



CORRIGÉ • F4. FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Corrigé des trente exercices, feuille en main

RÉDACTION MODÈLE : la copie idéale, à imiter • MÉTHODE : la stratégie en une ligne, puis le calcul • COMMENTAIRES : ce que la solution enseigne

I. LE CERCLE RETROUVÉ

EXERCICE 1 • APL-F4-01



Premiers tours

MÉTHODE Ramener le réel dans un tour par la périodicité, placer le point, lire les deux coordonnées avec les valeurs remarquables et les symétries.

1. $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$: symétrique de $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ par rapport à l'axe des ordonnées, d'où $\cos = -\frac{1}{2}$, $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 2. $-\frac{\pi}{6}$: $\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin = -\frac{1}{2}$ (parité). 3. $\frac{3\pi}{4}$: $\cos = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$: $\cos = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin = -\frac{1}{2}$. 5. $-\frac{5\pi}{3} = -2\pi + \frac{\pi}{3}$: mêmes lignes que $\frac{\pi}{3}$, soit $\cos = \frac{1}{2}$, $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 6. $\frac{31\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 4\pi$: mêmes lignes qu'au 4, $\cos = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin = -\frac{1}{2}$.

EXERCICE 2 • APL-F4-02



Les angles associés

MÉTHODE Chaque transformation de l'angle est une symétrie du cercle ; on lit, on ne récite pas.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(x + \pi) = -\sin x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$; $\sin(2\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$.
2. $S(x) = -\cos x + \cos x = 0$ et $T(x) = -\sin x + \sin x = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. C'est $S\left(\frac{\pi}{6}\right)$: $\cos \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} = 0$.

COMMENTAIRES

La question 3 récompense la question 2 : reconnaître une structure générale ($5\pi/6 = \pi - \pi/6$) épargne tout calcul de valeurs. C'est le réflexe qui distingue une lecture du cercle d'une récitation de formules.

EXERCICE 3 · APL-F4-03



L'identité du cercle

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1 · L'IDENTITÉ ET LE TRI PAR QUADRANT

Pour tout réel t , $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ (identité du cercle) ; appliquée au réel x de l'énoncé, elle donne

$$\sin^2 x = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}, \quad \text{soit} \quad \sin x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Il reste à trancher le signe : comme $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$, le point $M(x)$ est dans le demi-plan supérieur, donc $\sin x \geq 0$. Ainsi :

$$\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

2. Même méthode : $\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$; sur $[-\frac{\pi}{2}; 0]$, le point est dans le demi-plan droit, donc $\cos x \geq 0$ et $\cos x = \frac{4}{5}$.

3. Non : on aurait $\cos^2 x + \sin^2 x = 0,64 + 0,49 = 1,13 \neq 1$, ce qui contredit l'identité du cercle.

EXERCICE 4 · THE-F4-04



Parité et période d'assemblages

MÉTHODE Tester $f(-x)$ pour la parité ; pour la période, une formule de duplication révèle l'onde cachée, ou un calcul direct vérifie $f(x+T) = f(x)$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \sin(-x) \cos(-x) = -\sin x \cos x = -f(x)$: f est **impaire**. Par duplication, $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$: f est périodique de période $\boxed{\pi}$ (en effet $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2} \sin(2(x+\pi)) = \frac{1}{2} \sin(2x+2\pi) = f(x)$).

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = g(x)$: g est **paire**. Et $g(x+\pi) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = g(x)$: période π .

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h(-x) = -x - \sin x = -h(x)$: **impaire**. Si h admettait une période $T > 0$, on aurait $h(T) = h(0) = 0$, soit $\sin T = -T$; or pour $T > 0$, $\sin T \geq -1 > -T$ dès que $T > 1$, et $\sin T > 0 \geq -T$ pour $0 < T \leq 1$: impossible. h n'est **pas périodique**.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(-x) = 1 - \sin x$: ni égal à $k(x)$ ni à $-k(x)$ (tester $x = \frac{\pi}{2}$: $k = 2$, $k(-\frac{\pi}{2}) = 0$) : **ni paire ni impaire**. En revanche $k(x+2\pi) = k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: périodique de période 2π .

Vrai ou faux · le cercle

n°	verdict	justification
1	VRAI	angle associé : $M(\frac{\pi}{2} - x)$ échange abscisse et ordonnée
2	FAUX	pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$, et $1,2 > 1$
3	FAUX	$\cos(0 + \pi) = -1 \neq 1 = \cos 0$: π n'est pas une période
4	FAUX	contre-exemple $x = -\frac{\pi}{2}$: $\sin x = -1$ et $x \approx -1,57$, donc $\sin x > x$
5	VRAI	$\cos(2(-x)) = \cos(-2x) = \cos(2x)$ par parité de $\cos$

COMMENTAIRES

L'item 4 est le piège de la feuille : l'inégalité $\sin x \leq x$ du cours est un théorème *sur* $\mathbb{R}_+$. Recopiée sur $\mathbb{R}$ tout entier, elle devient fausse, et un seul x négatif le prouve. Une inégalité sans son domaine n'est pas un énoncé.

