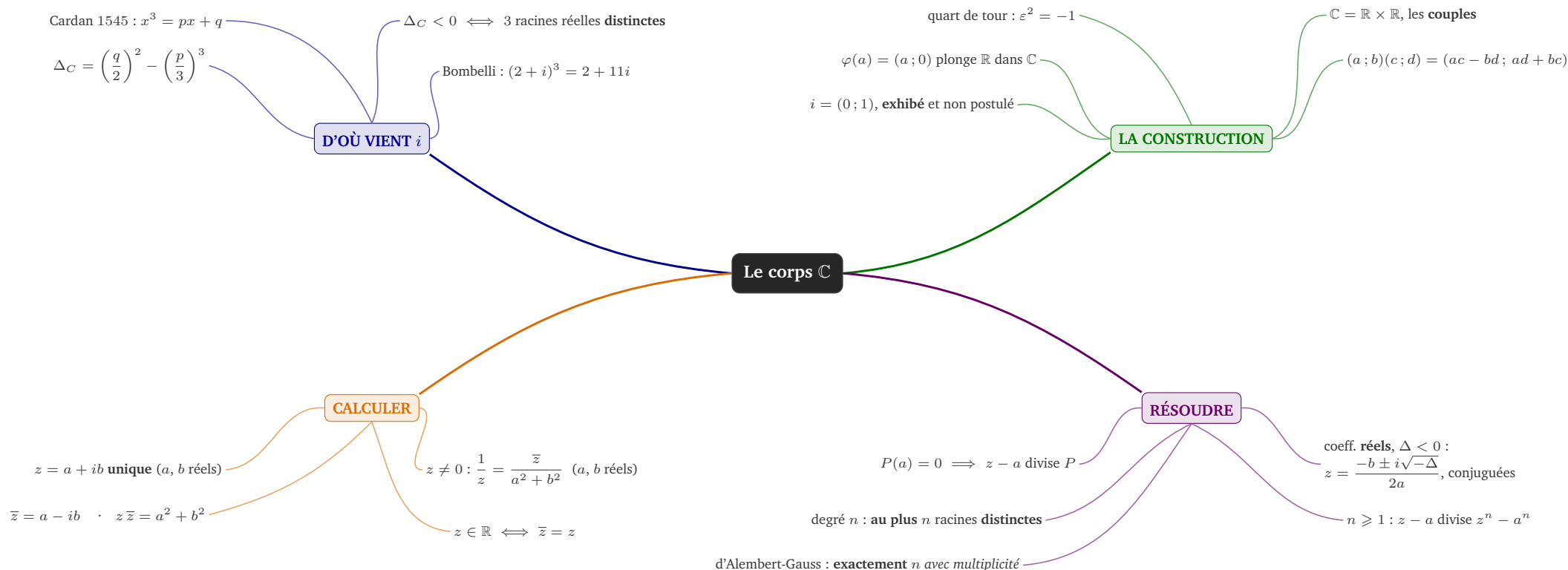




Le conjugué passe partout (pour tous $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, et $z \neq 0$ pour les deux dernières) :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad \overline{z z'} = \bar{z} \bar{z'} \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$$

Second degré à coefficients réels, $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$z = -\frac{b}{2a}$	$z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
2 réelles distinctes	1 réelle double	2 conjuguées distinctes

En notant z_1 et z_2 les deux racines *comptées avec leur multiplicité* : $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

LA CONSTRUCTION DE $\mathbb{C}$, EN QUATRE TEMPS

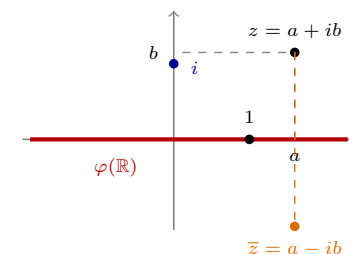


i n'est pas supposé : il est construit, puis calculé. Au terme des quatre temps, $\mathbb{C}$ est un **corps commutatif** : les deux lois sont associatives, commutatives, distributives, et tout élément non nul est inversible.

QUEL OUTIL, POUR QUELLE QUESTION ?

On vous demande	Le réflexe
Forme algébrique d'un quotient	multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur
Montrer que z est réel	prouver $\bar{z} = z$
Montrer que z est imaginaire pur	prouver $\bar{z} = -z$
Conjuguer un inverse, un quotient	conjuguer l'égalité entière
$az^2 + bz + c = 0$, coeff. réels , $\Delta < 0$	$\sqrt{-\Delta}$ existe, poser $i\sqrt{-\Delta}$
Factoriser P sachant $P(a) = 0$	$P(z) = (z - a)Q(z)$, $\deg Q = \deg P - 1$
Majorer le nombre de racines	réurrence + $\mathbb{C}$ est un corps

LE PLAN COMPLEXE



le conjugué est le symétrique par rapport à l'axe réel

LES TROIS MARCHES DE LA SECTION 6

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$
dimension sur $\mathbb{R}$	1	2	4
ce qu'on gagne	—	algébriquement clos	division en dim. 4
ce qu'on perd	—	l'ordre compatible	la commutativité

Frobenius 1877 : ce sont les seules algèbres à division **associatives** de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Rien en dimension 3.

Les pièges qui coûtent des points

- Écrire $\sqrt{-5}$: **interdit**. On écrit $i\sqrt{5}$. La règle $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ne vaut que pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$.
- Identifier a et b dans $z = a + ib$ sans avoir vérifié qu'ils sont **réels** : l'unicité tombe sinon.
- Écrire $z \leq z'$ ou $z > 0$: **aucun sens**. $\mathbb{C}$ n'admet aucun ordre total **compatible** avec ses opérations. Seuls des *réels* tirés de z se comparent, comme $\operatorname{Re}(z)$ ou $\operatorname{Im}(z)$.
- Oublier **distinctes** dans le critère : $x^3 = 3x + 2$ a $\Delta_C = 0$ et trois racines réelles *comptées avec leur multiplicité*, mais deux seulement sont distinctes.
- Dire $\operatorname{Im}(3 - 5i) = -5i$: **faux**. La partie imaginaire est le *réel* -5 .
- Croire le détour toujours inévitable. Il faut **deux** hypothèses : cubique **irréductible** sur $\mathbb{Q}$ et trois racines réelles.

Le détail, les démonstrations et les récits : [COURS-C1] · Compléments, quiz et cartes de révision : **compagnon numérique du chapitre**