



— APL – Exercice d'application

— SYN – Exercice de synthèse

— THE – Exercice théorique

— APR – Exercice d'approfondissement

★★★ : Difficulté estimée de l'exercice

Exercice 1: Produit scalaire, normes et distances | APL-G1-01 | ★

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points :

$$A(1; -2; 3) \quad B(4; 1; -1) \quad C(0; 3; 2) \quad D(2; -1; 5)$$

1. Calculer les coordonnées de \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{AD} .
2. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ et $\vec{AC} \cdot \vec{AD}$.
3. Calculer $\|\vec{AB}\|$, $\|\vec{AC}\|$ et la distance AB .
4. Les points A , B et C forment-ils un triangle rectangle ? Justifier.
5. Calculer l'angle \widehat{BAC} (valeur exacte puis approchée au degré près).

Exercice 2: Orthogonalité de vecteurs | APL-G1-02 | ★

1. Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

2. Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

3. Déterminer la valeur de m pour que $\vec{u} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ m \end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

4. Déterminer tous les vecteurs $\vec{w} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonaux à $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. Peut-on trouver un vecteur non nul orthogonal à la fois à $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$? Si oui, les déterminer tous.

Exercice 3: Vecteur normal et équation de plan | APL-G1-03 | ★

1. Déterminer une équation cartésienne du plan \mathcal{P}_1 passant par $A(1; 2; -1)$ et de vecteur normal

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Le point $B(3; 0; 1)$ appartient-il à \mathcal{P}_1 ?
3. Déterminer un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_2 : 2x - 3y + z - 5 = 0$.
4. Déterminer une équation du plan \mathcal{P}_3 passant par l'origine et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
5. Déterminer une équation du plan \mathcal{P}_4 passant par $A(1; 0; 2)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que représente géométriquement ce plan ?

Exercice 4: Équation de plan par trois points | APL-G1-04 | ★★★

On donne $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 0)$ et $C(0; -1; 3)$.

1. Montrer que A , B et C ne sont pas alignés.
2. Calculer \vec{AB} et \vec{AC} .
3. Déterminer un vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ orthogonal à la fois à \vec{AB} et \vec{AC} .
On résoudra le système $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$ en fixant $a = 1$.
4. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
5. Vérifier que A , B et C satisfont cette équation.

Exercice 5: Plans parallèles et perpendiculaires | APL-G1-05 | ★★★

On donne les plans :

$$\mathcal{P}_1 : 2x - y + 3z - 1 = 0 \quad \mathcal{P}_2 : -4x + 2y - 6z + 7 = 0$$

$$\mathcal{P}_3 : x + 3y + z - 2 = 0 \quad \mathcal{P}_4 : 3x + y - z + 5 = 0$$

1. Montrer que \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont parallèles.
2. \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_3 sont-ils perpendiculaires ? Justifier.
3. Montrer que \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_4 ne sont ni parallèles ni perpendiculaires.
4. La droite d passant par $A(0; 1; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est-elle orthogonale à \mathcal{P}_1 ?
Justifier.
5. Déterminer l'équation du plan \mathcal{P}_5 passant par $B(1; 0; -1)$ et parallèle à \mathcal{P}_1 .

Exercice 6: Droite orthogonale à un plan | THE-G1-06 | ★★★

Soit \mathcal{P} un plan et \vec{u}_1, \vec{u}_2 deux vecteurs non colinéaires de \mathcal{P} . Soit \vec{v} un vecteur de l'espace.

- On suppose que $\vec{v} \cdot \vec{u}_1 = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{u}_2 = 0$.
Soit \vec{w} un vecteur quelconque de \mathcal{P} . Justifier qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w} = \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2$.
- Calculer $\vec{v} \cdot \vec{w}$ en utilisant la bilinéarité du produit scalaire.
- Conclure : si \vec{v} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan, alors \vec{v} est orthogonal à **tout** vecteur du plan.
- Application.** Dans le cube $ABCDEFGH$ unitaire (repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$), on pose I le milieu de $[EF]$.
 - Calculer $\vec{AI} \cdot \vec{AB}$ et $\vec{AI} \cdot \vec{AD}$.
 - Peut-on en déduire que \vec{AI} est normal au plan (ABD) ? Pourquoi ?

Exercice 7: Le cube — positions relatives | SYN-G1-07 | ★★

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

- Donner les coordonnées de tous les sommets.
- Vérifier que les points B, D, H et F sont coplanaires.
Indication : montrer que $\vec{BH} = \vec{BD} + \vec{BF}$.
- Montrer que \vec{AC} est orthogonal à \vec{BD} .
- Montrer que \vec{AC} est orthogonal à \vec{BF} .
- En déduire que la droite (AC) est orthogonale au plan $(BDHF)$. Justifier rigoureusement en utilisant le résultat de l'exercice THE-G1-06.
- Déterminer une équation cartésienne du plan $(BDHF)$.
- Calculer la distance du point A au plan $(BDHF)$.