Sinus n'est pas un polynôme

MÉTHODE Compter les zéros : une infinité d'un côté, au plus n de l'autre. L'absurde fait le reste.

1. Sur $]-\pi; \pi]$, $\sin x = 0$ pour $x = 0$ et $x = \pi$; par périodicité, $\mathcal{S} = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$: l'équation admet une **infinité** de solutions.

2. Supposons par l'absurde que $\sin$ soit une fonction polynôme P . P n'est pas le polynôme nul (car $\sin \frac{\pi}{2} = 1 \neq 0$) ; notons n son degré. D'après le rappel, P admet au plus n racines réelles ; or la question 1 lui en fournit une infinité. Contradiction : $\sin$ n'est pas une fonction polynôme.

Défi. Un polynôme non constant vérifie $|P(x)| \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$: il n'est pas borné. Or $\sin$ est bornée (par 1) et non constante : seconde démonstration. Pour $x \mapsto \cos x + 2$, qui ne s'annule *jamais*, la preuve des racines est désarmée ; celle de la bornitude fonctionne à l'identique (fonction bornée par 3, non constante).

COMMENTAIRES

Deux preuves, deux robustesses : compter les zéros est spectaculaire mais exige des zéros ; la bornitude n'en demande aucun. Savoir lequel de ses arguments survit quand l'énoncé bouge, c'est déjà de la stratégie.

II. LA LIMITE FONDAMENTALE

EXERCICE 7 · APL-F4-07



Les gendarmes en l'infini

MÉTHODE *Borner le numérateur oscillant, diviser par $x > 0$, et laisser les gendarmes refermer la pince.*

1. Pour tout $x > 0$: $-1 \leq \sin x \leq 1$, et la division par $x > 0$ conserve les inégalités : $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Comme $\pm \frac{1}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.
2. De même $\frac{1}{x} \leq \frac{2+\cos x}{x} \leq \frac{3}{x}$ pour $x > 0$: limite $\boxed{0}$. Et $\frac{x+\sin x}{x} = 1 + \frac{\sin x}{x} \rightarrow \boxed{1}$ par la question 1.
3. En 0, la limite vaut 1 (limite fondamentale du cours). Aucune contradiction : ce sont deux études *en des endroits différents* ; en 0 le quotient est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$, en $+\infty$ c'est un numérateur borné écrasé par un dénominateur infini.

EXERCICE 8 · APL-F4-08



La limite fondamentale composée

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1 · LE CHANGEMENT DE VARIABLE

Pour $x \neq 0$, écrivons le quotient sous une forme où la limite fondamentale apparaît. En posant $u = 3x$:

$$\frac{\sin(3x)}{x} = 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x} = 3 \times \frac{\sin u}{u}.$$

Quand $x \rightarrow 0$, on a $u = 3x \rightarrow 0$, donc $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$ (limite fondamentale). Par produit :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3}$$

2. $\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \rightarrow \frac{1}{1} = \boxed{1}$ (quotient de limites, le dénominateur tendant vers $1 \neq 0$).
3. $\frac{\sin(2x)}{\sin(5x)} = \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{5x}{\sin(5x)} \times \frac{2}{5} \rightarrow 1 \times 1 \times \frac{2}{5} = \boxed{\frac{2}{5}}$.
4. $\frac{\sin(x^2)}{x} = x \times \frac{\sin(x^2)}{x^2} \rightarrow 0 \times 1 = \boxed{0}$ (avec $u = x^2 \rightarrow 0$).

Le second lemme, en plus fort

1. La duplication donne $1 - \cos h = 2 \sin^2 \frac{h}{2}$, d'où, pour $h \neq 0$:

$$\frac{1 - \cos h}{h^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h^2} = \frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{2 \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^2.$$

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 2 · LA LIMITE COMPOSÉE AU CARRÉ

Quand $h \rightarrow 0$, on a $\frac{h}{2} \rightarrow 0$, donc, par la limite fondamentale appliquée en $\frac{h}{2}$:

$$\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \rightarrow 1.$$

Par produit (le carré est un produit de deux facteurs tendant vers 1), puis multiplication par $\frac{1}{2}$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h^2} = \frac{1}{2}$$

3. Pour $h \neq 0$, $\frac{1 - \cos h}{h} = h \times \frac{1 - \cos h}{h^2} \rightarrow 0 \times \frac{1}{2} = 0$: c'est le lemme du cours, retrouvé en une ligne.

COMMENTAIRES

La hiérarchie des lemmes se lit dans les puissances de h : divisé par h , l'écart $1 - \cos h$ s'évanouit ; divisé par h^2 , il révèle une limite finie non nulle. On dit que $1 - \cos h$ est de l'ordre de $\frac{h^2}{2}$: première rencontre avec un développement limité, sans le nom.

