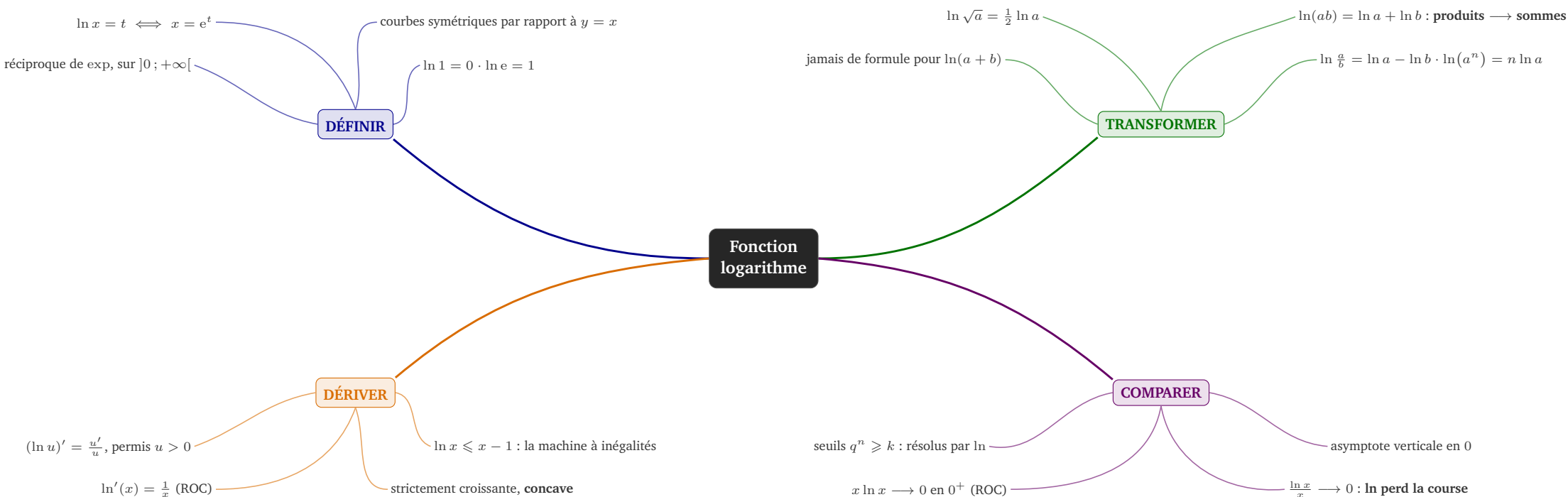




Le socle : la définition et les deux ROC. Pour tout $x \in]0; +\infty[$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\ln x = t \iff x = e^t \quad e^{\ln x} = x \quad \ln(e^t) = t$$

Démonstrations exigibles :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$$

Les résultats à savoir par cœur ($a > 0, b > 0, n \in \mathbb{Z}$) :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad \ln(a^n) = n \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{Signe : } \ln x > 0 \iff x > 1 \cdot \ln x \leq x - 1 \text{ (égalité ssi } x = 1) \cdot \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \text{ (égalité ssi } a = b).$$

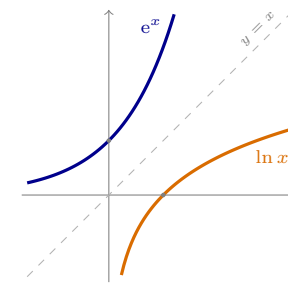
RÉSoudre AVEC LE LOGARITHME

Vous avez	Vous écrivez	Sous condition
$e^t = a$	$t = \ln a$	$a > 0$
$\ln x = k$	$x = e^k$	$x > 0$: acquis
$\ln a < \ln b$	$a < b$	$a > 0$ et $b > 0$
$q^n \geq k$	$n \ln q \geq \ln k$	$q, k > 0$; signe de $\ln q$!

TOUTES LES BASES : $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ($a > 0, a \neq 1$)

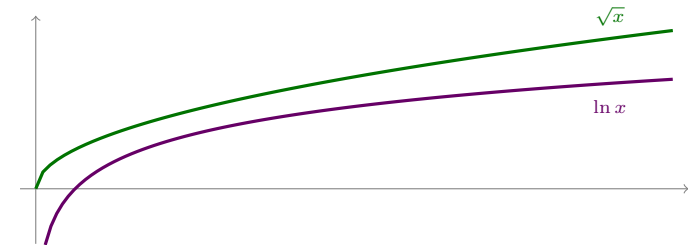
Base	Son métier
$\ln$ (base e)	l'analyse : seule dérivée sans constante, $\frac{1}{x}$
$\log = \log_{10}$	les ordres de grandeur : N a $\lfloor \log N \rfloor + 1$ chiffres
$\log_2$	les doublements : dichotomie en $\lceil \log_2 \frac{L}{\varepsilon} \rceil$ étapes

LE MIROIR



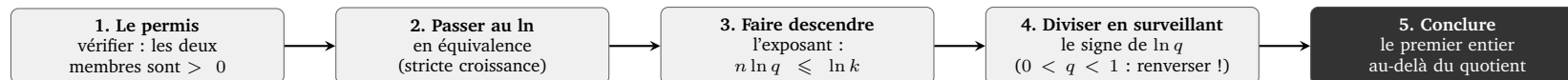
Réciproques : chaque propriété de l'une se lit sur l'autre.

LA COURSE PERDUE



Croissances comparées : $\ln$ franchit tout seuil, mais toute puissance le sème. En 0^+ : le facteur x éteint le facteur $\ln x$.

RÉSoudre $q^n \leq k$ (LE RITUEL DES SEUILS)



Ln au travail. Compter les chiffres : N possède $\lfloor \log N \rfloor + 1$ chiffres (le record de Mersenne 2024, $2^{136\,279\,841} - 1$: 41 024 320 chiffres, comptés sans écrire le nombre) · prédire une dichotomie : précision ε sur une longueur L en $\lceil \log_2 \frac{L}{\varepsilon} \rceil$ étapes (10^{-6} sur $[0; 1]$: 20 étapes) · la densité des nombres premiers autour de n : environ $\frac{1}{\ln n}$ (Gauss, 1792) · l'aire sous $y = \frac{1}{x}$ entre 1 et x vaut $\ln x$: rendez-vous au chapitre F6.

Les pièges qui coûtent des points. Écrire $\ln u$ **sans le permis** $u > 0$: le domaine se détermine **avant** de transformer · inventer une formule pour $\ln(a+b)$: le logarithme ne transforme **que** les produits · diviser par $\ln q$ avec $0 < q < 1$ **sans renverser** l'inéquation · oublier la borne du domaine dans l'ensemble solution : $\ln x \leq 3$ donne $S =]0; e^3]$, le 0 exclu vient du domaine, pas du calcul · rédiger la ROC de la dérivée **sans dire** que la dérivabilité est admise · confondre les deux croissances comparées : $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ vit en $+\infty$, $x \ln x \rightarrow 0$ vit en 0^+ · encadrer un résultat **sans son quantificateur**.

Le détail, les démonstrations et les histoires : [COURS-F3] et le compagnon numérique du chapitre.