Exercice 8: Distance et projeté orthogonal | SYN-G1-08 | ★★

Dans un repère orthonormé, on donne le plan $\mathcal{P} : 2x + y - 2z + 3 = 0$ et le point $M(1; 3; -1)$.

- Vérifier que $M \notin \mathcal{P}$.
- Calculer la distance de M au plan \mathcal{P} .
- On note H le projeté orthogonal de M sur \mathcal{P} .
 - Justifier que la droite (MH) a pour vecteur directeur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
 - Écrire une représentation paramétrique de (MH) .
 - Déterminer les coordonnées de H (intersection de (MH) avec \mathcal{P}).
- Vérifier que MH est bien égal à la distance calculée en 2.
- Soit Q un point quelconque de \mathcal{P} . Montrer que $MQ \geq MH$.
Indication : utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle MHQ .

Exercice 9: Intersection de plans | SYN-G1-09 | ★★

On considère les plans :

$$\mathcal{P}_1 : x + y - z + 1 = 0 \quad \mathcal{P}_2 : 2x - y + z - 3 = 0$$

1. Montrer que \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 ne sont pas parallèles.
2. Trouver un point A appartenant à $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.
On pourra fixer $z = 0$ et résoudre le système.
3. Déterminer un vecteur directeur de la droite $\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.
Indication : ce vecteur est orthogonal aux deux vecteurs normaux.
4. Écrire une représentation paramétrique de Δ .
5. Le point $B(1; 0; 2)$ appartient-il à Δ ?

Exercice 10: Tétraèdre et orthogonalité (type bac) | APR-G1-10 | ★★

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(4; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 4)$ et $D(0; 0; 0)$.

Partie A – Orthogonalité

1. Calculer $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$. En déduire que (DA) et (BC) sont orthogonales.
2. Montrer de même que (DB) et (AC) sont orthogonales.
3. En déduire que (DC) et (AB) sont orthogonales.

Indication : exprimer $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$ à l'aide des résultats précédents.

Partie B – Plan médiateur et sphère

4. Montrer que le plan médiateur de $[AB]$ a pour équation $x - y = 0$.
5. Déterminer de même les équations des plans médiateurs de $[AC]$ et $[BC]$.
6. En déduire les coordonnées du centre Ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$ et son rayon.

Exercice 11: Espace et architecture (type bac) | APR-G1-11 | ★★★

Un architecte modélise un toit par un plan \mathcal{T} dans un repère orthonormé d'unité 1 mètre. Le sol est le plan (xOy) .

On donne les points $A(0; 0; 3)$, $B(6; 0; 5)$ et $C(0; 8; 5)$ situés sur le toit.

1. Calculer \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
2. Déterminer un vecteur \vec{n} normal au plan \mathcal{T} .
3. Montrer que le plan \mathcal{T} a pour équation : $4x + 3y - 12z + 36 = 0$.
4. Un poteau vertical part du point $P(3; 2; 0)$ au sol. Déterminer la hauteur du poteau, c'est-à-dire la coordonnée z du point d'intersection du poteau avec le plan \mathcal{T} .
5. L'architecte souhaite installer un câble vertical depuis le point $S(6; 6; 8)$ (sommet d'un mât) jusqu'au toit. Calculer la distance de S au plan \mathcal{T} .
6. Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de S sur \mathcal{T} (point d'attache du

câble).

7. Un ouvrier se tient au point $Q(3; 4; 0)$ au sol. Calculer la distance QH .

Exercice 12: Section plane d'un cube (type bac) | APR-G1-12 | ★★★

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On note I le milieu de $[AE]$, J le milieu de $[BC]$ et K le point de $[GH]$ tel que $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HG}$.

1. Donner les coordonnées de I , J et K .
2. Montrer que les vecteurs \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{IK} ne sont pas colinéaires.
3. Déterminer un vecteur \vec{n} normal au plan (IJK) .
4. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK) .
5. Montrer que la droite (AG) (grande diagonale) n'est pas orthogonale au plan (IJK) .
6. Soit L le point d'intersection de la droite (DF) avec le plan (IJK) .
 - (a) Écrire une représentation paramétrique de (DF) .
 - (b) Déterminer les coordonnées de L .
7. Calculer la distance du sommet A au plan (IJK) .

Exercice 13: Projeté orthogonal sur une droite | APR-G1-13 | ★★

Soit la droite Δ passant par $A(1; 0; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, et le point $M(4; 2; 0)$.

1. Écrire une représentation paramétrique de Δ .
2. Soit H le projeté orthogonal de M sur Δ .
 - (a) Justifier que $\overrightarrow{AH} = t\vec{u}$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$.
 - (b) Exprimer \overrightarrow{MH} en fonction de t .
 - (c) Utiliser la condition $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$ pour déterminer t .
 - (d) En déduire les coordonnées de H .
3. Calculer la distance MH (distance de M à la droite Δ).
4. **Formule générale.** Montrer que si Δ passe par A avec vecteur directeur \vec{u} , alors :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$$