Aux deux bouts

MÉTHODE Un changement de variable en $+\infty$, les gendarmes en 0 ; le défi montre que continuité ne force pas dérivabilité.

1. Posons $h = \frac{1}{x}$: quand $x \rightarrow +\infty$, $h \rightarrow 0^+$ et $f(x) = \frac{\sin h}{h} \rightarrow \boxed{1}$ (limite fondamentale).

2. Pour $x > 0$: $|f(x)| = x |\sin \frac{1}{x}| \leq x$, donc $-x \leq f(x) \leq x$ et les gendarmes donnent $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \boxed{0}$.

3. Défi. Le taux vaut $\frac{f(h)}{h} = \sin \frac{1}{h}$. En $h_n = \frac{1}{2n\pi}$, il vaut $\sin(2n\pi) = 0$; en $h'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, il vaut 1. Deux suites de valeurs de h tendant vers 0^+ donnent au taux deux comportements incompatibles (0 et 1) : le taux n'a pas de limite, et le prolongement **n'est pas dérivable en 0**.

COMMENTAIRES

Le prolongement est continu en 0 mais pas dérivable : la courbe oscille de plus en plus vite en s'écrasant entre les droites $y = \pm x$, et aucune tangente ne se stabilise. Continuité et dérivabilité sont deux exigences réellement distinctes ; ce contre-exemple est à ranger près de « dérivable $\Rightarrow$ continue, jamais l'inverse ».

III. DÉRIVER L'ONDE

EXERCICE 11 · APL-F4-11



Dérivées directes

MÉTHODE *Produit, carré, quotient : chaque fonction est dérivable comme assemblage de fonctions dérivables, et la formule adaptée fait le reste.*

1. Produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, f'_1(x) = \sin x + x \cos x$.
2. f_2 est le produit $\cos \times \cos$, dérivable sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, f'_2(x) = -2 \sin x \cos x = -\sin(2x)$.
3. Quotient de fonctions dérivables, dénominateur non nul sur $]0; +\infty[$: $\forall x \in]0; +\infty[, f'_3(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$.
4. Somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, f'_4(x) = 2 \cos x - (2x + 1) \sin x$.

EXERCICE 12 · APL-F4-12



Dérivées composées

1. Composée de $x \mapsto 3x - 1$ (dérivable sur $\mathbb{R}$) par $\sin$: $\forall x \in \mathbb{R}, g'_1(x) = 3 \cos(3x - 1)$.
2. Composée de $x \mapsto x^2$ par $\sin$, dérivable sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, g'_2(x) = -2x \sin(x^2)$.
3. g_3 est le cube de $\sin$, dérivable sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, g'_3(x) = 3 \sin^2 x \cos x$.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 4 · LE PERMIS DE DÉRIVER LA RACINE

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq -1$, donc $2 + \cos x \geq 1 > 0$: la quantité sous la racine ne s'annule jamais. Ainsi g_4 est la composée de $u : x \mapsto 2 + \cos x$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives, par la racine carrée, dérivable sur $]0; +\infty[$: g_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'_4(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{2 + \cos x}}$$

EXERCICE 13 · APL-F4-13



Tangentes

MÉTHODE *L'équation rituelle $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, avec des valeurs remarquables aux deux étages.*

1. En $a = \frac{\pi}{6}$: $\sin a = \frac{1}{2}$, $\sin'(a) = \cos a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où

$$y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6} \right).$$

2. En $a = \frac{\pi}{4}$: $\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos'(a) = -\sin a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

3. Tangente horizontale $\iff \sin'(x) = \cos x = 0 \iff x = \pm \frac{\pi}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$: aux points $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ et $\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$, les sommets de l'onde.

EXERCICE 14 · THE-F4-14



La dérivée 2026^e

MÉTHODE Quatre dérivations ramènent au point de départ : toute dérivée n -ième se lit sur le reste de n modulo 4.

1. $\sin^{(1)} = \cos$, $\sin^{(2)} = -\sin$, $\sin^{(3)} = -\cos$, $\sin^{(4)} = \sin$: au bout de quatre dérivations, on retrouve sinus. Le cycle est de longueur 4.

2. $2026 = 4 \times 506 + 2$: après 506 cycles complets, il reste deux dérivations, donc $\boxed{\sin^{(2026)} = \sin^{(2)} = -\sin}$.

3. Le cycle de cosinus est $\cos \rightarrow -\sin \rightarrow -\cos \rightarrow \sin \rightarrow \cos$; comme $2025 = 4 \times 506 + 1$, $\cos^{(2025)} = \cos^{(1)} = -\sin$.

Défi. Par récurrence sur n .

Initialisation : pour $n = 0$ et tout réel x , $\sin^{(0)}(x) = \sin x = \sin(x + 0)$.

Hérédité : supposons que, pour un rang n , $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ pour tout réel x , et montrons la formule au rang $n + 1$. En dérivant (composée affine) : $\sin^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$, la dernière égalité étant l'angle associé $\sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \cos u$.

