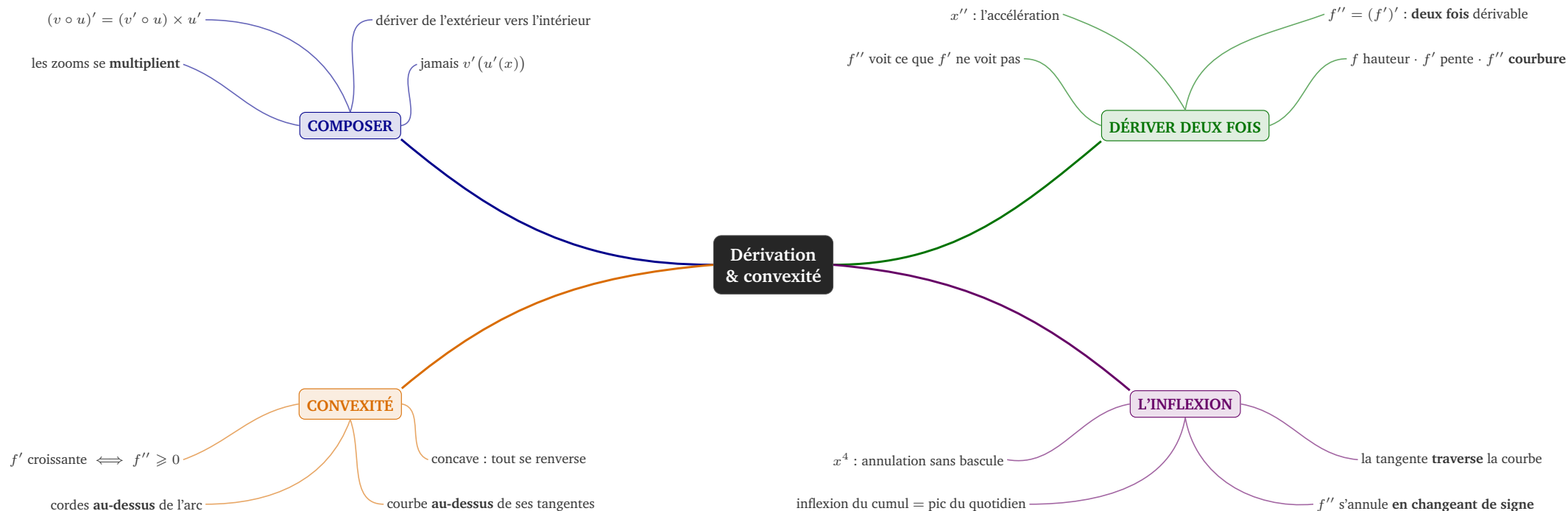




**La convexité, trois regards équivalents** ( $f$  dérivable sur  $I$ ) :

$$f \text{ convexe sur } I \iff \forall (a, b) \in I^2, \forall t \in [0; 1], f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

$$\iff f' \text{ croissante sur } I \iff \forall x \in I, f''(x) \geq 0 \quad (f \text{ deux fois dérivable})$$

**Position tangente-courbe** (démonstration exigible) : si  $f'' \geq 0$  sur  $I$ ,

$$\forall a \in I, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$$

**Les résultats à savoir par cœur.** Dérivée d'une composée ( $u$  dérivable sur  $I$ ,  $v$  sur  $J$ ,  $u(I) \subseteq J$ ) :

$$\forall x \in I, \quad (v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$$

**Inégalités de convexité :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq -1, (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

$$\text{Milieux : } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad (a, b \text{ réels}) \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a+b}{2}} \quad (a, b \geq 0) \cdot \text{égalité ssi } a = b.$$

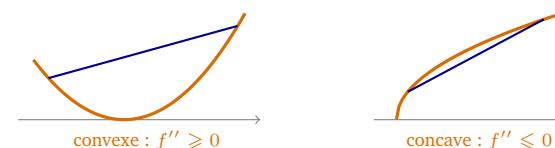
## DÉRIVER UNE COMPOSÉE (AVEC LE PERMIS)

| Fonction                       | Dérivée                | Permis             |
|--------------------------------|------------------------|--------------------|
| $u^n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) | $n u' u^{n-1}$         | aucun              |
| $\sqrt{u}$                     | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $u > 0$ sur $I$    |
| $\frac{1}{u}$                  | $-\frac{u'}{u^2}$      | $u \neq 0$ sur $I$ |
| $e^u$                          | $u' e^u$               | aucun              |

## LIRE LE SIGNE DE $f''$

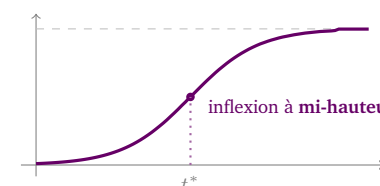
| Ce que vous voyez                           | Ce que vous concluez              |
|---------------------------------------------|-----------------------------------|
| $f'' \geq 0$ sur $I$                        | $f$ convexe sur $I$               |
| $f'' \leq 0$ sur $I$                        | $f$ concave sur $I$               |
| $f''$ s'annule en changeant de signe en $a$ | point d'inflexion en $A(a; f(a))$ |
| $f''(a) = 0$ sans changement de signe       | rien du tout ( $x^4$ en 0)        |

## LES DEUX ALLURES



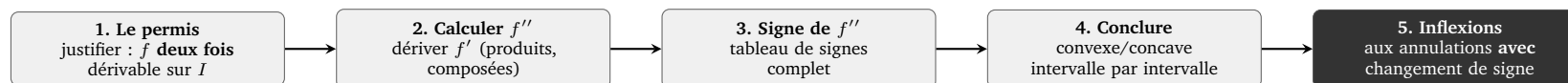
La corde (bleue) domine l'arc convexe ; l'arc concave domine sa corde.

## L'INFLEXION, UN ÉVÉNEMENT



Croissance en S (épidémie, marché) : avant  $t^*$  ça s'emballe (convexe), après ça décélère (concave). L'inflexion du cumul est le pic du quotidien.

## ÉTUDIER LA CONVEXITÉ DE $f$



**La machine à inégalités.** Choisir  $f$  convexe et un point  $a$  · écrire la tangente  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$  · la courbe la domine : l'inégalité tombe ( $e^x \geq 1 + x$  en  $a = 0$  ; Bernoulli avec  $(1 + x)^n$ ) · **la sécante** :  $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ , la corde remplace la tangente, aucune dérivée à calculer · sur une fonction convexe, les cordes sont au-dessus de l'arc : l'approche se fait d'un côté **prévisible**.

**Les pièges qui coûtent des points.** Écrire  $v'(u'(x))$  : le facteur  $v'$  s'évalue en  $u(x)$  · dériver  $\sqrt{u}$  ou  $\frac{1}{u}$  **sans le permis** ( $u > 0$ ,  $u \neq 0$ ) · confondre les étages : le signe de  $f''$  ne dit **ni** le signe de  $f$  **ni** ses variations · annoncer une inflexion sur la **seule annulation** de  $f''$  ( $x^4$  dit le contraire) · conclure  $f'' \geq 0$  **sans avoir justifié** que  $f$  est deux fois dérivable · oublier le quantificateur :  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$  vaut pour  $x \geq -1$  · appliquer la position tangente-courbe avec un  $f''$  positif **sur une partie seulement** de l'intervalle.

Le détail, les démonstrations et les histoires : [COURS-F2] et le compagnon numérique du chapitre.