : $H_1 = 1 \leq 1 + \ln 1 = 1$ (avec égalité). Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n}$$

4. Comme $\ln(n+1) \rightarrow +\infty$, le théorème de comparaison (chapitre A1) donne $H_n \rightarrow +\infty$: la série harmonique diverge, mais au rythme de $\ln n$. Pour dépasser 20, il faut au moins $\ln(n) \geq 19$ (par la majoration), c'est-à-dire $n \geq e^{19} \approx 1,8 \times 10^8$: près de deux cents millions de termes pour atteindre 20. La divergence la plus paresseuse du programme.

5. ★ (★★★★★) Posons $v_n = H_n - \ln n$ et $w_n = H_n - \ln(n+1)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(v_n) décroît : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) \leq 0$ par la *minoration* de la question 2.

(w_n) croît : $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) \geq 0$ par la *majoration* de la question 2 appliquée à $k = n+1$.

Elles sont adjacentes : $v_n - w_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \ln 1 = 0$ (composition avec la continuité de $\ln$ en 1), et $v_n \geq w_n$.

Les deux suites convergent donc vers une limite commune γ , avec, pour tout n , $w_n \leq \gamma \leq v_n$; en particulier $w_1 = 1 - \ln 2 \geq 0$ et $v_1 = 1$ donnent $\gamma \in [0; 1]$. L'existence de la constante d'Euler est établie ; sa nature (rationnelle ou non) reste, elle, un problème ouvert.

COMMENTAIRES

La question 5 fait travailler ensemble trois chapitres : l'inégalité de la tangente (F3) fournit la monotonie, les suites adjacentes (A1) la convergence, la continuité (F1) l'adjacence. C'est le seul ★★★★★ de la feuille, et il établit un objet dont les Coulisses n'avaient donné que le nom.

VI. PYTHON, LE LABORATOIRE

EXERCICE 29 · APL-F3-29

★★ ■ ⌚

Le compteur prophétique

MÉTHODE Un compteur dans la boucle, une prédiction avant l'exécution, et l'écart éventuel s'explique par ce que compte VRAIMENT la formule.

1. Il suffit d'un compteur incrémenté dans la boucle :

```
1 def ln_dichotomie(y, eps):
2     a, b, tours = 0, y - 1, 0
3     while b - a > eps:
4         m = (a + b) / 2
5         if exp(m) < y:
6             a = m
7         else:
8             b = m
9         tours = tours + 1
10    return (a + b) / 2, tours
```

2. Pour $\ln 5$, l'intervalle de départ est $[0; 4]$, de longueur $L = 4$, et $\varepsilon = 10^{-8}$:

$$\lceil \log_2(L/\varepsilon) \rceil = \lceil \log_2(4 \times 10^8) \rceil = \lceil 28,58 \rceil = 29 \text{ tours.}$$

3. L'exécution confirme : 29 tours exactement. La formule compte le nombre de divisions par 2 nécessaires pour que la longueur $L/2^n$ passe sous ε ; la boucle s'arrête précisément quand cette condition est atteinte : les deux comptent la même chose, et l'écart d'une unité n'apparaît que si l'on confond « longueur $\leq \varepsilon$ » (la boucle) et « longueur $< \varepsilon$ » ou si l'intervalle initial est mesuré différemment.

Les deux routes, chronométrées

MÉTHODE Deux boucles, deux compteurs, un tableau ; la mesure est deux fois plus flatteuse que le majorant, et l'encadrement dit pourquoi.

1.

```
1 from math import log
2
3 def serie_alternee(N):
4     s = 0
5     for k in range(1, N + 1):
6         s = s + (-1)**(k + 1) / k
7     return s
```

Mesures (recalculées) : l'écart à $\ln 2$ passe sous 10^{-3} à partir de $N = 500$, et sous 10^{-6} à partir de $N = 500\,000$. Le majorant $\frac{1}{N+1}$ prédisait environ 1000 et 10^6 : la mesure vaut *la moitié* du pronostic. Explication : deux sommes partielles consécutives S_N et S_{N+1} encadrent $\ln 2$ (série alternée à termes décroissants), donc l'erreur de S_N est majorée par l'écart $\frac{1}{N+1}$ mais vaut, en pratique, environ *la moitié* de cet écart, la cible tombant près du milieu.

2.

```
1 def serie_acceleree(N):
2     s, x = 0, 1/3
3     for k in range(N):
4         s = s + 2 * x**(2*k + 1) / (2*k + 1)
5     return s
```

Mesures : l'écart passe sous 10^{-3} dès $N = 3$ termes, et sous 10^{-6} dès $N = 6$.

3. Le duel tient en un tableau :

	précision 10^{-3}	précision 10^{-6}
série alternée	500 termes	500 000 termes
série accélérée	3 termes	6 termes

Conclusion, dans l'esprit de l'exergue des Coulisses : les deux formules sont exactes, mais seule la seconde est un algorithme.

Le premier chiffre du géant

MÉTHODE La partie entière de $\log$ compte les chiffres, sa partie fractionnaire les choisit ; Python calcule les deux sans jamais toucher au géant.

1. Si $\log N = m + f$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $f \in [0; 1[$, alors $N = 10^{m+f} = 10^f \times 10^m$ avec $1 \leq 10^f < 10$: l'écriture décimale de N est celle de la mantisse 10^f décalée de m rangs, et son premier chiffre est $\lfloor 10^f \rfloor$.

2.

```

1 from math import log10, floor
2
3 def tete(a, n):
4     t = n * log10(a)
5     m = floor(t)
6     f = t - m
7     return m + 1, floor(10**f)

```

3. `tete(2, 136279841)` retourne `(41 024 320; 8)` : les valeurs du chapitre. `tete(3, 1000)` retourne `(478; 1)` : 3^{1000} possède 478 chiffres et commence par 1. Contrôle exact : `str(3**1000)` confirme 478 caractères, et un début en `1322...` ($10^{0,1213} \approx 1,322$).

4. ★ La méthode de la question 2 repose sur le calcul flottant de $n \log_{10} a$: environ seize chiffres significatifs. Pour un exposant n gigantesque, la partie *entière* de t consomme déjà beaucoup de ces chiffres, et la partie *fractionnaire*, qui choisit le premier chiffre, n'en garde qu'une poignée : proche d'une frontière (f voisin de $\log 9$ par exemple), le premier chiffre rendu peut être faux. Le calcul exact de la question 3, lui, manipule l'entier complet : plus lent, jamais trompé. Savoir *quand* un flottant ment est une compétence du chapitre au même titre que le logarithme qui le sous-tend.

COMMENTAIRES

La boucle est bouclée : le laboratoire du cours calculait $\ln$ sans la touche $\ln$, celui-ci lit des nombres qu'on ne peut pas écrire. Les deux reposent sur la même idée, née en 1614 : remplacer un nombre par son exposant.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les réponses détaillées aux défis étoilés, le duel complet des deux séries, la table de Stifel prolongée et le premier chiffre de 2^n pour tous les n que vous voudrez : le compagnon numérique du chapitre vous attend.