Conclusion : par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

EXERCICE 15 · SYN-F4-15



L'onde déguisée

1. La formule d'addition donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \sin x + \cos x.$$

2. Comme $\sin$ décrit $[-1; 1]$, f décrit $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Le maximum $\sqrt{2}$ est atteint quand $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, soit $x = \frac{\pi}{4}$; le minimum $-\sqrt{2}$ quand $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$, soit $x = -\frac{3\pi}{4}$.

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 3 · LES VARIATIONS PAR TRANSLATION

Posons $u = x + \frac{\pi}{4}$: quand x parcourt $[-\pi; \pi]$, u parcourt $[-\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]$, et $f(x) = \sqrt{2} \sin u$. La translation $x \mapsto x + \frac{\pi}{4}$ étant strictement croissante, f varie comme sin sur les intervalles translatés. Or sin décroît sur $[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}]$ et croît sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (cours, § 3.3), puis décroît sur $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ (le cosinus y est négatif), donc en particulier sur $[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}]$; en retranchant $\frac{\pi}{4}$:

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	π
f	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1

avec $f(-\pi) = f(\pi) = -1$. Aucun signe de dérivée n'a été calculé : la forme $\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ a tout donné.

4. $f(x) = \sqrt{2} \iff \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \iff x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ à un tour près ; sur $[-\pi; \pi]$, l'unique solution est $x = \frac{\pi}{4}$.

Défi. Posons $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$. Le point $(\frac{a}{r}; \frac{b}{r})$ est sur le cercle trigonométrique (somme des carrés égale à 1) : il existe φ tel que $\cos \varphi = \frac{a}{r}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{r}$. Alors, pour tout x : $a \cos x + b \sin x = r(\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x) = r \cos(x - \varphi)$, qui décrit exactement $[-r; r]$ quand x décrit $\mathbb{R}$.

COMMENTAIRES

La technique du défi (le point $(a/r; b/r)$ est sur le cercle, donc il a un angle) est la clé de voûte de l'exercice 25 et de toute l'électricité sinusoïdale : n'importe quel mélange de cos et sin de même fréquence est UNE sinusoïde, d'amplitude $\sqrt{a^2 + b^2}$.

EXERCICE 16 · THE-F4-16



La machine à inégalités, un cran de plus

1. g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions qui le sont), et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x, \quad g''(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right).$$

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 2 · RECONNAÎTRE, PUIS REMONTER

Le cours (§ 3.3) a établi : $\forall x \geq 0, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$. Le signe de g'' en découle immédiatement :

$$\forall x \geq 0, \quad g''(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \geq 0.$$

Remontons les étages. $g'' \geq 0$ sur $[0; +\infty[$, donc g' y est croissante ; or $g'(0) = 1 - 0 + 0 - \cos 0 = 0$, donc $g' \geq 0$ sur $[0; +\infty[$. À son tour g y est croissante ; or $g(0) = 0$, donc $g \geq 0$ sur $[0; +\infty[$, c'est-à-dire :

$$\forall x \geq 0, \quad \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

3. En $x = 0,5$, l'encadrement du cours et la question 2 donnent :

$$\underbrace{0,5 - \frac{0,125}{6}}_{= 0,479\,166\dots} \leq \sin(0,5) \leq \underbrace{0,479\,166\dots + \frac{0,031\,25}{120}}_{= 0,479\,427\dots}$$

soit $0,4791 \leq \sin(0,5) \leq 0,4795$. L'amplitude de l'encadrement vaut $\frac{0,5^5}{120} \approx 2,6 \cdot 10^{-4}$: trois décimales de $\sin(0,5)$ sont acquises, à la main.

COMMENTAIRES

La machine est un escalier : chaque inégalité, intégrée deux fois de suite (dériver deux fois, remonter deux fois), produit la suivante, et le signe alterne. C'est l'engrenage que Madhava tournait vers 1400 ; la pièce 55 des Coulisses raconte jusqu'où il est allé.

IV. ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

EXERCICE 17 · APL-F4-17



Équations élémentaires

MÉTHODE La droite coupe le cercle : lire les deux points, sauf tangence ou cible hors du cercle.

1. $S = \left\{-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\}$. 2. $S = \left\{-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right\}$. 3. $S = \{-\pi; \pi\}$ (les deux bornes désignent le même point du cercle : l'effet de bord du cours).
4. $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (tangence). 5. $\cos x = -\frac{1}{2} : S = \left\{-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$. 6. $2 > 1 : S = \emptyset$.

EXERCICE 18 · APL-F4-18



Arcs coloriés

MÉTHODE Résoudre l'équation associée pour trouver les bornes, puis colorier l'arc du bon côté de la droite et le dérouler.

