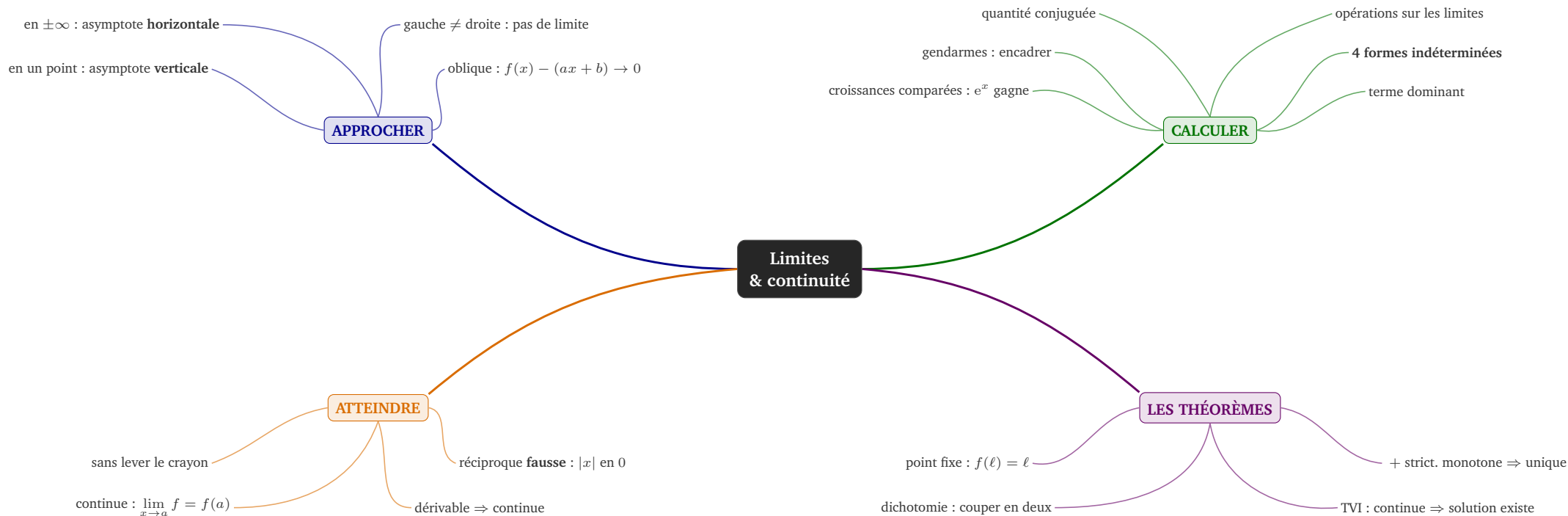




Les définitions canoniques (le langage ε fait foi) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geq A, |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$f \text{ continue en } a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Les résultats à savoir par cœur. Quatre formes indéterminées :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

Croissances comparées (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

Références en $+\infty$: $x^n \rightarrow +\infty \cdot \frac{1}{x^n} \rightarrow 0 \cdot \sqrt{x} \rightarrow +\infty$ (en $-\infty$: $x^n \rightarrow +\infty$ si n pair, $-\infty$ si n impair).

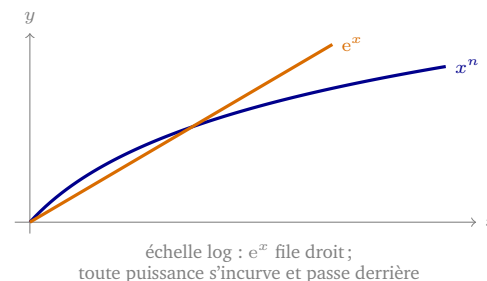
LEVER UNE INDÉTERMINATION

Ce que vous voyez	Ce que vous faites
Quotient de polynômes, $\frac{\infty}{\infty}$	factoriser par le terme dominant
Différence de racines	multiplier par la conjuguée
e^x face à une puissance x^n	croissances comparées
Un morceau qui oscille, borné	encadrer, puis gendarmes
Une composée $v \circ u$	limite par étapes u puis v

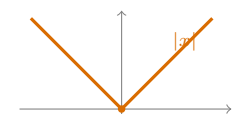
RECONNAÎTRE UNE ASYMPTOTE

La limite	L'asymptote
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$	horizontale $y = \ell$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$	verticale $x = a$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$	oblique $y = ax + b$

L'ÉCHELLE DES CROISSANCES

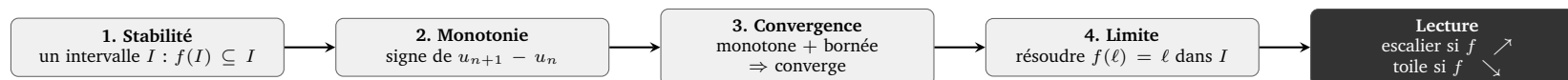


CONTINUITÉ



Dérivable $\Rightarrow$ continue, jamais l'inverse : $|x|$ est continue en 0 mais y forme un angle. Polynômes, $\sqrt{}$, e^x , $\sin$, $\cos$: continues.

ÉTUDIER UNE SUITE $u_{n+1} = f(u_n)$ (f CONTINUE)



Le théorème des valeurs intermédiaires. Si f est **continue** sur $[a; b]$, alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$ · si de plus f est **strictement monotone**, ce c est **unique** · **dichotomie** : on coupe l'intervalle en deux et on garde la moitié où f change de signe ; la longueur est divisée par 2 à chaque pas, soit environ 3,32 étapes par décimale gagnée · méthode **lente mais infaillible**.

Les pièges qui coûtent des points. Confondre **approcher** et **atteindre** : une asymptote n'est pas forcément touchée · appliquer les opérations **sans détecter** une forme indéterminée · conclure que $\infty - \infty$ vaut 0 (c'est indéterminé) · dériver sans avoir **justifié la dérivabilité** · croire que continue $\Rightarrow$ dérivable ($|x|$ dit le contraire) · appliquer le TVI **sans vérifier la continuité**, ou l'unicité **sans la stricte monotonie** · passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ **sans la continuité** de f · oublier de vérifier que le point fixe ℓ appartient bien à l'intervalle I .

Le détail, les démonstrations et les histoires : [COURS-F1] et le compagnon numérique du chapitre.