1. Bornes $\pm \frac{\pi}{3}$; l'arc strictement à droite de la verticale $x = \frac{1}{2}$ donne $S = \left]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right[$.
2. $\sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$: bornes $-\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$, arc inférieur : $S = \left[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right]$.
3. Bornes $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$, arc supérieur : $S = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Le transport d'intervalle

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 1 · LE TRANSPORT D'INTERVALLE

Posons $X = 2x$: quand x parcourt $[-\pi; \pi]$, X parcourt $[-2\pi; 2\pi]$, deux tours complets de cercle. Sur un tour, $\cos X = -\frac{1}{2}$ a pour solutions $X = \pm \frac{2\pi}{3}$; sur $[-2\pi; 2\pi]$, il faut leur adjoindre leurs translatés d'un tour *qui restent dans l'intervalle* : $\frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$ conviennent, tandis que $\pm\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) = \pm\frac{8\pi}{3}$ sont hors de portée. Ainsi :

$$X \in \left\{ -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\}.$$

En revenant à $x = \frac{X}{2}$:

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$$

2. $X = x + \frac{\pi}{3} \in [-\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}]$; $\sin X = \frac{1}{2}$ y donne $X \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$, d'où $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right\}$.

3. $X = 3x \in [-3\pi; 3\pi]$; $\sin X = 1 \iff X = \frac{\pi}{2}$ à un tour près, soit $X \in \left\{ -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right\}$, d'où $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$: trois solutions, une par tour.

Le second degré caché

MÉTHODE Poser $X = \cos x$ quand l'équation est un trinôme en cosinus ; factoriser, jamais diviser, quand un facteur peut s'annuler.

1. Avec $X = \cos x$: $2X^2 - 3X + 1 = 0$, de racines $X = 1$ et $X = \frac{1}{2}$ (discriminant 1). Alors $\cos x = 1 \iff x = 0$ et $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\pi}{3}$: $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3} \right\}$.

2. Par duplication puis factorisation :

$$\sin(2x) = \sin x \iff 2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \iff \sin x (2 \cos x - 1) = 0.$$

D'où $\sin x = 0$ ($x \in \{-\pi; 0; \pi\}$) ou $\cos x = \frac{1}{2}$ ($x = \pm \frac{\pi}{3}$) : $\mathcal{S} = \left\{ -\pi; -\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}; \pi \right\}$, cinq solutions.

3. En divisant par $\sin x$, Camille suppose implicitement $\sin x \neq 0$: elle perd les trois solutions $-\pi$, 0 et π . La règle enfreinte : **on ne divise jamais par une quantité susceptible de s'annuler** ; on factorise, et chaque facteur a droit à son équation.

Vrai ou faux · compter les solutions

n°	verdict	justification
1	VRAI	la verticale $x = a$ coupe le cercle en deux points distincts, de réels $\pm a$
2	FAUX	contre-exemple $a = 1$: l'unique solution est $x = 0$ (tangence)
3	VRAI	sur $]-\pi; \pi]$, seuls 0 et π conviennent ($-\pi$ est exclu par la borne ouverte)
4	VRAI	$\cos(2x) = 1 \iff 2x = 2k\pi \iff x = k\pi$: solutions $-\pi, 0, \pi$
5	FAUX	$ \sin x \leq 1$ impose $ x \leq 10$; une solution au plus par arc de monotonie : sept en tout

COMMENTAIRES

Les items 1 à 3 rejouent la propriété du cours sur les effets de bord : la réponse change selon que l'intervalle est ouvert, fermé ou semi-ouvert, à équation IDENTIQUE. Compter des solutions sans regarder les bornes de l'intervalle, c'est compter sans regarder la boîte.

V. LE MONDE OSCILLE

Le diapason

MÉTHODE Lecture des paramètres sur le modèle $A \sin(\omega t)$, puis dérivation composée et maximisation d'un cosinus.

- Amplitude 0,1 mm ; pulsation $\omega = 880\pi$, donc $T = \frac{2\pi}{880\pi} = \frac{1}{440}$ s $\approx 2,27$ ms, et fréquence $\frac{1}{T} = 440$ Hz : le la du diapason. La période du secteur (0,02 s, vue au cours) est $0,02 \times 440 = 8,8$ fois plus longue.
- Composée d'une fonction affine par sin, donc dérivable sur $\mathbb{R}$: $\forall t \in \mathbb{R}, u'(t) = 0,1 \times 880\pi \cos(880\pi t) = 88\pi \cos(880\pi t)$ (en mm/s).
- $|u'(t)|$ est maximal quand $|\cos(880\pi t)| = 1$, c'est-à-dire quand $\sin(880\pi t) = 0$ (identité du cercle), soit exactement quand $u(t) = 0$: au passage par la position de repos. La vitesse maximale vaut $88\pi \approx 276$ mm/s, soit environ 27,6 cm/s.

Étude complète

1. Somme de fonctions dérivables sur $[0; \pi]$: $\forall x \in [0; \pi], f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}$.
2. $f'(x) = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3}$ sur $[0; \pi]$. Par lecture du cercle, $\cos x > \frac{1}{2}$ sur $[0; \frac{\pi}{3}[$ et $\cos x < \frac{1}{2}$ sur $] \frac{\pi}{3}; \pi]$.
3. Avec $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \approx 0,342$ et $f(\pi) = -\frac{\pi}{2}$:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$

RÉDACTION MODÈLE – QUESTION 4 · LE TVI STRICTEMENT MONOTONE

D'abord, $f(0) = \sin 0 - 0 = 0$: 0 est solution.

Sur $[0; \frac{\pi}{3}]$, f est strictement croissante (car $f' > 0$ sur $]0; \frac{\pi}{3}[$) : comme $f(0) = 0$, il vient $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{3}]$, qui ne contient donc aucune solution.

Sur $[\frac{\pi}{3}; \pi]$: f est continue (car dérivable), strictement décroissante, et $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} > 0$ tandis que $f(\pi) = -\frac{\pi}{2} < 0$. Comme 0 est compris entre ces deux valeurs, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone, chapitre F1) garantit l'existence d'un *unique* réel $c \in]\frac{\pi}{3}; \pi[$ tel que $f(c) = 0$.

Au total, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[0; \pi]$: $x = 0$ et ce réel c .

Le sinus cardinal

MÉTHODE Chaque question réinvestit un outil du chapitre : parité, équations, gendarmes, limite fondamentale, inégalité stricte. L'étude complète est un best of.

1. Pour $x \neq 0$: $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = f(x)$: f est **paire**.
 2. $f(x) = 0 \iff \sin x = 0$ et $x \neq 0$: $\mathcal{S} = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}^*\}$, l'onde s'annule à chaque demi-tour.
 3. L'encadrement de l'exercice 7 donne, pour $x > 0$, $-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$: par les gendarmes, $f(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$ (et en $-\infty$ par parité).
 4. La limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (c'est cette fonction que le cours baptise *sinus cardinal*, § 2.2) donne $f(x) \rightarrow 1$ en 0 : on prolonge par $f(0) = 1$.
 5. Suivons le coup de pouce. Sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, l'encadrement fondamental du cours est strict : $\sin x < x$, d'où $|f(x)| < 1$. Pour $x \geq \frac{\pi}{2}$: $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$, d'où encore $|f(x)| < 1$. L'imparité de $\sin$ (et la parité de f) transportent le résultat aux $x < 0$: pour tout $x \neq 0$, $|f(x)| < 1$, et le maximum 1 n'est atteint qu'en 0.
- Défi.** Pour $h > 0$, l'encadrement du cours donne $-\frac{h^3}{6} \leq \sin h - h \leq 0$, donc $-\frac{h}{6} \leq \frac{\sin h - h}{h^2} \leq 0$: par les

gendarmes, le taux tend vers 0 en 0^+ . Or $h \mapsto \frac{\sin h - h}{h^2}$ est **impaire** (numérateur impair, dénominateur pair) : la limite en 0^- vaut aussi 0. Le prolongement est donc dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$: la tangente au sommet de l'onde est horizontale, comme la figure le suggérerait.

COMMENTAIRES

Le défi est un modèle de division du travail : l'encadrement ne vaut que sur $\mathbb{R}_+$, mais l'imparité du taux transporte gratuitement la conclusion de l'autre côté. Quand une hypothèse ne couvre que la moitié du domaine, chercher la symétrie qui finit le travail.

EXERCICE 25 · THE-F4-25



L'oscillateur habillé

MÉTHODE Dériver deux fois, reconnaître l'équation ; puis identifier les coefficients sur la forme développée de $5 \cos(2t + \varphi)$.

1. Composées affines de $\cos$ et $\sin$, donc x est deux fois dérivable sur $\mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = -6 \sin(2t) - 8 \cos(2t)$, puis

$$\forall t \in \mathbb{R}, x''(t) = -12 \cos(2t) + 16 \sin(2t) = -4(3 \cos(2t) - 4 \sin(2t)) = -4x(t).$$

C'est l'équation $y'' = -\omega^2 y$ de l'oscillateur harmonique du cours (§ 5.2), avec $\omega = 2$.

2. La formule d'addition développe, pour tout $t \in \mathbb{R} : 5 \cos(2t + \varphi) = 5 \cos \varphi \cos(2t) - 5 \sin \varphi \sin(2t)$. Il suffit donc de trouver φ tel que $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ et $\sin \varphi = \frac{4}{5}$; comme $(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$, le point $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ est sur le cercle trigonométrique et un tel φ existe. Pour ce $\varphi : \forall t \in \mathbb{R}, x(t) = 5 \cos(2t + \varphi)$.

3. Amplitude 5, période $\frac{2\pi}{2} = \pi$, et x décrit $[-5; 5]$: les valeurs extrêmes sont ± 5 .

VI. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

EXERCICE 26 · SYN-F4-26



La formule oubliée de Bhāskara

MÉTHODE Des calculs de fractions exacts : poser $p = x(\pi - x)$ et tout exprimer en p , les π^2 se simplifient.

1. $B(0) = \frac{0}{5\pi^2} = 0 = \sin 0$; de même $B(\pi) = 0 = \sin \pi$.

2. En $x = \frac{\pi}{2} : x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{4}$, d'où

$$B\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{16 \cdot \frac{\pi^2}{4}}{5\pi^2 - 4 \cdot \frac{\pi^2}{4}} = \frac{4\pi^2}{4\pi^2} = 1 = \sin \frac{\pi}{2}.$$

En $x = \frac{\pi}{6} : x(\pi - x) = \frac{5\pi^2}{36}$, d'où

$$B\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{16 \cdot \frac{5\pi^2}{36}}{5\pi^2 - \frac{20\pi^2}{36}} = \frac{\frac{20\pi^2}{9}}{\frac{40\pi^2}{9}} = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}.$$

3. En $x = \frac{\pi}{4}$: $x(\pi - x) = \frac{3\pi^2}{16}$, d'où

$$B\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{16 \cdot \frac{3\pi^2}{16}}{5\pi^2 - \frac{3\pi^2}{4}} = \frac{3\pi^2}{\frac{17\pi^2}{4}} = \boxed{\frac{12}{17}} \approx 0,70588.$$

L'erreur vaut $\left| \frac{12}{17} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \approx 1,2 \cdot 10^{-3}$.

4. Le polynôme du cours commet environ $2,5 \cdot 10^{-3}$: en $\frac{\pi}{4}$, **Bhāskara bat le polynôme**, avec une simple fraction rationnelle et sans qu'on sache comment il l'a trouvée.

COMMENTAIRES

Le miracle des questions 2 et 3 : π disparaît de tous les calculs, car numérateur et dénominateur de B sont homogènes en π^2 . La formule de Bhāskara est, au fond, une fraction rationnelle en la seule variable $\frac{x}{\pi}$: c'est ce qui la rend exacte en des points si remarquables.

EXERCICE 27 · THE-F4-27



La loi de Morrie

MÉTHODE Multiplier par le sinus manquant et remonter la cascade de duplications ; l'angle final se replie sur l'angle initial.

1. $\frac{\pi}{9} \in]0; \pi[$, donc $\sin \frac{\pi}{9} \neq 0$. La duplication $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$, appliquée trois fois en cascade :

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{9} \times P &= \left(\sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} \right) \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{2\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \right) \cos \frac{4\pi}{9} \\ &= \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8} \sin \frac{8\pi}{9}. \end{aligned}$$

2. $\frac{8\pi}{9} = \pi - \frac{\pi}{9}$, donc $\sin \frac{8\pi}{9} = \sin \frac{\pi}{9}$ (angle associé). En divisant l'égalité de la question 1 par $\sin \frac{\pi}{9} \neq 0$:

$$\boxed{P = \frac{1}{8}}.$$

Défi. Par récurrence sur n .

Initialisation ($n = 1$) : $\cos a = \frac{\sin(2a)}{2 \sin a}$ est la duplication.

Hérédité : supposons que le produit jusqu'à $n - 1$ vaille $\frac{\sin(2^n a)}{2^n \sin a}$, et montrons la formule au rang suivant.

Le facteur $\cos(2^n a)$ donne, par duplication en $2^n a$: $\frac{\sin(2^n a) \cos(2^n a)}{2^n \sin a} = \frac{\sin(2^{n+1} a)}{2^{n+1} \sin a}$.

Conclusion : par le principe de récurrence, la formule vaut pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Morrie est le cas $a = \frac{\pi}{9}$,

$n = 3$, refermé par $\sin \frac{8\pi}{9} = \sin \frac{\pi}{9}$.

Le quadrilatère de Ptolémée

MÉTHODE Le cercle de diamètre 1 transforme les cordes en sinus ; le théorème de Ptolémée devient alors, mot pour mot, la formule d'addition.

1. AD est un diamètre et B est sur le cercle : le triangle ABD , inscrit dans un demi-cercle, est rectangle en B (théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle). Dans ce triangle rectangle d'hypoténuse $AD = 1$: $AB = AD \sin \widehat{ADB} = \sin \alpha$ (côté opposé à l'angle) et $BD = AD \cos \widehat{ADB} = \cos \alpha$ (côté adjacent).
2. Le même argument dans le triangle ACD , rectangle en C , donne $AC = \sin \gamma$ et $CD = \cos \gamma$.
3. Avec $BC = \sin(\gamma - \alpha)$ (admis) et $AD = 1$, le théorème de Ptolémée $AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$ s'écrit :

$$\sin \gamma \cos \alpha = \sin \alpha \cos \gamma + \sin(\gamma - \alpha),$$

c'est-à-dire, en isolant :

$$\sin(\gamma - \alpha) = \sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha$$

4. L'égalité de la question 3, établie pour les angles de la figure, se lit comme une identité entre fonctions de α , que les angles associés étendent à tous les réels. En remplaçant α par $-\alpha$: $\sin(\gamma + \alpha) = \sin \gamma \cos(-\alpha) - \cos \gamma \sin(-\alpha) = \sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha$, par parité de $\cos$ et imparité de $\sin$.

COMMENTAIRES

Relisez la question 3 : le théorème de Ptolémée EST la formule d'addition, écrite dans le langage des longueurs. C'est l'outil avec lequel l'*Almageste* fabriquait sa table de demi-degré en demi-degré ; les « formules de première » ont dix-neuf siècles, et elles sont nées astronomes.

Le problème de Regiomontanus (1471)

MÉTHODE L'angle inscrit rend l'angle constant sur le cercle ; la tangence fait de T le seul point de la ligne qui touche ce cercle ; Pythagore mesure.

1. Soit M un point de la demi-droite, distinct de T . Le cercle tangent ne touche la ligne des yeux qu'en T : M lui est donc extérieur, et du même côté de (PS) . Par le théorème admis, M voit $[PS]$ sous un angle strictement plus petit que l'angle inscrit, qui est celui sous lequel T la voit : T est le meilleur poste.
2. Le centre est équidistant de P et de S : il est sur leur médiatrice, l'horizontale d'altitude $\frac{a+b}{2}$. La tangence à la ligne des yeux signifie que sa distance à cette ligne égale le rayon : le rayon vaut donc aussi $\frac{a+b}{2}$.
3. Notons Ω le centre : Ω est à la verticale de T , à la distance d de la droite (PS) . Dans le triangle rectangle Ω - P -projection, Pythagore donne :

$$d^2 + \left(\frac{a+b}{2} - a \right)^2 = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \iff d^2 = \frac{(a+b)^2 - (b-a)^2}{4} = ab,$$

d'où $d = \sqrt{ab}$.

4. Ici $a = 2$ et $b = 2 + 6 = 8$: $d = \sqrt{16} = 4$ mètres.

COMMENTAIRES

Aucune dérivée, et pourtant un maximum : le cercle tangent joue le rôle que jouera, deux siècles plus tard, l'annulation de la dérivée. La moyenne géométrique $\sqrt{ab}$ surgit là où on l'attend le moins ; vous la retrouverez en optimisation, en probabilités et en géométrie, toujours aux points d'équilibre.

EXERCICE 30 · APR-F4-30

★★★★★ ☆ ⌂

La formule de Viète (1593)

MÉTHODE Une récurrence de duplications, l'évaluation en $\pi/2$, la limite fondamentale pour conclure, la formule de l'angle moitié pour les radicaux.

1. Par récurrence sur n , à $x \in \mathbb{R}$ fixé.

Initialisation ($n = 1$) : $2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x$ (duplication).

Hérédité : supposons la formule au rang n et montrons-la au rang $n + 1$. La duplication appliquée à $\sin \frac{x}{2^n} = 2 \sin \frac{x}{2^{n+1}} \cos \frac{x}{2^{n+1}}$ donne :

$$\sin x = 2^n \left(2 \sin \frac{x}{2^{n+1}} \cos \frac{x}{2^{n+1}} \right) \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = 2^{n+1} \sin \frac{x}{2^{n+1}} \prod_{k=1}^{n+1} \cos \frac{x}{2^k}.$$

Conclusion : par le principe de récurrence, la formule vaut pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. En $x = \frac{\pi}{2}$: $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, et la formule devient $1 = 2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}$, d'où l'égalité demandée en divisant par $2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \neq 0$.

3. Posons $h = \frac{\pi}{2^{n+1}}$, de sorte que $2^n = \frac{\pi}{2h}$:

$$2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\sin h}{h} \longrightarrow \frac{\pi}{2} \quad (h \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty),$$

par la limite fondamentale. Le produit, qui en est l'inverse, tend donc vers $\boxed{\frac{2}{\pi}}$.

4. Pour $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$, on a $\frac{\theta}{2} \in [0; \frac{\pi}{4}]$, donc $\cos \frac{\theta}{2} \geq 0$; la duplication $\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$ donne alors $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$. En cascade depuis $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} :$$

les facteurs de Viète.

5. $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \cos \frac{\pi}{8} \times \cos \frac{\pi}{16} \times \cos \frac{\pi}{32} \approx 0,637\,64$, soit un écart d'environ $1,0 \cdot 10^{-3}$ à $\frac{2}{\pi} \approx 0,636\,62$: deux décimales seulement après quatre facteurs, la convergence est lente.

COMMENTAIRES

Toute la mécanique du chapitre dans un seul exercice : la duplication (question 1), une récurrence d'A0, et la limite fondamentale en juge de paix (question 3). Le produit infini de Viète n'est rien d'autre que la limite fondamentale déguisée en bijou algébrique.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les prolongements des six défis étoilés, la courbe de Bhāskara superposée au vrai sinus, la cascade de Morrie pas à pas et la chasse de Viète poussée à vingt facteurs : tout vous attend sur le compagnon numérique du chapitre.